

## 교량의 실측 가속도 자료의 적분을 통한 변위 응답 추정에 대한 연구

### A Study on the Estimation of the Displacement Responses by the Integration of Acceleration Data of Bridges

정진환\*      계만수\*\*  
Cheung, Jin Hwan    Gye, Man soo

---

#### ABSTRACT

It is important to measure the dynamic behaviors of the structures and determine the safety and serviceability of those structures by analyzing the gathered data.

It is very much easier and more economical to measure the accelerations than displacements in order to obtain the dynamic responses of a structure, but the physical meanings of the displacements are more clear and definite than those of accelerations.

In this study, the algorithm which can evaluate the displacements from the measured acceleration data by integration are developed. The calculated displacements are compared with measured data through the laboratory test and the results represent good agreements. This algorithm is applied to the data of real structures.

---

#### 1. 서론

현재 대형 교량의 상당수는 교통량의 증가와 환경오염 그리고 유지관리의 미흡 등으로 인해 심하게 노후되어 안전성이 저하되어 가고 있다. 구조물의 붕괴사고가 발생함에 따라 최근 구조물의 유지관리에 대한 필요성과 관심이 고조되고 있다. 따라서 구조물의 거동 특성을 계측하고 이를 분석하여 구조물의 건전도를 판단하는 연구가 국내외에서 활발히 수행되고 있다.<sup>[1]</sup>

구조물의 동적 특성을 측정하는데 주로 변위와 속도 및 가속도 측정에 초점을 둔다. 계측된 변위 데이터는 물리적 의미가 명백하지만 계측에 어려움이 많다. 예로서 협곡, 바다 등에서 변위계의 지점을 설치하는데 어려움이 있고 도로에서는 지점설치 때문에 교통통제에 불편이 있으며 비용이 비교적 많이 소요된다. 가속도 데이터는 물리적 의미가 명백하지 않지만 변위 계측보다 훨씬 용이하고 경제적이다.

본 연구에서는 변위 계측보다 훨씬 용이하고 경제적인 가속도 응답을 계측하고 가속도 데이터를 적분하여 변위 응답을 추정해 내는 알고리즘을 개발하고, 실내 실험을 통하여 이를 검증하고, 실제교량에서 계측된 가속도 데이터를 이용하여 변위 응답을 추정하고 실측된 변위 응답과 비교분석 하였다.

---

\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 교수

\*\* 부산대학교 공과대학 토목공학과 석사과정

## 2. 이산신호 처리의 이론 배경

### 2.1 이산신호와 이산신호 시스템

신호(signal)란 일반적으로 물리적 시스템의 상태(state) 또는 거동(behavior)에 관한 정보를 전하는 기능을 가진 함수라고 정의할 수 있다. 신호는 연속시간신호(continuous-time signal) 또는 아날로그신호(analog signal)와 이산시간신호(discrete-time signal) 또는 디지털신호(digital signal)로 분리할 수 있다.<sup>[2]</sup> 일상 생활에서 우리가 취급하고 있는 신호는 대부분 연속신호이지만, 이를 컴퓨터에 사용할 수 있게 하려면 연속신호를 이산신호로 변환해야 한다.

이산시간신호를 수식으로 표현하면 수열이 된다. 수열  $x$ 을 다음과 같이 쓴다.

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

여기에서,  $n$ 는 정수이며  $x[n]$ 은 수열의  $n$ 번째 수를 나타낸다. 이와 같은 수열은 아날로그 신호의 주기적 샘플링(sampling)으로 생기는 경우가 많으며, 이때 수열의  $n$ 번째 값  $x[n]$ 은 아날로그 신호  $x_0(t)$ 의 시각  $nT$  있어서의 값이다. 즉,

$$x[n] = x_0(nT), \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.2)$$

시간  $T$ 를 샘플링주기(sampling period), 그 역수  $T^{-1}$ 을 샘플링 주파수  $f_s$  (sampling frequency)라 한다.

이산시간신호 및 시스템 이론에서 중요한 역할을 하는 기본적인 수열로는 단위 샘플수열(unit sample sequence), 단위 계단수열(unit step sequence), 사인수열(sinusoidal sequence) 및 지수수열(exponential sequence)이 있다.

연속시간과 이산시간인 경우 고주파와 저주파에 대한 해석이 약간 다르다. 이산시간인 사인신호 및 복소지수 신호의 경우  $\omega_0 = 2\pi k$  ( $k$ 는 정수) 근처의  $\omega_0$  값은 저주파(상대적으로 완만한 진동)라 부르고,  $\omega_0 = (\pi + 2\pi k)$  ( $k$ 는 정수)  $\omega_0$  값은 고주파(상대적으로 신속한 진동)라 부른다.<sup>[2]</sup>

이산시간 시스템을 수학적으로 정의하면 값이  $x[n]$ 인 입력수열을 값이  $y[n]$ 인 출력수열로 사상하는 변환 또는 작용소이다. 이것은 식으로

$$y[n] = T_r\{x[n]\} \quad (2.3)$$

와 같이 표현할 수 있다. 시스템은 변환  $T_r\{\cdot\}$ 의 성질에 주어지는 구속조건에 의해서 무기억 시스템, 선형시스템 및 시불변 시스템으로 분류할 수 있다.<sup>[2]</sup>

선형시불변(Linear Time Invariant : LTI) 시스템은 그 선형성과 시불변성 및 안정성과 인과성 때문에 신호처리에 많이 응용된다. 선형시불변 시스템의 입력이  $x[n]$ 이라면 출력  $y[n]$ 은 선형성과 시불변성에 따라 다음 형식으로 표현될 수 있다.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (2.4)$$

여기서,  $h[n-k]$ 는 임펄스  $\delta[n-k]$ 의 응답이다. 식 (2.4)를 컨볼루션(convolution)이라 부르기도 한다.

### 2.2 신호의 나이퀴스트 샘플링 정리(Nyquist Sampling Theorem)

연속신호  $x_c(t)$ 가 대역제한 신호로서 푸리에변환

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \Omega_N \text{ 일 때} \quad (2.5)$$

이라 한다. 이 때  $x_c(t)$ 가

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N \quad (2.6)$$

을 만족하면  $x_c(t)$ 는 그의 샘플  $x[n] = x_c(nT)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 에 의해서 일의적으로 결정된다.  $\Omega_N$ 를 나이퀴스트 주파수(Nyquist frequency), 샘플링 주파수가 그보다 더 커야 된다는  $2\Omega_N$ 을 나이퀴스트 속도(Nyquist rate)라 부른다.<sup>[2]</sup>

연속신호를 나이퀴스트 속도보다 빠른 주파수로 추출해야 신호를 재현할 때 엘에싱(aliasing)을 방지할 수 있다.

### 2.3 디지털 신호의 필터링(filtering)

신호처리의 가장 기본적인 목적은 본래의 신호에서 잡음을 제거하는 것이다. 관측된 신호에서 잡음을 제거하는 과정을 필터링(filtering) 혹은 필터처리라고 하고 이러한 처리를 하는 장치를 일반적으로 필터라고 부른다.

시간 영역상의 필터는 IIR(Infinite Impulse Response)와 FIR(Finite Impulse Response)로 분류할 수 있다. IIR는 계산량이 적은 장점이 있으나 위상차가 비선형으로 될 수 있고 FIR는 위상차를 선형으로 설계할 수 있으나 필터의 차수가 커져서 계산량이 많아지는 단점이 있다.<sup>[3]</sup>

주파수 영역상의 필터는 시간 영역상의 필터의 단점을 보완할 수 있다. 선형시불변 시스템에 속하는 중요한 시스템으로 주파수 응답이 어떤 주파수 영역에서는 1이고 그 밖의 주파수에서는 0인 이상주파수 선택필터(ideal frequency-selective filter)가 있다. 이상주파수 선택필터는 또 저역통과 필터(low pass filter), 고역통과 필터(high pass filter), 대역저지 필터(band stop filter) 그리고 대역통과 필터(band pass filter) 등으로 나눌 수 있다.

### 2.4 푸리에 변환

푸리에 변환(Fourier transform)은 임의의 연속신호  $f(t)$ 를 주파수 영역의 표현으로 다음과 같이 변환할 수 있다.<sup>[4]</sup>

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.7)$$

$f(t)$ 의 푸리에 변환  $F(\omega)$ 가 주어졌을 경우에는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.8)$$

이와 같은 관계를 역 푸리에 변환(Inverse Fourier Transform)이라 한다.

$F(\omega)$ 가 존재하기 위한 조건은 주기함수  $f(t)$ 가 Dirichlet 조건을 만족해야 한다.

[ Dirichlet 조건 ]

주기함수  $f(t)$ 가

(가) 불연속점을 가져도 좋으나 1주기 사이에 그 수는 유한개일 것

(나) 파형이 많은 변동을 하여도 좋으나 1주기 사이에 극대, 극소점의 수는 유한개일 것

(다)  $\int_0^T |f(t)| dt$ 가 유한한 값을 가질 것.

$F(\omega)$ 는 일반적으로 복소수이므로

$$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (2.9)$$

와 같이 표시된다. 여기에서  $|F(\omega)|$ 을  $f(t)$ 의 진폭스펙트럼(magnitude spectrum)이라 하고,  $\phi(\omega)$ 를  $f(t)$ 의 위상스펙트럼(phase spectrum)이라고 한다.

이산 푸리에 변환(Discrete Fourier Transform: DFT)은 단순히 푸리에 변환 결례를 디지털 전산기에서 작동하도록 고친 것이다. 그래서 이산 푸리에 변환은 연속 푸리에 변환의 근사이다.<sup>[5]</sup>

$N$ 개의 이산신호  $x(n)$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ )이 주어질 때  $x(n)$ 의 이산 푸리에 변환은 다음과 같이 정의 된다.

$$X(k) = D[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

그리고 이산 역 푸리에 변환은

$$x(n) = D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

와 같이 표시된다.

고속 푸리에 변환(Fast Fourier Transform: FFT)은 이산 푸리에 변환(DFT)의 공식에서 반복계산을 제거함으로써 이산 푸리에 변환을 보다 빠르게 산출하는 하나의 알고리즘(algorithm)으로 볼 수 있다. 데이터의 양이 많으면 많을수록 고속 푸리에 변환이 그 위력을 발휘한다.<sup>[3]</sup>

## 2.5 가속도 적분

속도와 변위는 가속도 기록을 적분하여 구할 수 있다. 적분 영역은 시간영역과 주파수영역이 있는데 주파수영역에서 적분하면 계산량이 적고 필터링하기 쉬운 장점이 있다.

교량이나 구조물에서 계측되어 얻은 가속도 이산 신호를  $a(n)$ 이라고 하면 이에 대한 FFT 결과는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$A(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) e^{-j\omega n} \quad (2.12)$$

속도와 변위에 대한 FFT 결과는 푸리에 변환의 성질을 이용하여 적분하면

$$V(\omega) = \frac{A(\omega)}{i\omega} \quad (2.13)$$

$$D(\omega) = \frac{A(\omega)}{-\omega^2} \quad (2.14)$$

를 얻을 수 있다. 또한, 식 (2.13)과 (2.14)를 역 변환하여 시간 영역에서의 속도와 변위를 다음으로 얻을 수 있다.

$$v(k) = \sum_{\omega=0}^{N-1} V(\omega) e^{jk\omega} \quad (2.15)$$

$$d(k) = \sum_{\omega=0}^{N-1} D(\omega) e^{jk\omega} \quad (2.16)$$

### 3. 실내 실험

진동 실험을 실행하는 주된 이유는 시스템의 고유진동수, 모드(mode) 형상, 감쇠비 등 동적 특성을 추정하여 구조물의 안전도를 평가하는데 있는 것이다.

#### 3.1 실험 개요

실내 실험에서는 Steel Plate를 반력벽(反力壁)에 고정시켜 캔틸레버(Cantilever)로 만들고 진동실험을 수행하였다(그림3.1 참조). 여기에서 측정된 항목은 가속도와 변위의 시간이력이다.

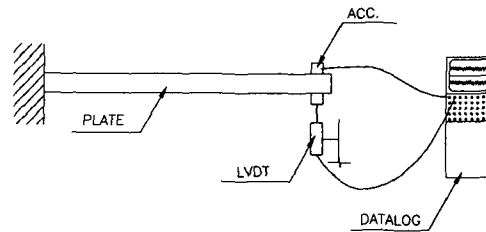


그림 3.1 실험 장비

#### 3.2 신호 처리

원래 진동과 유사한 신호의 재현을 위한 샘플링 진동수를(sampling frequency)을 찾아내기 위하여 실내 실험 구조물에 대해서는 상용 유한요소 프로그램 SAP2000을 이용하여 고유진동수를 제3모드(mode)까지 찾아내었으며 이를 검증하기 위하여 이론적 해석공식으로도 계산하였다.<sup>[5]</sup>

프로그램으로 계산한 고유진동수와 이론치과의 비교는 표3.1에 나타내었으며 비교결과를 보면 제1모드에 대한 오차가 1.56%밖에 되지않아 유한요소 프로그램으로 구한 고유진동수가 정확하다고 판단하였다. 나이키스트 샘플링 정리를 검정하기 위해서 제3모드 고유진동수의 약 0.3배(100Hz), 0.6배(200Hz), 1.0배(300Hz), 1.5배(450Hz), 2.0배(600Hz), 3.0배(900Hz)로 샘플링 하였다. 실내 계측된 가속도를 FFT하고 3Hz에서 300Hz까지의 주파수 영역에서 필터링 하였으며 이를 주파수 영역에서 이중 적분하고 역푸리에 변환을 실행하여 변위를 계산하였다.

표 3.1 유한요소 프로그램과 이론치 비교

단면  $7.5\text{ cm} \times 0.9\text{ cm} \times 68\text{ cm}$  (단위: Hz)

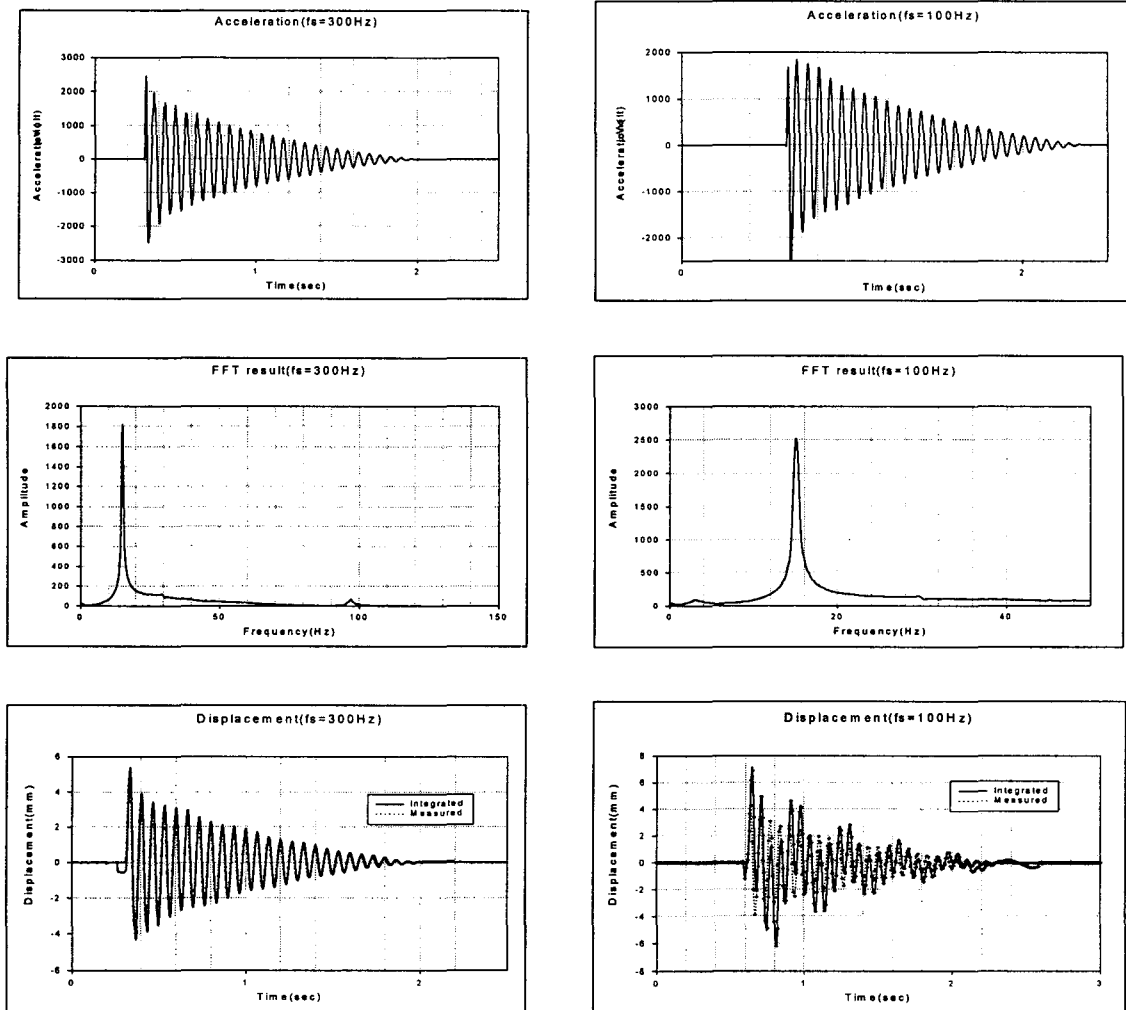
모드	해석치	이론치	오차(%)
제1모드	15.78	16.03	1.56
제2모드	97.11	100.44	3.32
제3모드	267.46	281.27	4.91

단면적:  $6.75\text{ cm}^2$ , 탄성계수:  $2.04 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ .

### 3.3 결과 분석

샘플링 주파수를 고유진동수 제2모드 진동수의 2배 이상으로 할 때 변위 계산값과 측정값이 잘 일치하는 것을 볼 수 있고 FFT 분석결과에서 제2모드 진동수를 찾아낼 수 있는 반면에 제2모드 진동수의 1.0배로 샘플링 할 때 계산된 변위 응답은 많이 왜곡되며 FFT 분석결과에서도 제2모드 주파수를 찾아낼 수 없다.

계측된 가속도 응답, FFT 결과 및 계산된 변위와 계측된 변위 응답의 비교는 아래와 같다.



### 4. 실제 교량의 가속도 측정자료 적분결과

스위스의 EMPA(Swiss Federal Laboratories for Materials Testing and Research)에서 224개의 교량을 실험한 결과 기본진동수는 1.23Hz에서 14.0Hz 사이의 값으로 보고 되었다.<sup>[1]</sup>

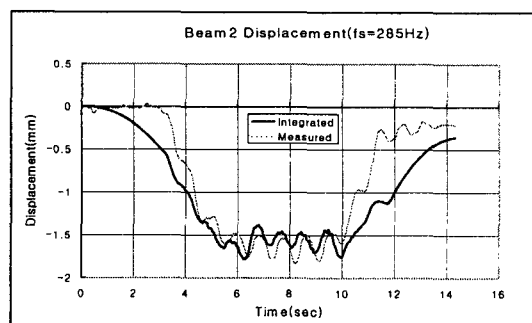
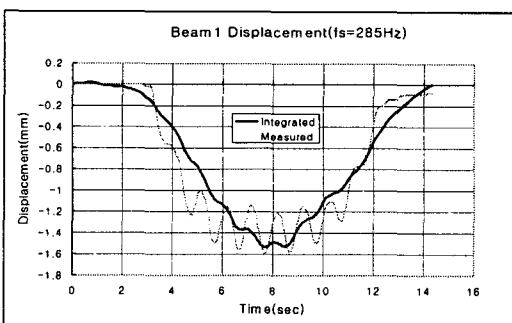
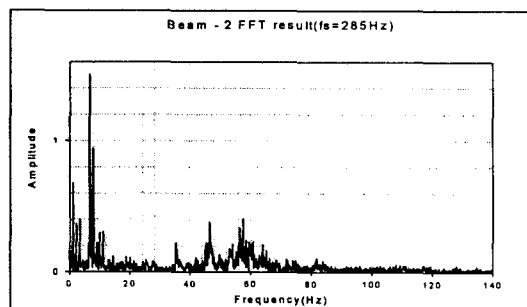
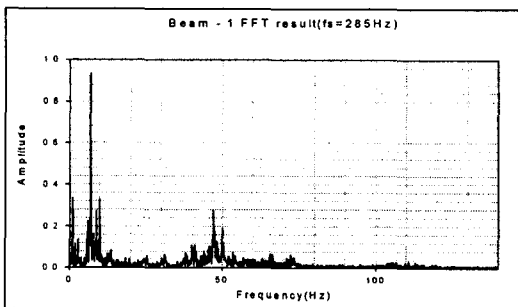
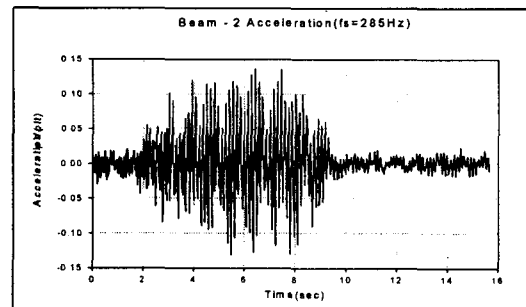
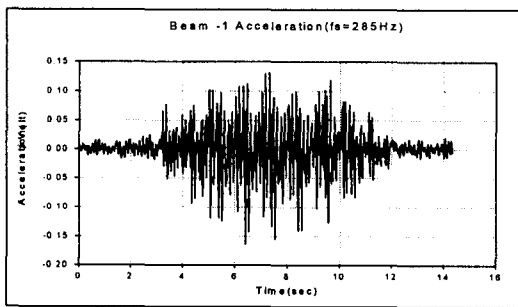
본 연구에서는 부산지하철 1호선 고가부분 PC Beam에 대한 동적 재하실험에서 측정된 자료를 이용하였다. 계측 장비로서는 가속도계(Accelometer)와 변위계(LVDT)를 사용하였다.

당시 교량의 고유진동수를 찾아내기 위하여 상용 유한요소 프로그램 Algor super SAP을 이용하여 고유진

동수를 계산하였고, 모델링(modeling)부터 계산된 수직방향의 제1모드 및 제2모드의 고유진동수는 5.96Hz와 23.07Hz이다.<sup>[6]</sup> 당시 측정할 때의 샘플링 주파수는 285Hz이다. 계측자료의 FFT 분석에서 얻은 제1모드 고유진동수는 6.8Hz이다.

계측된 교량 가속도 데이터를 FFT하고 이를 直流部分인 常數項과 100Hz이상인 고주파수 부분을 필터링 하였다. 진동수 영역에서 이중 적분하고 역 푸리에 변환을 실행하여 변위를 계산하였다. 어떤 계산결과는 오차가 크게 나타난다. 이것은 당시 측정기계의 精度상의 오차와 계측자의 경험미숙으로 인한 것이고 또 본 연구에서 고려되지 않은 사항 때문에 생긴 신호처리상의 오차도 있다고 생각된다.

계측된 가속도 응답, FFT 결과 및 계산된 변위와 계측된 변위 응답의 비교는 아래와 같다.



## 5. 결 론

본 연구에서는 경제적이고 용이한 구조물의 가속도 측정을 통하여 시스템의 고유진동수를 찾아내고 가속도 데이터를 두 번 적분하여 변위를 구하는 알고리즘을 개발하였고 이를 검증한 실험을 실험실에서 수행하였으며 실제 교량계측자료에 응용하여 검증하였다. 수행한 결과 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

1. 연속시간 신호를 이산화하고 본래의 신호로 재현하기 위해서는 나이퀴스트 진동수(Nyquist frequency)의 두 배 이상의 진동수로 표본 추출하여야 한다.
2. 실내 동적 실험에서 얻은 가속도 응답을 두 번 적분하여 변위 응답을 추정 해냈고 실측 변위 응답과 비교했을 때 잘 일치하는 것으로 나타났다.
3. 프로그램에서 필터링 할 때 저주파수의 필터링 영역을 적절히 선택해야만 잡음을 정확히 제거할 수 있다. 본 연구에서 실내실험 구조물에 대하여 저주파수 필터링 영역을 제1모드 주파수의 약 20% 크기의 주파수로 선택하였다.

실제교량을 포함한 복잡한 구조계에 대한 응용과 저주파수 필터링 영역에 대한 추가 연구가 필요하다.

## 참고문헌

1. 이선구, "동적 모니터링을 이용한 정상교통상태 교량의 유지관리체계에 관한 연구", 국민대학교 토목 환경공학과, 박사논문, 1995.
2. 임제탁 이두수 공역, "이산신호처리", 대영사, 1998.
3. 이채욱, "디지털 신호처리" 기초와 응용, 청문각, 1998.
4. 광문규 역, "진동학의 기초", 반도출판사, 1979.
5. Ray W.Clough, "Dynamics of Structures" 1993.
6. 김형석, "PC主桁으로 構成된 地下鐵高架部分의 合理的인 構造解析 모델에 관한 研究", 부산대학교 토목공학과, 석사논문, 1998.
7. E.Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform", 1974.
8. 鄭慧善 역, "노이즈 防止와 對策", 성안당, 1973.