

경계조건에 따른 적층복합판의 모멘트에 대한 종방향 모멘트 무시 효과

The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Terms on the Moment of Laminated Plates with Increasing Aspect Ratio

김 덕 현* 박 제 선** 한 봉 구*** 이 정 호****
Kim Duk-Hyun Park Jae-Seon Han Bong-Goo Lee Jung-Ho

ABSTRACT

The most of the design engineers for construction has academic background of bachelors degree. Theories for advanced composite structures are too difficult for such engineers and some simple but accurate enough methods are necessary. The senior author has reported that some laminate orientations have decreasing values of D_{16} , B_{16} , D_{26} and B_{26} stiffnesses as the ply number increases. Such plates behave as special orthotropic plates and simple formulas developed by the author can be used.

Most of the bridge and building slabs on girders have large aspect ratios. For such cases further simplification is possible by neglecting the effect of the longitudinal moment terms(M_x) on the relevant partial differential equations of equilibrium. In this paper, the result of the study on the subject problem is presented.

1. 서 론

복합재료는 가볍고 부식되지 않으며, 임의 방향으로 보강이 가능하고 스티프너 등과 같은 기하학적 보강 없이 구조부재를 보강할 수 있으며, 구조적 요구 사항에 따라 최적 부재/구조를 생산할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이러한 특성은 건설재료로 활용하기 위한 매우 적합한 조건이라 할 수 있다. 복합재료 구조 가운데 해석이 비교적 간단하며 토목 구조에 쉽게 적용 가능한 특별직교 이방성 적층복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐 w 에 관한 4차의 단일 편미분항을 갖는다.

-
- * Korea Composites 소장
 - ** 강원대학교 토목공학과 교수
 - *** 서울산업대학교 건설구조공학과 교수
 - **** 강원대학교 토목공학과 박사과정

따라서 유한차분법을 이용한 구조해석의 경우에 중심 차분을 사용하게 되면 요구되는 pivotal point의 수는 5개가 된다. 그러므로 가상점 소거시 번잡함을 가져온다. 그러나 이러한 복잡성은 지배방정식을 3개의 종속변수 w, M_x, M_y 로 구성된 3개의 2차 연립 편미분 방정식으로 나타냄으로 극복될 수 있다. 이상의 3개 방정식을 차별화하여 구성된 매트릭스를 풀게 되면 처짐과 모멘트를 한번에 구할 수 있는 장점을 갖기도 한다.

또한, 휨에 대한 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향을 무시할 수 있다면 구조해석에 있어서 그 계산 수행 시간을 크게 단축시킬 수 있다.

이 논문에서는 형상비 변화에 따른 종방향 모멘트 M_x 항의 평형방정식에 대한 영향을 무시한 결과가 모멘트 계산에 미치는 영향에 대해 고찰하여 대형구조물의 계산 과정에 있어 가급적 정확하면서도 그 계산 시간을 줄이기 위한 연구를 수행하였다.

2. 이론적 배경

특별직교 이방성 적층 복합판의 지배방정식은 다음과 같다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (2.1)$$

여기서 $D_1 = D_{11}, D_2 = D_{22}, D_3 = (D_{12} + 2D_{66})$ 이다.

식(2.1)을 중심차분으로 전개하면 소요되는 pivotal point의 수는 5개가 된다. 그러므로 가상점을 소거시키는데 있어서의 번잡을 줄이기 위해 다음과 같은 세계의 평형방정식으로 나타낸다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

그리고 이 3개의 방정식을 풀면 처짐과 모멘트를 한 번에 구할 수 있다. 그리고 여기서 위의 식(2.2)에 대한 종방향 모멘트의 영향이 무시된다면 계산이 더욱 간단해 지며, 거대한 구조물의 경우 대형 매트릭스 계산시 수렴속도에 있어 엄청난 효율을 가져올 수 있다. 횡방향 모멘트 M_x 가 무시되면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.5)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

2개의 미지 종속변수 w , M_y 를 구하기 위해 식(2.5), (2.6)를 전형적인 구간과 경계구간에 대하여 차분식을 세운다. 그리고 차분식을 y 방향으로 MJ 개 node로 나누어 matrix 방정식으로 나타낸다. 그리고 이를 대형 matrix 계산에 효과적인 tri-diagonal matrix해법으로 풀면 (x,y) 점의 w , M_y 값을 구할 수 있다. 여기서 구해진 처짐 w 을 이용하여 M_x 를 구해내게 된다.

3. 수치해석

수치해석에서 고려한 대상 구조물은 Figure 1과 Figure 2에 나타낸것과 같은 사변단순지지(SS)와 양단단순-타단자유(SF)인 특별직교 이방성 적층복합판이다. 적층판의 적층형태 및 보강재 보강 방향은 $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 와 $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 의 두가지 형태의 적층복합판을 고려하였다. 형상비 변화에 따른 평형방정식에 대한 종방향 모멘트 M_x 의 무시효과를 살펴보기 위해 적층복합판의 형상을 $a=5m$, $b=5m$ 를 기준으로 하여 형상비를 $c=a/b=1\sim 5$ 까지 변화시켜 수치해석을 수행하고 고찰하였다. 하중 조건은 적층판에 등분포하중만을 재하 하였으며, 물성값은 다음과 같다.

$$E_1 = 67.36 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.272, \quad \nu_{21} = 0.0328, \quad G_{12} = 3.0217 \text{ GPa},$$

$$\text{Uniform Load} = 300 \text{ N/m}^2, \quad \text{적층수 } r = 1, \quad h_o = 0.005m$$

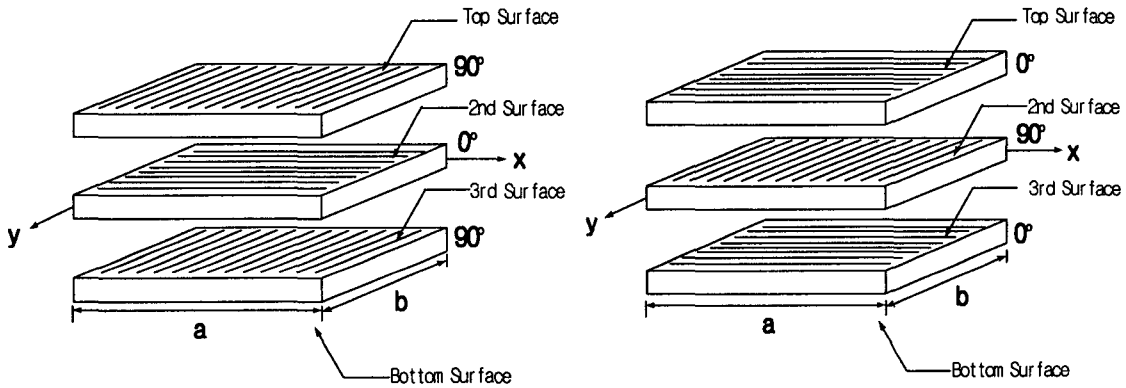


Figure 1. Special orthotropic laminated plate

종방향 모멘트 M_x 항의 평형방정식에 대한 영향이 무시되었을 때, 모멘트에 미치는 영향을 연구하기 위해 각각의 적층복합판 및 조건을 다음과 같은 기호로 분류하였다.

Case A : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case A-N : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

Case B : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case B-N : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.
 각각의 Cse에 대한 적층복합판 휨강성 D_{ij} 를 계산한 결과값들을 Table 1에 나타내었다.
 각 Case에 따른 수치해석 결과값들을 Table 2~ 5에 나타내었다. Figure 3~10 는 형상비 증가에 따른 M_x 와 M_y 의 결과값을 그래프로 나타낸 것이다.

Table 1. Flexural stiffnesses of the plate

| Case Stiffness | $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]_r$ | $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_r$ |
|-------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| D_{11} | 2926.95 | 18492.90 |
| D_{22} | 18492.90 | 2926.95 |
| D_{12} | 626.77 | 626.77 |
| D_{66} | 849.85 | 849.85 |

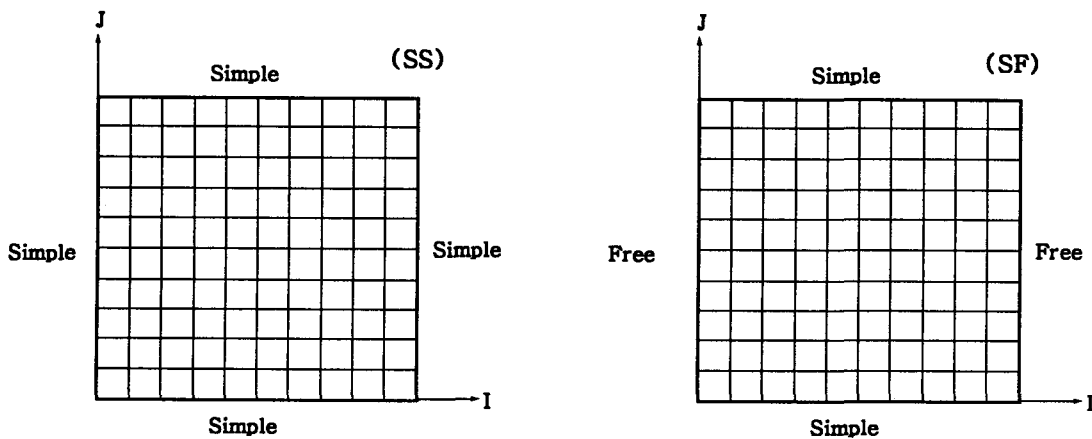


Figure 2. Node point on special orthotropic laminated plate($c=a/b=5m/5m=1$)

Table 2. Moment M_x (SS) for each aspect ratio at the center of the plate ($N \cdot m$)

| Case Aspect ratio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Case A | 0.13595E+03 | 0.36857E+02 | 0.30161E+02 | 0.31623E+02 | 0.31795E+02 |
| Case A-N | 0.81518E+02 | 0.33625E+02 | 0.31843E+02 | 0.31777E+02 | 0.31774E+02 |
| Ratio (A/A-N) | 1.6677 | 1.0961 | 0.9472 | 0.9952 | 1.0007 |
| Case B | 0.83531E+03 | 0.10930E+04 | 0.65607E+03 | 0.36268E+03 | 0.23358E+03 |
| Case B-N | 0.22886E+04 | 0.79054E+03 | 0.35751E+03 | 0.24223E+03 | 0.21212E+03 |
| Ratio (B/B-N) | 0.3650 | 1.3826 | 1.8351 | 1.4972 | 1.1012 |

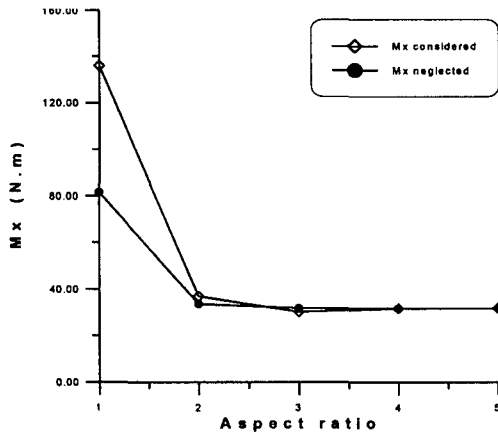


Figure. 3. Mx at the center of the plate (Case SS-A)

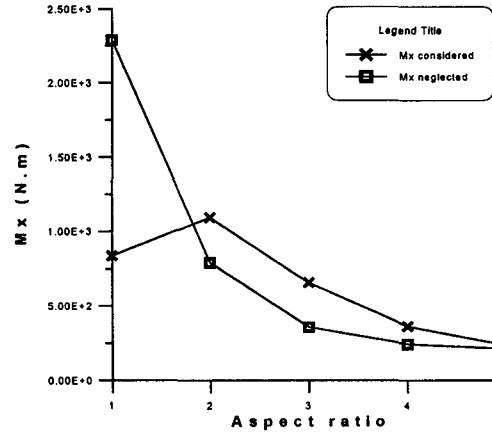


Figure. 4. Mx at the center of the plate (Case SS-B)

Table 3. Moment My (SS) for each aspect ratio at the center of the plate (N · m)

| Aspect ratio \ Case | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Case A | 0.83531E+03 | 0.96783E+03 | 0.94041E+03 | 0.93708E+03 | 0.93742E+03 |
| Case A-N | 0.87690E+03 | 0.93525E+03 | 0.93742E+03 | 0.93750E+03 | 0.93750E+03 |
| Ratio (A/A-N) | 0.9526 | 1.0348 | 1.0032 | 1.0000 | 1.0000 |
| Case B | 0.13595E+03 | 0.67437E+03 | 0.92282E+03 | 0.97584E+03 | 0.96917E+03 |
| Case B-N | 0.53495E+03 | 0.82378E+03 | 0.90728E+03 | 0.92950E+03 | 0.93531E+03 |
| Ratio (B/B-N) | 0.2541 | 0.8186 | 1.0171 | 1.0499 | 1.0362 |

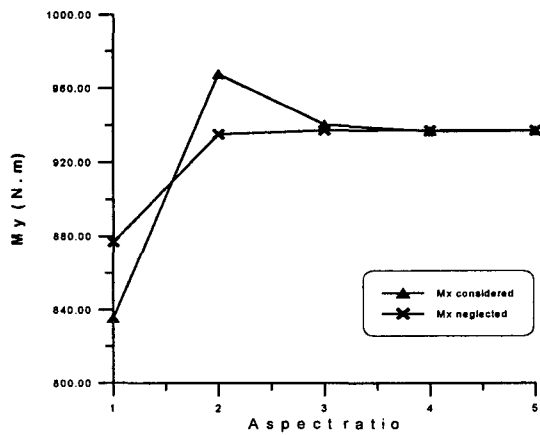


Figure. 5. My at the center of the plate (Case SS-A)

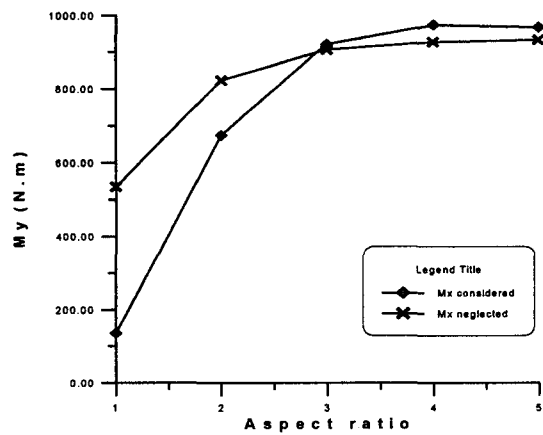


Figure. 6. My at the center of the plate (Case SS-B)

Table 4. Moment M_x (SF) for each aspect ratio at the center of the plate ($N \cdot m$)

| Case \ Aspect ratio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Case A | 0.24983E+02 | 0.32716E+02 | 0.31910E+02 | 0.31765E+02 | 0.31772E+02 |
| Case A-N | 0.31604E+02 | 0.31769E+02 | 0.31774E+02 | 0.31774E+02 | 0.31772E+02 |
| Ratio (A/A-N) | 0.7905 | 1.0298 | 1.0043 | 0.9994 | 1.0000 |
| Case B | 0.39006E+02 | 0.12982E+03 | 0.18754E+03 | 0.20531E+03 | 0.20703E+03 |
| Case B-N | 0.19805E+03 | 0.20008E+03 | 0.20058E+03 | 0.20071E+03 | 0.20074E+03 |
| Ratio (B/B-N) | 0.1970 | 0.6488 | 0.9350 | 1.0229 | 1.0313 |

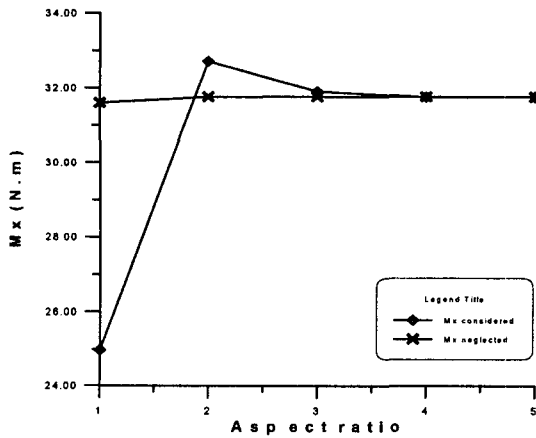


Figure 7. M_y at the center of the plate (Case SF-A)

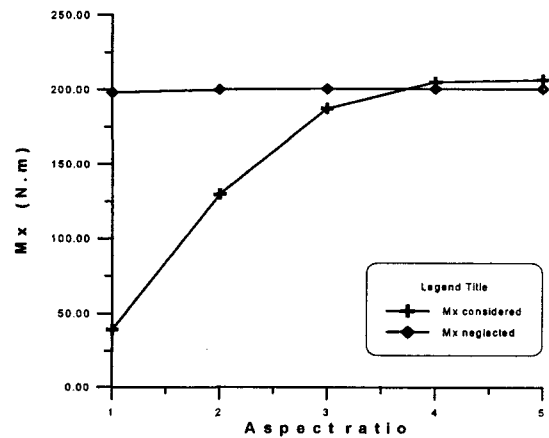


Figure 8. M_y at the center of the plate (Case SF-B)

Table 5. Moment M_y (SF) for each aspect ratio at the center of the plate ($N \cdot m$)

| Case \ Aspect ratio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Case A | 0.91955E+03 | 0.93493E+03 | 0.93771E+03 | 0.93756E+03 | 0.93750E+03 |
| Case A-N | 0.93767E+03 | 0.93751E+03 | 0.93750E+03 | 0.93750E+03 | 0.93750E+03 |
| Ratio (A/A-N) | 0.9807 | 0.9973 | 1.0002 | 1.0000 | 1.0000 |
| Case B | 0.92793E+03 | 0.91792E+03 | 0.92245E+03 | 0.92995E+03 | 0.93487E+03 |
| Case B-N | 0.93802E+03 | 0.93763E+03 | 0.93753E+03 | 0.93751E+03 | 0.93750E+03 |
| Ratio (B/B-N) | 0.9892 | 0.9790 | 0.9839 | 0.9919 | 0.9972 |

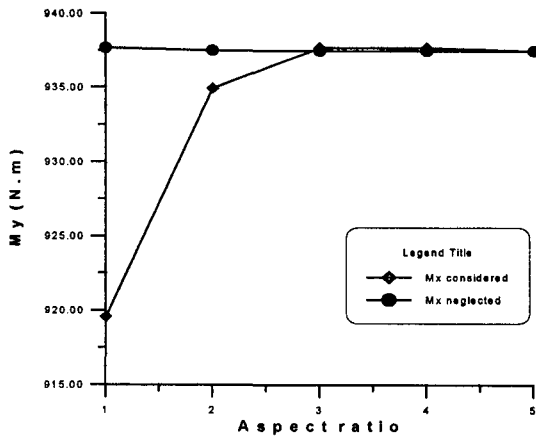


Figure. 9. My at the center of the plate (Case SF-A)

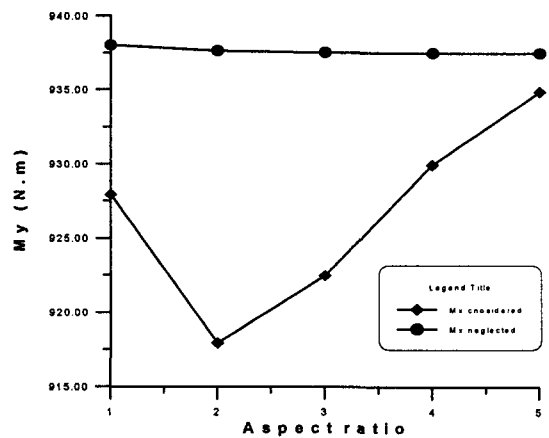


Figure. 10. My at the center of the plate (Case SF-B)

경계조건에 따른 종방향 모멘트 M_x 항의 무시 효과를 살펴보면 Table 2에서는 형상비 2일 때 사변단순지지된 $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ 의 적층판일 경우 평형방정식에서 종방향 모멘트인 M_x 항의 영향을 무시한 경우에 대한 고려한 경우의 M_x 값의 비율이 1.0961인것에 반해, Table 4의 양단단순-타단자유인 경우는 1.028로 수렴정도가 더 정확한 것을 알 수 있다. M_y 의 값도 동일조건에서 사변단순지지인 경우 Table 3에서는 1.0348, 양단단순-타단자유인 경우에는 Table 5에서 0.9973으로 수렴정도가 양단단순-타단자유지지의 경우가 더 정확하게 수렴됨을 알 수 있다.

보강재의 보강방향에 관한 영향을 살펴보면 경계조건을 양단단순-타단자유, 형상비가 3일때를 기준으로 살펴보면 M_x 의 경우 Table 4에서 $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ 에서는 1.0043, $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ 인 경우에는 0.9350으로 $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ 의 경우의 수렴정도가 더 정확함을 알 수 있다. M_y 의 경우에도 마찬가지로 Table 5에서 $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ 에 대해 1.00, $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$ 인 경우에는 0.9839로 $[90^\circ, 0^\circ, 90^\circ]$ 인 경우가 더 정확하게 수렴함을 알 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 특별직교 이방성 적층복합판의 형상비 증가에 따른 종방향 모멘트 M_x 의 평형방정식에 대한 영향의 무시효과를 연구하기위해 사변 단순지지, 양단지지 타단 자유인 경계조건을 갖는 적층판에 대한 수치해석을 수행하였다. 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향이 무시될때 일반 계산시의 행렬에 비해 2/3 크기인 행렬로 감소되어 계산 수행 시간도 상당히 단축되었다. $[90,0,90]$ 적층형태의 경우 형상비가 2이상이면, 평형방정식에 대한 M_x 의 영향을 무시할 수 있음이 증명되었다. 그리고 $[0,90,0]$ 의 경우에는 약간의 수렴하는 차이는 있으나 역시 형상비가 증감함에 따라 종방향 모멘트를 무시한 경우 결과값이 고려한 경우의 결과값에 수렴되어 감을 알 수 있었다. 경계조건과 보강재 보강방향에 따른 종방향 모멘트 M_x 항의 무시효과에 대한 결과값들이 주어졌다.

참 고 문 헌

- [1] Kim, D. H. (1995), Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, Published by E&FN SPON, Chapman & Hall, London.
- [2] Kim, D. H., "The Effect of Neglecting Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967
- [3] Kim, D. H., TRIDIAGONAL SCHEME TO SOLVE SUPER LARGE SIZE MATRICES BY THE USE OF COMPUTER, Journal of Korean Society of Civil Engineers (K.S.C.E.), Vol 15-1, 1967.
- [4] Kim, D. H., A SIMPLE METHOD OF ANALYSIS FOR THE PRELIMINARY DESIGN OF PARTICULAR COMPOSITE LAMINATED PRIMARY STRUCTURES FOR CIVIL CONSTRUCTION, Journal of Material Processing Technology Vol. 55, Elsevier, London, 1995, pp 242-248.
- [5] 이세진, "特別直交 異方性 積層 複合板의 形狀比 增加에 따른 從方向 모멘트의 無視效果" 석사 학위 논문, 강원대학교, 1998, 2.