

## 부분 강절 골조의 응력 해석

### Stress Analysis of Semi-Rigid Frame

김 선 혜\*                  김 순 철\*\*                  이 수 곤\*\*\*  
Kim, Sun-Hye              Kim, Soon-Chul              Lee, Soo-Gon

---

#### ABSTRACT

Contrary to reinforced concrete frames, the beams or girders found in actual steel frames are neither hinged nor fixed at their ends. Instead, they are usually restrained by the columns to which they are attached. Here in this paper, common finite element program for plane frame stress analysis is improved by including the effect of partial fixities of the girder ends.

To include the effect of partial fixities of the girder ends, Kim's modified slope-deflection equation is adopted. The stress analysis results obtained by this proposed method are then compared with Kim's example. Finally, method of choosing the most economic girder section for a multi-story frame is suggested through the examples.

---

#### 1. 서      론

철근콘크리트 구조에서 처럼 기둥과 보가 일체식으로 시공되는 골조에서는 응력 해석시 절점을 강절점(rigid connection)으로 가정할 수 있다. 그러나 철골조와 같이 용접이나 고장력 bolt 등으로 형강 기둥에 보가 접합되는 경우에는 완전 강절점이 아닌 소위 반 강절점(semi-rigid connection)으로 뒀을 쉽게 짐작할 수 있다. 실제로 이와 같은 반 강절점 접합부의 고정 정도 또는 부분 고정도(partial fixity)를 적절히 이용하면 구조 설계시 보 중량의 15%정도 절약할 수 있는 것으로 보고 되고 있다.<sup>1~4</sup>

그러나 강골조의 구조 해석에서 특히 고층 골조의 구조해석에서 부분 고정도를 여하히 반영시킬것인가? 는 구조 설계자 누구에게나 어려운 문제점으로 남게 된다. 이와 같은 미해결 상태의 문제점에도 불구하고 부분 고정도 및 부분 고정도를 갖는 골조의 응력 해석 및 안정해석에 관한 연구는 꾸준히 계속되고 있다. 그 한 예로 미국의 강구조학회(AISC)의 새 시방서인 하중저항계수 설계법(L.R.F.D)<sup>5</sup>에 부분 고정 접합부가 반영된 점이다.

---

\* 전남대학교 대학원 석사과정  
\*\* 동신대학교 건축공학과 부교수  
\*\*\* 전남대학교 건축학과 교수

즉 하중 저항 계수 설계법에서는 모멘트 접합부(완전 강절점 접합부)를 Type(I) connection으로, 전단 접합부(이상 활절 접합부)를 Type(II) connection으로, 부분 고정 접합부를 Type(III) connection으로 분류하고 있다.

여기에서는 Kinney<sup>6</sup>의 고정도 정의 및 이를 이용하여 김형걸 박사가 유도한 처짐각법식의 결과를 고층 철골조의 응력 해석에 적용하기로 한다. Wilson등이 유도한 처짐각법(slope-deflection method)<sup>7</sup>은 연속보의 응력 해석에서는 대단히 효과적인 방법이다. 그러나 처짐각법의 기본 가정이 “휨재의 길이 변화는 없다.(no change of bending member length)” 이므로 고층 골조에 이용할 때에는 하중 작용으로 인한 기둥 길이의 축소 영향을 고려할 수 없다. 실제로 고려한다고 하여도 해석적 방법(analytical method)의 과정은 대단히 복잡하게 됨을 알 수 있다. 그러나 수치 해석법(numerical method)의 하나인 평면 골조의 유한요소법을 쓰면 기둥의 수축으로 인한 영향을 쉽게 고려할 수 있다. 따라서 기존의 평면 골조 유한요소 program을 다소 개량하여 보의 고정도를 고려한 program으로 만들었다. 개발된 program의 정확도와 부분 고정도 조정으로 경제적 보 설계가 가능함을 예제를 통하여 제시하기로 한다. 먼저 본 연구의 근간을 이루는 부분 고정도에 대하여 알아 보기로 한다.

## 2. 부분 고정도(partial fixity, semi-rigidity)

본 연구의 주 목적은 양단의 지지상태 조정에 따른 고층 골조의 휨모멘트 변화를 고찰하는 것이므로 먼저 부분 고정도(partial fixity) 또는 부분 강접합도(semi-rigidity)에 대하여 알아보기로 한다. 쉽게 알 수 있는 것처럼 철골 구조물을 구성하는 H-형강보의 지지상태는 구조역학 교과서에서 흔히 다루고 있는 마찰이 없는 이상 활절(frictionless ideal hinge)도 아니고 그렇다고 완전 고정단(completely fixed end)도 아니다. 즉 실제의 지지상태는 소위 반고정단(partially fixed end)상태이다.

이와 같은 반고정단 상태를 적당히 조절하면 보의 경제적인 단면 설계가 가능하다. 예를 들어 설명하기 위하여 등분포 하중이 만재된 보의 응력 상태를 지지 상태별도 표시하면 다음과 같이 된다.

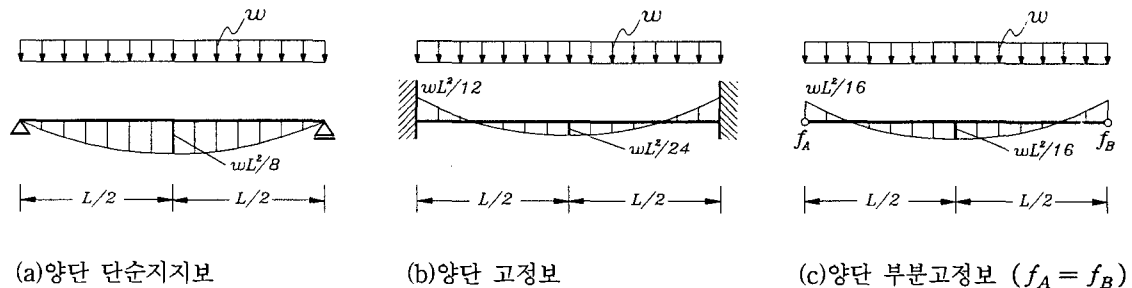


그림 1. 지지상태에 따른 모멘트 변화

그림 1과 같은 보에서 보의 설계용 전단력은 어느 경우에도  $Q = wL/2$ 이다. 그러나 그림 1(a)의 설계용 모멘트는 그림 1(c)의 2배 (16/8), 그림 1(b)의 설계용 모멘트는 단부에서는 4/3배 (16/12), 중앙부에서 1.5배 (24/16)로 된다. 따라서 단부의 부분 조절이 가능하다면 그림 1(c)와 같은 지지상태를 갖도록 함으로써 H-형강보의 경제적 단면 설계를 할 수 있다. 부분 고정도를 효과적으로 이용함으로써 경제적인 보의 설계, 즉 보의 중량(weight)을 감소시키고자 하는 연구는 이미 1940년대에 영국에서 시작되어 한동안 계속되었다.

그러나 당시 보의 접합부 시공이 주로 리벳 접합부가 주를 이루었으므로 현대의 시공법과는 다소 차이가 있고 이에 따라 부분 고정도에 관한 연구도 소강 상태를 유지하였다.

1970년대에 들어서면서 구조물의 안전성(stability), 즉 강도상의 문제 뿐만 아니라 변형이나 진동 문제등에 관심을 갖게 되고 보의 부분 고정도를 무시할 수 없는 상황을 맞이하게 되었다. 이에 따라 부분 고정도에 관한 연구는 급속하게 활기를 띄게 되었는데 참고문헌은 그 중의 극히 일부이다. 부분 고정도의 중요성 인식은 AISC의 새 시방서인 L.R.F.D에서도 찾을 수 있다. L.R.F.D가 규정한 접합부, 즉 지지 상태를 분류해보면 소위 강절(모멘트) 접합부를 Type(I) connection, 활절(전단) 접합부를 Type(II) connection, 끝으로 부분 고정단 접합부를 Type(III) connection으로 구분하고 있다.

대부분의 구조 설계자가 부분 고정단 도입에 따른 이점을 인식하면서도 실제 설계에 반영을 주저하는 상태이다. 그 가장 큰 이유 중의 하나가 설계하고 있는 보 또는 구조물의 부분 고정도 값을 어떻게 가정할 것인가? 이다. 실제로 부분 고정도 값이 접합부 상세나 보의 치수 등에 따라 변화하는 실험 상수인데 설계 단계에서 시공후의 보의 실험상수 결정이 가능하겠는가? 의 문제이다.

부분 고정도는 접합부를 어떻게 모델링하느냐? 에 따라 여러 가지 방법으로 정의할 수 있겠다. 그 중 대표적인 것으로는 Timoshenko의 단부 구속도(end restraint coefficient)<sup>8</sup>  $\epsilon_a$ 가 있는데 이를 그림 2에서의 단부 모멘트  $M_a$ , 회전각  $\theta_a$  ( $a = A, B$ )와 연관시키면 다음과 같이 된다.

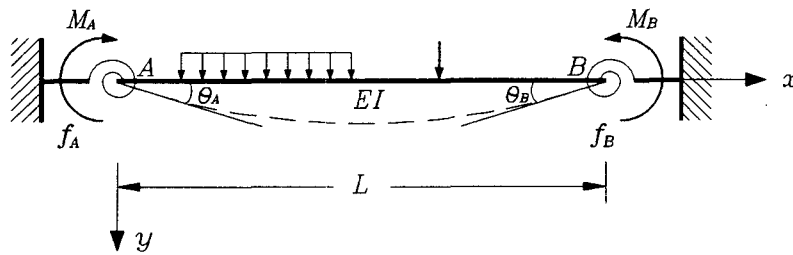


그림 2. 양단이 부분 고정된 보

$$\begin{aligned} M_A &= -\epsilon_A \theta_A \\ M_B &= -\epsilon_B \theta_B \end{aligned} \quad (1,a,b)$$

윗 식에서 단부 구속도  $\epsilon_a$ 가  $\epsilon_a = 0$ 이면 단 모멘트  $M_a$ 는  $M_a = 0$ 으로 된다. 식을 다소 변형시킨 후  $\epsilon_a = \infty$ 이라 놓으면  $\epsilon_a = 0$ 으로 된다. 즉 Timoshenko의 정의에 따른 경우 단순 지지단은  $\epsilon_a = 0$ , 완전 고정단은  $\epsilon_a = \infty$ 으로 된다. 그러나 이와 같이  $\epsilon_a = 0$ 에서  $\epsilon_a = \infty$ 까지의 단부 구속도 정의는 정성적(定性的)인 정의는 될지 모르나 정량적(定量的)인 정의는 될 수 없다.

정량적인 정의는 Kinney의 부분 고정도  $f_a$  ( $a = A, B$ ) 개념을 이용하면 명확해진다. Kinney는 이상 활절일 때  $f_a = 0.0$ , 완전 고정단일 때  $f_a = 1.0$ 으로 정의 하였다. 예를 들어  $f_a = 0.25$ 이면 단부  $a$ 의 회전각은  $0.75\theta_a$  ( $\theta_a$ 는 이상 활절일 때의 회전각), 단부 모멘트는  $0.25M_a$  ( $M_a$ 는 완전 고정단일 때의 단부 모멘트)로 된다. Kinney는 이와 같은 정의를 처짐각법식 유도에 이용하여 소위 수정 처짐각법식(modified slope-deflection equation)을 유도하고 이것을 골조의 응력 해석에 이용하였다. 전 서울대학교 김형걸<sup>9</sup> 교수께서도 Kinney와 같은 정의를 이용하여 수정 처짐각법을 이용하였다. 물론 Kinney의 식과는 다른 형태를 취한다.

### 3. 요소의 강성행렬과 절점력

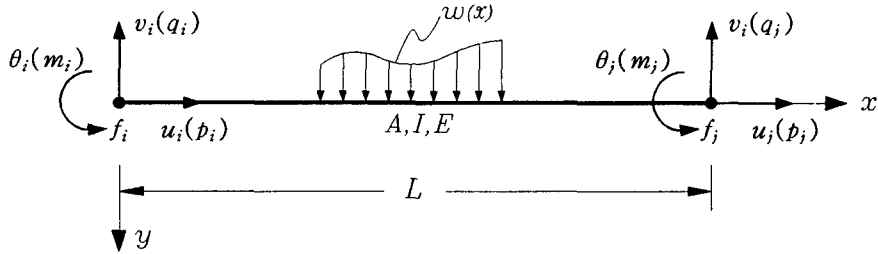


그림 3. 평면골조 요소의 절점변형과 절점력

그림 3과 같은 평면 골조 요소의 절점변형 벡타  $\{\delta\}$ 와 절점력 벡타  $\{q\}$ 는 다음식으로 결합된다.

$$[k]\{\delta\} = \{q\} \quad (2)$$

여기서  $[k]$ 는 요소의 강성행렬로 요소의 단면적은  $A$ , 단면 2차모멘트를  $I$ 라 할 때 다음식으로 주어진다. ( $E$ 는 재료의 탄성계수)

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{AL^2}{I} \quad (3)$$

요소의 절점변형 벡타  $\{\delta\}$ 는 그림 3에서

$$\{\delta\}^T = [u_i \ v_i \ \theta_i \ u_j \ v_j \ \theta_j] \quad (4)$$

로 주어진다. 절점력 벡타  $\{q\}$ 는 요소에 작용하는 횡하중의 크기를  $w(x)$ 라 할 때 아래식으로 된다.

$$\{q\} = \int_0^L w(x)[N]^T dx \quad (5)$$

여기서  $[N]$ 은 형상 함수 행렬(shape function matrix)로

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6] \quad (6)$$

이나 횡하중  $w(x)$ 만이 요소에 작용할 때는 아래식을 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} N_1 &= 0, & N_2 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, & N_3 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_4 &= 0, & N_5 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, & N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (7,a,b)$$

위의 형상 함수 행렬, 즉 식(7)을 식(5)에 대입하면 절점력 벡타가 얻어지는데, 여기서 특히  $w(x) = w_0$ , 즉 등분포 하중이면  $\{q\}$ 는 다음식으로 된다.

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ q_i \\ m_i \\ p_j \\ q_j \\ m_j \end{Bmatrix} = w_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ L/2 \\ L^2/12 \\ 0 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

그림 3과 식(8)을 연관시켜보면,  $q_i$ 와  $q_j$ 는 요소에 작용하는 전단력이고  $m_i$ 와  $m_j$ 는 각각 고정단 모멘트임을 알 수 있다.

앞에서 언급한 Kinney의 부분 고정도 정의에 따라 양단의 부분 고정도가 각각  $f_i$ 와  $f_j$ 인 보에 김형걸 박사가 유도한 수정 치짐각식을 이용하면 식(3), 즉 요소의 강성행렬은 다음과 같은 형태로 된다.

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \cdot \frac{1}{f'} \begin{vmatrix} af' & 0 & 0 & -af' & 0 & 0 \\ 0 & 12(f_i F_j + f_j F_i) & 12f_i F_j L & 0 & -12(f_i F_j + f_j F_i) & 12f_j F_i L \\ 0 & 12f_i F_j L & 4f_i(3+f_j)L^2 & 0 & -12f_i F_j L & 8F_{ij}L^2 \\ -af' & 0 & 0 & af' & 0 & 0 \\ 0 & -12(f_i F_j + f_j F_i) & -12f_i F_j L & 0 & 12(f_i F_j + f_j F_i) & -12f_j F_i L \\ 0 & 12f_j F_i L & 8F_{ij}L^2 & 0 & -12f_j F_i L & 4f_j(3+f_i)L^2 \end{vmatrix} \quad (9)$$

윗 식에서  $F_i = 1 + f_i$ ,  $F_j = 1 + f_j$ ,  $F_{ij} = f_i \cdot f_j$ 를 표시한다. 이때  $f_i = f_j = 1.0$ 이라 하면  $f' = 4 - (1 - f_i)(1 - f_j)$ ,  $F_i = F_j = 2.0$ ,  $F_{ij} = 1.0$ 이고, 이들을 식(9)에 대입하면 식(3)과 동일하게 됨을 확인할 수 있다.

한편 요소의 부분 고정도를 고려한 절점력 벡터 성분은 다음식으로 된다.

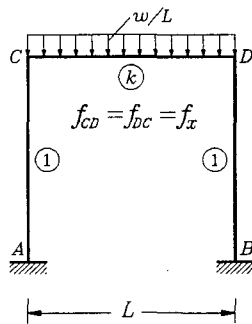
$$\begin{aligned} q_i &= q_i^0 - \frac{1}{L}(m_j^0 - m_i^0) \\ q_j &= q_j^0 + \frac{1}{L}(m_j^0 - m_i^0) \\ m_i &= \frac{1}{f'} \{ m_i^0 + 0.5(1 - f_j) m_j^0 \} \\ m_j &= \frac{1}{f'} \{ m_j^0 + 0.5(1 - f_i) m_i^0 \} \end{aligned} \quad (10,a,b)$$

여기서  $q_i$ ,  $q_j$ 는 앞에서와 같이 양단 단순지지일 때의 전단력을,  $m_i$ ,  $m_j$ 는 완전 고정 ( $f = 1.0$ )일때의 고정단 모멘트를 뜻한다.

요소의 강성행렬 식(9)와 절점력 벡터 성분 식(10)을 골조 전체에 대하여 조합한 후 경계 조건을 처리하면 응력 해석은 완결된다. 이제 예제를 통하여 개발된 program의 검정과 아울러 부분 고정도값 조정에 의한 보 단면의 경제적 설계가 어떻게 가능한지 알아본다.

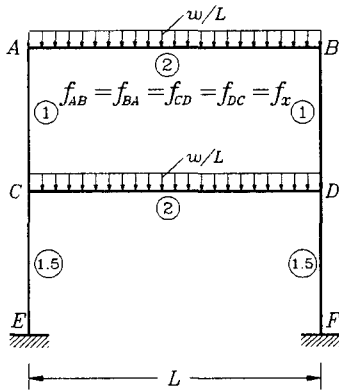
#### 4. 응력 해석 예

개발된 program의 검증을 위하여 먼저 그림 4와 같은 간단한 골조를 예제로 택한다. 그림 4(a)에서는  $f_{CD} = f_{DC} = f_x$ 라 할 때 고정도 값 ( $f_x$ ) 및 보의 강비(stiffness ratio :  $k$ )의 변화에 따라 단 모멘트와 보의 중앙부 모멘트 ( $M_0$ )가 달라지는 상태를, 그림 4(b)는 절점모멘트가 고정도  $f_x$ 에 따라 변화하는 상태를 표시한다. 두 예제는 모두 김형걸 박사의 논문에서 인용한 것으로 응력 해석 결과는 인용 논문의 값과 완전히 일치한다. 단, 아래 표에서  $C$ 는 양단이 완전고정된 보의 고정단 모멘트, 즉  $wL^2/12$ 을 의미한다.



Moment $f_x$	1		2	
	$M_{CD}$	$M_0$	$M_{CD}$	$M_0$
1.0	0.6667C	0.8333C	0.5000C	1.0000C
0.8	0.6154C	0.8846C	0.4706C	1.0294C
0.6	0.5455C	0.9545C	0.4286C	1.0714C
0.4	0.4444C	1.0556C	0.3636C	1.1363C
0.2	0.2857C	1.2143C	0.2500C	1.2500C

(a) 1층 단경간골조



Moment $f_x$	$M_{AB}$	$M_{CA}$	$M_{CD}$	$M_{CE}$
	1.0	0.5555C	0.4444C	0.7777C
0.9	0.5381C	0.4281C	0.7464C	0.3182C
0.8	0.5178C	0.4094C	0.7105C	0.3011C
0.7	0.4939C	0.3876C	0.6690C	0.2813C
0.6	0.4655C	0.3621C	0.6207C	0.2586C
0.5	0.4309C	0.3314C	0.5635C	0.2320C
0.4	0.3786C	0.2943C	0.4950C	0.2006C
0.3	0.3329C	0.2480C	0.4113C	0.1632C

(b) 2층 단경간골조

그림 4. 부분고정도값 변화에 따른 단 모멘트 변화

다음의 그림 5(a)는 기둥의 축소를 고려하지 않은 Wilson의 처짐각법에 따라, 그림 5(b)는 기둥의 축소를 고려하되 식(9)의 유한 요소에서 부분 고정도 값이 모두  $f_i = f_j = 1.0$ 인 경우의 응력 해석 결과를 표시한 것이다. 끝으로 그림 5(c)는 단부의 부분 고정도를 조절함으로써 단부나 중앙부의 설계용 모멘트가 비슷

한 값을 갖도록 한 하나의 예이다.

그림 5(a)와 (b)의 응력 해석 결과를 비교해 보면 지금까지 우리에게 익숙한 Wilson의 처짐각을 다경간, 고층 골조 구조 설계에 이용할 경우 외단(exterior end) 모멘트는 상층에서 29% 증가시키고, 내단(interior end) 모멘트는 3%정도 감소시켜 설계함이 바람직하겠다. 그림 5(c)는 양단부 및 중앙부의 설계용 휨 모멘트값이 비슷한 값을 갖도록 한 예로서 이는 다층, 다경간 골조에서도 가능하다.

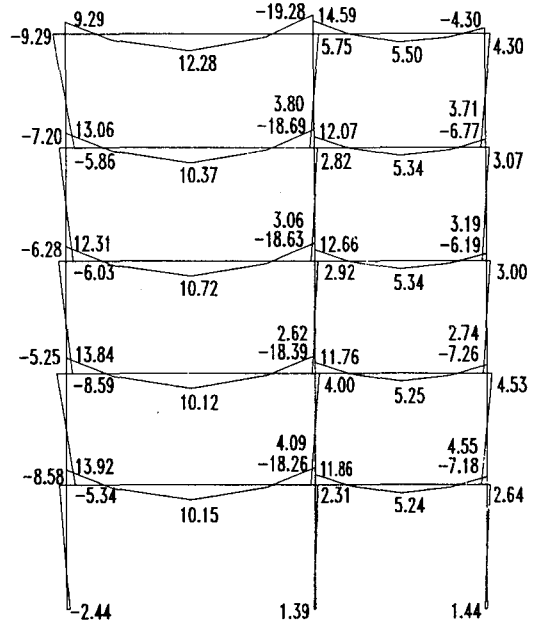


그림 5(a). 기둥의 축소가 없는 강철 골조의 휨 모멘트도

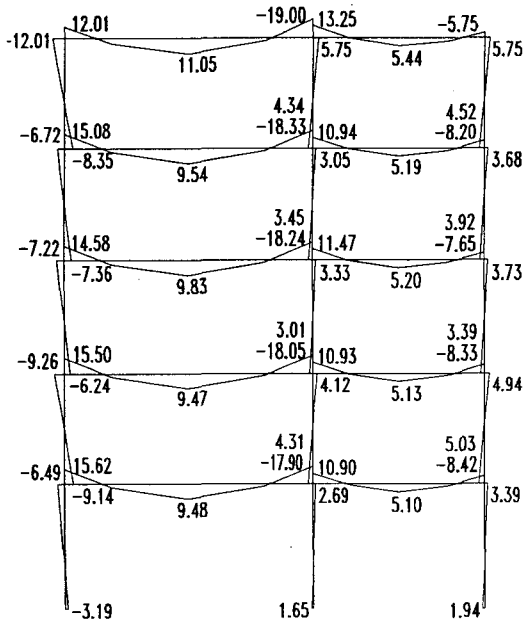


그림 5(b). 기둥의 축소가 있는 강철 골조의 휨 모멘트도

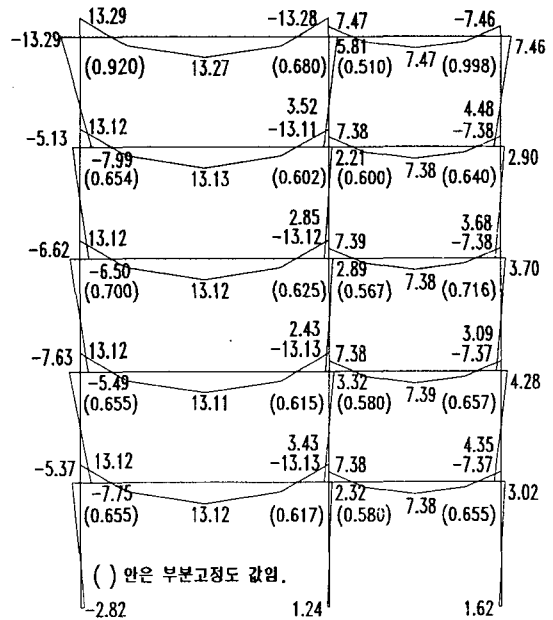


그림 5(c). 기둥의 축소가 있는 부분 고정단 골조의 휨 모멘트도

## 5. 결 론

기존의 평면 골조 해석용 유한요소 program을 요소의 강성행렬 및 절점력 벡타가 요소 양단부의 부분 고정도 함수로 표시될 수 있도록 수정하였다. 이들을 바탕으로하여 개발된 program을 이용한 결과로부터 얻은 결론을 다음과 같이 요약할 수 있다.

1. 수정된 요소의 강성행렬 및 절점력 벡타에서 요소 양단의 부분 고정도 값  $f_i$ 를  $f_i = 1.0$ 으로 놓으면 기존의 강성행렬 및 절점력 벡타와 같게 된다.
2. 개발 program의 검정을 위하여 타 문헌에서 예제로 택한 응력 해석 결과와 비교해 본 결과 부분 고정도의 어떤 변화에도 서로 일치하였다.
3. Wilson의 처짐각식을 다층, 다경간 골조의 구조해석에 이용할 경우 특히 외단부의 모멘트를 증가시킬 필요가 있다. 이와 같은 필요성은 하층보에서 상층보로 올라 갈수록 크게 된다.
4. 다층, 다경간 골조에서 보 양단의 부분 고정도 값을 적절히 조절하면 양단부 및 중앙부의 설계용 모멘트가 거의 비슷한 값을 갖게 된다. 즉 경제적인 보 단면의 선택이 가능하다.

## 참고문헌

1. Batho, C., and Rowan, H.C., "Investigations on Stanchion Connections" Second Report, Steel Structures Research Committee, Dep. of Scientific and Industrial Research of Great Britain. H.M. Stationery Office, London, 1934, pp. 61-137.
2. Baker, J.F., "The Stress Analysis of Steel Building Frames" Second Report, Steel Structures Research Committee, Dep. of Scientific and Industrial Research of Great Britain. H.M. Stationery Office, London, 1934, pp. 200-241.
3. Hechtman, R.A., and Johnston, B.G., "Riveted Semi-Rigid Beam-to-Column Connection" Progress Report No. 1. AISC Committee on Steel Structures Research, Nov., 1947.
4. Johnston, B.G., and Mount, E.H., "Analysis of Building Frames with Semi-Rigid Connection" Trans., ASCE, Vol. 107, 1942, pp. 933-1018.
5. American Institute of Steel Construction, "Load and Resistance Factor Design" Manual of Steel Construction, 1st ed., Chicago: AISC, 1986.
6. J.S. Kinney, "Indeterminate Structural Analysis" Addison Wesley Publishing Co., 1957.
7. Wilson, W.M., and Moore, H.F., "Tests to Determine the Rigidity of Riveted Joints of Steel Structures" University of Illinois Bulletin, No. 104, 1971.
8. S.P. Timoshenko, "Theory of Elastic Stability" McGraw Hill Book Co., 1936.
9. 金亨杰, "A Study on the Stress Analysis for Partially Rigid-Jointed Structures" 서울대학교 大學院 博士學位論文, 1973.