

**보강재 보강 형태에 따른 특별직교 이방성 적층복합판의
고유진동수에 대한 종방향 모멘트 무시효과**
**The Effect of Neglecting the Longitudinal Moment Terms on
the Natural Frequency of Laminated Plates
with Increasing Aspect Ratio**

김 덕 현* 김 경 진** 이 정 호*** 박 정 호****
Kim Duk-Hyun Kim Kyung-Jin Lee Jung-Ho Park Jung-Ho

ABSTRACT

The method of vibration analysis used is the one developed by the senior author. He developed and reported, in 1974, a simple but exact method of calculating the natural frequency of beam and tower structures with irregular cross-sections and attached mass/masses. Since 1989, this method has been extended to two-dimensional problems with several types of given conditions and has been reported at several international conferences. This method uses the deflection influence surfaces. The finite difference method is used for this purpose, in this paper. In order to reduce the pivotal points required, the three simultaneous partial differential equations of equilibrium with three dependent variables, w , M_x , and M_y , are used instead of the one fourth order partial differential equation. By neglecting the M_x terms, the size of the matrices needed to solve the resulting linear equations are reduced to two thirds of the "non-modified" equations.

1. 서 론

최근 산업의 발전에 따라 구조물이 대형화 되어 감에 따라 건설비용의 증가 및 지진시 더 큰 관성력을 받는등 여러 문제점을 발생시키고 있다. 이에따라 구조물 경량화와 보다 효과적인 보수·보강재료로서 첨단 복합재료의 사용이 절실히 요구되고 있으며, 전세계적으로 첨단복합재료를 건설분야에 응용하고자 하는 노력들이 활발하게 진행되고 있다. 실례중 하나로 San Diego에 세

* Korea Composites 소장
** 충주대학교 토목공학과 교수
*** 강원대학교 토목공학과 박사과정
**** 강원대학교 토목공학과 석사과정

계 최초의 차량용 100% 복합재료 사장교에 대한 시방서 연구등이 진행중이다. 이 교량은 450feet 지간에 60feet의 교폭으로 계획되어 있는데 이사업을 위해 대학 및 섬유보강 복합재료를 군사용으로 사용해온 7개의 군수 산업체가 Advanced Composite Technology Transfer(ACTT)란 이름의 콘소시엄을 이루어 진행하고 있다.

불규칙 단면을 갖는 보와 타워의 제 1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 방법은 Kim, D.H.(1974)에 의해 발표되었다. 최근 이방법은 복합재료판을 포함하는 2차원 문제로 확장되었으며, 전단 변형의 영향에 따른 다양한 경계조건을 갖는 복합재료판에도 적용되었고, 미국 토목학회의 1990년 제4차와 1996년의 제8차 재료관련회의를 포함한 여러 국제 학술 회의에서 발표되었다.

토목·건축구조물은 그 경계조건의 복잡함을 갖고 있으며, 이러한 구조물에 관한 정확한 해석해를 구한다는 것은 상당한 어려움이 있다. 이 문제를 보다 효과적으로 해결하기 위하여 유한차분법을 사용 하였다. 그러나 유한차분법은 매트릭스의 크기가 너무나 방대해져 계산의 번잡함과 프로그램 수행 시간이 길어지는 등의 문제점을 발생시킨다. 만일 평형방정식중 종방향 모멘트항인 M_x 의 영향이 무시될수 있다면 이러한 문제점을 줄일 수 있다.

따라서 이 논문에서는 표제의 연구 결과 값들의 비교·고찰을 통해 평형방정식에 대한 종방향 모멘트인 M_x 의 영향이 무시될 수 있는 범위를 제시함으로써 실무자들의 구조물 설계 및 해석에 도움을 주고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 유한차분법

특별직교 복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐 w 에 관한 4차의 단일 미분항을 갖는다. 따라서 중심차분을 사용한다 하더라도 소요되는 pivotal point의 수가 5개가 되는 고로, 가상점을 소거시키는데 계산상의 번잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 3개의 종속변수 w , M_x , M_y 를 가진 2차 연립편미분 방정식으로 나타낼 수 있다. 그래서 이 3개의 방정식을 풀게되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한번에 구할 수 있는 장점이 있다. 차분법에 의한 matrix는 경계조건 등을 포함하고 방대한 크기가 되는데, tri-diagonal matrix해법으로 간단히 계산될 수 있다.

특별직교 이방성 적층 복합판의 지배방정식은 다음과 같이 4차단일 미분항을 갖는 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (1)$$

여기서 $D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$, $D_3 = (D_{12} + 2D_{66})$ 이다.

식(1)을 차분식으로 적용할 때 중심차분을 사용한다 하더라도 소요되는 pivotal point의 수가 5개가 되는 고로, 가상점을 소거시키는데 계산상의 번잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 3개의 종속변수 w , M_x , M_y 를 가진 다음과 같은 2차 연립편미분 방정식으로 대치하여 나

타낼 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4)$$

이 3개의 방정식을 풀게 되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한 번에 구해낼 수 있는 장점이 있다. 위의 식(2), (3), (4)에서 종방향 모멘트가 무시된다면 계산의 번잡함을 줄이고 매트릭스 계산시 수렴속도를 단축시킬 수 있을 것이다. 종방향 모멘트 M_x 가 무시된 방정식은 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$-4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (5)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6)$$

2개의 미지 종속변수 w , M_y 를 구하기 위해 식(5), (6)를 전형적인 구간과 경계구간에 대하여 y 방향으로 차분식을 세운다. 그리고 차분식을 MI 개의 x 방향 선으로 구성된 전체 판의 각각의 선에 대해 $2MI$ 개의 matrix 방정식으로 나타낼 수 있고, tri-diagonal matrix해법을 사용하여 matrix 방정식을 풀면 (x,y) 점의 w , M_y 값을 구할 수 있다. M_x 는 w 로부터 구한다.

2.2 진동이론

이 논문에서 사용된 진동이론은 처짐의 영향면을 필요로 하는데, 어떠한 방법이라도 사용되어질 수 있다. 이 논문에서는 유한 차분법(F.D.M.)이 사용되었다. 고유진동수에 대한 간단하고도 정확한 방법은 1974년 김 덕현에 의해 발표되었다. 이 진동이론의 기본개념은 다음과 같다.

어떤 점의 최대 처짐 크기는 다음과 같이 임의로 주어진다.

$$w(i, j)(1) = W(i, j)(1) \quad (7)$$

여기서 (i, j) 는 고려한 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대 진폭에 대응하는 동적 힘은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$F(i, j)(1) = m(i, j) [\omega(i, j)(1)]^2 w(i, j)(1) \quad (8)$$

이 힘에 의해 일어나는 새로운 변위는 F 의 함수이고 다음 식과 같이 쓸 수 있다

$$\begin{aligned}
w(i,j)(2) &= f \{ m(i,j) [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \\
&= \sum \Delta(i,j,k,l) \{ m(i,j) [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \}
\end{aligned} \tag{3}$$

여기에서 $\Delta(i,j,k,l)$ 는 처짐에 대한 영향 계수이다.

공명 상태에서 구조 부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음 식의 조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1) / w(i,j)(2) = 1 \tag{9}$$

식(4)의 방정식으로 부터 (i,j)의 각 점에서의 $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유 진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은 값이 모든(i,j)점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 두 번째 cycle에서의 처짐은 다음 식과 같이 구해질 수 있다.

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j) [\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \tag{10}$$

식(10)에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. 복합재료 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지 조건을 가진 판의 경우 이 판을 몇 개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 이 방법은 구조물의 고유 진동 해석을 위해 매우 정확하고 간편한데 이 방법의 정확성은 처짐 영향계수의 정확성에 비례한다.

3. 수치해석

수치해석에서 고려한 대상 구조물은 Figure 1과 Figure 2에 나타낸 것과 같은 사변 단순 지지(SS)와 양단단순-타단자유(SF)인 특별직교 이방성 적층복합판이다. 적층판의 적층형태 및 보강재 보강 방향은 $[90^0/0^0/90^0]$ 와 $[0^0/90^0/0^0]$ 형태이다. 형상비 변화에 따른 고유진동수에 대한 중방향 모멘트 M_x 의 무시효과를 연구하기 위해 적층복합판의 형상을 $a=5m$, $b=5m$ 를 기준으로 하여 형상비를 $c=a/b=1 \sim c=a/b=5$ 까지 변화시켜 수치해석을 수행하고 고찰하였다. 하중조건은 적층판의 자중만을 재하 하였으며, 물성값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
E_1 &= 67.36 \text{ GPa}, & E_2 &= 8.12 \text{ GPa}, & \nu_{12} &= 0.272, & \nu_{21} &= 0.0328, & G_{12} &= 3.0217 \text{ GPa}, \\
\text{Uniform Load} &= 300 \text{ N/m}^2, & \text{적층수 } r &= 1, & h_o &= 0.005m
\end{aligned}$$

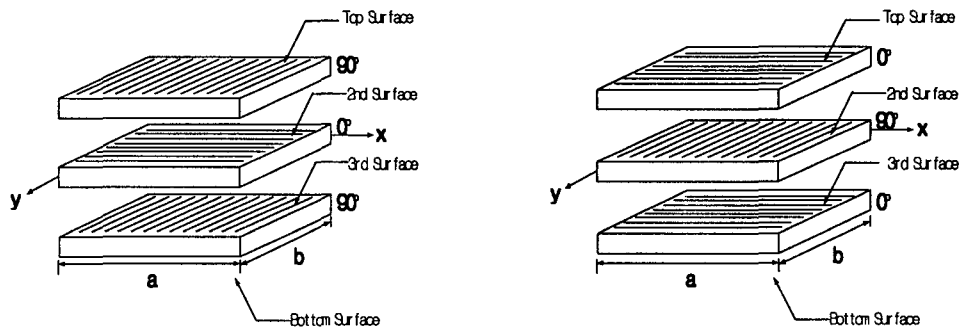


Figure. 1. Special orthotropic laminated plate

종방향 모멘트 M_x 항의 평형방정식에 대한 영향이 무시되었을 때, 모멘트에 미치는 영향을 연구하기 위해 각각의 적층복합판 및 조건을 다음과 같은 기호로 분류하였다.

Case A : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case A-N : $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

Case B : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 고려한 경우.

Case B-N : $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트 M_x 항을 무시한 경우.

각각의 Case에 대한 적층복합판 휨강성 D_{ij} 를 계산한 결과값들을 Table 1에 나타내었다. 각각의 Case에 따른 수치해석 결과값들을 Table 2~Table 5에 나타내었다. Figure 3 ~Figure 6은 형상비 증가에 따른 M_x 와 M_y 의 결과값을 그래프로 나타낸 것이다.

Table 1. Flexural stiffnesses of the plate

Case \ Stiffness	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$
D_{11}	2926.95	18492.90
D_{22}	18492.90	2926.95
D_{12}	626.77	626.77
D_{66}	849.85	849.85

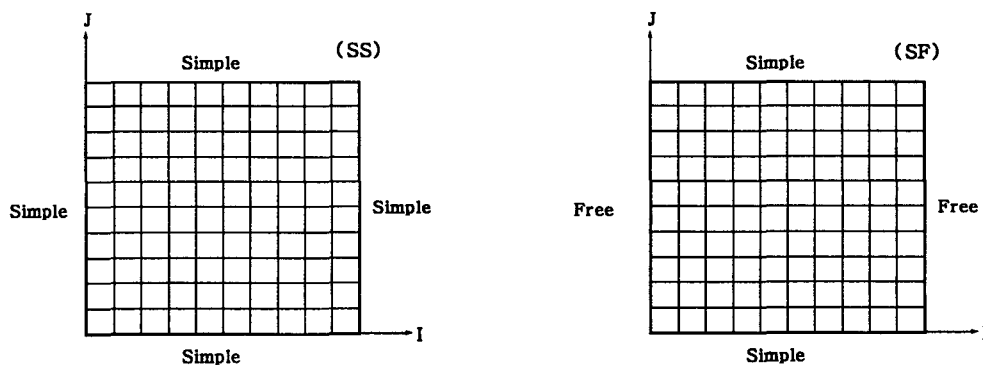


Figure 2. Node point on special orthotropic laminated plate($c=a/b=5m/5m=1$)

Table 2. Natural frequency of SS case with [90, 0, 90] orientation

Aspect ratio (a / b)	Natural Frequency (rad/sec)		Case A / Case A-N
	Case A	Case A-N	
1	0.2275405E+00	0.2076138E+00	1.10
2	0.1365434E+00	0.1324949E+00	1.03
3	0.1069528E+00	0.1049684E+00	1.02
4	0.9291963E-01	0.9166656E-01	1.01
5	0.8216897E-01	0.8129858E-01	1.01

Table 3. Natural frequency of SS case with [0, 90, 0] orientation

Aspect ratio (a / b)	Natural Frequency (rad/sec)		Case B / Case B-N
	Case B	Case B-N	
1	0.2275405E+00	0.1168376E+00	1.95
2	0.7200758E-01	0.6117067E-01	1.18
3	0.4883640E-01	0.4567690E-01	1.07
4	0.3965184E-01	0.3799486E-01	1.04
5	0.3430900E-01	0.3321880E-01	1.03

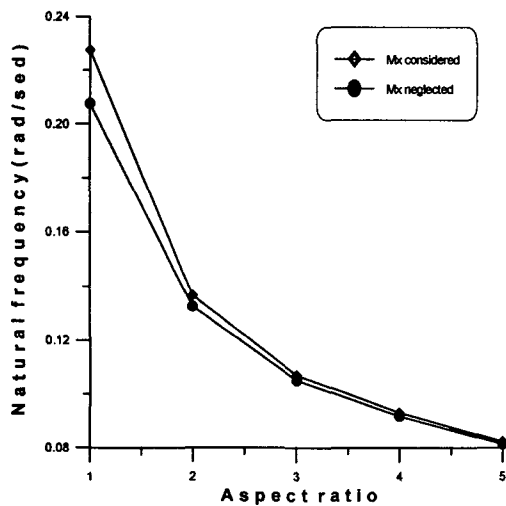


Figure. 3 Natural frequency (SS), [90, 0, 90]

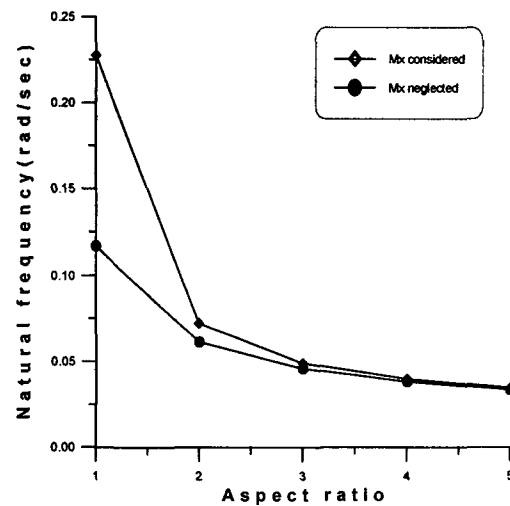


Figure. 4 Natural frequency (SS), [0, 90, 0]

Table 4. Natural frequency (SF), [90, 0, 90]

Aspect ratio (a / b)	Natural Frequency (rad/sec)		Case A / Case A-N
	Case A	Case A-N	
1	0.1632285E+00	0.1639302E+00	9.96E-01
2	0.1184063E+00	0.1186737E+00	9.98E-01
3	0.9753442E-01	0.9768371E-01	9.98E-01
4	0.8484542E-01	0.8494364E-01	9.99E-01
5	0.7609317E-01	0.7616400E-01	1.00E-00

Table 5. Natural frequency (SF), [0, 90, 0]

Aspect ratio (a / b)	Natural Frequency (rad/sec)		Case B / Case B-N
	Case B	Case B-N	
1	0.6497209E-01	0.6522263E-01	9.96E-01
2	0.4706217E-01	0.4721486E-01	9.97E-01
3	0.3877412E-01	0.3886333E-01	9.98E-01
4	0.3373641E-01	0.3379447E-01	9.98E-01
5	0.3025968E-01	0.3030139E-01	1.00E-00

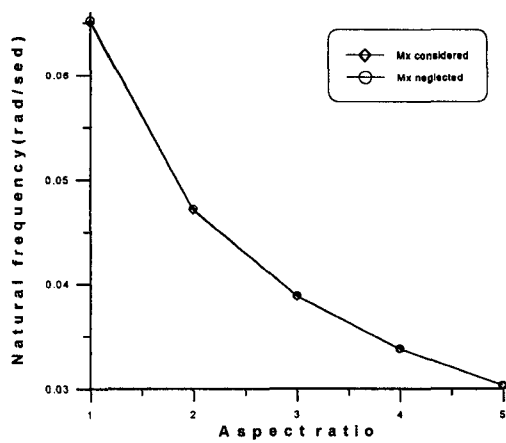


Figure. 5 Natural frequency (SF), [90, 0, 90]

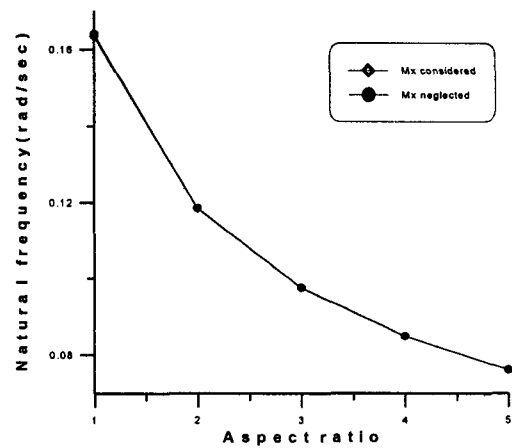


Figure. 6 Natural frequency (SF), [0, 90, 0]

고유진동수에 대하여 종방향 모멘트 M_x 항의 무시효과에 대한 영향을 보강재 보강 형태에 따라 살펴보면 사변 단순 지지된 경우 Table 2에서 [90,0,90], 형상비 2일 때의 비율이 1.03이고 Table 3에서 [0,90,0], 형상비 2일 경우 비율이 1.18로 보강재 보강형태가 [90,0,90]인 경우가 보다 더 정확하게 수렴되어 감을 알 수 있다. 또한 경계조건이 양단단순-타단자유인 경우에도 Table-4의 [90,0,90], 형상비 2일 때 0.998 Table 5의 [0,90,0], 형상비 2일 때 0.997로 보강형태가 [90,0,90]일 때가 보다 더 정확하게 수렴되어 짐을 알 수 있다.

이것은 형상비 증가에 따라 주 모멘트의 영향이 M_y 에 지배되어 보강재를 y 방향으로 더 보강된 보강형태일 때 휨에 대한 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 의 영향이 보다 더 효과적으로 무시될 수 있음을 의미한다.

4. 결 론

형상비 증가에 따라 휨에 대한 평형방정식에서 종방향 모멘트 M_x 항의 영향이 무시될 수 있는 범위를 두 가지 경우의 보강재 보강형태에 대해 제시하였다. 또한 경계조건에 따른 영향도 연구되었다. 이상의 결과로 적층판의 설계 및 해석시 형상비가 일정 비율 이상일 경우에는 휨에 대한 평형 방정식에서 종방향 모멘트 M_x 의 영향을 무시하여도 고려한 경우의 고유진동수 값에 수렴되어 짐을 알 수 있다.

이러한 연구 결과는 엔지니어들에게 보다 간편하고도 정확한 설계 및 해석 방법으로 사용될 수 있는 기초 자료로 제공된다.

참 고 문 헌

- [1] Kim, D. H., "The Effect of Neglecting Radial Moment Terms in Analyzing a Finite Sectorial Plate by Means of Finite Differences," International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967
- [2] Kim, D. H., Tridiagonal Scheme to Solve Super Large Size Matrices by the Use of Computer, Journal of Korean Society of Civil Engineers (K.S.C.E.), Vol 15-1, 1967.
- [3] Kim, D. H., A Simple Method Of Analysis For the Preliminary Design of Particular Composite Laminated Primary Structures for Civil Construction, Journal of Material Processing Technology Vol. 55, Elsevier, London, 1995, pp 242-248.
- [4] Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.
- [5] 김덕현, 이정호, 박정호, "탄성지지된 복합재료 상판의 고유진동수", 한국전산구조공학회 가을 학술발표회 논문집, 제10권 제2집(통권 제19호), 충북대학교, 1997. 10. 11, pp215-222.
- [6] 김덕현, "건물과 사회 간접 시설의 보수와 재건을 위한 복합재료", 대한토목학회지, 제 45 권 제 4호 1997. 4., pp 49-66.
- [9] 김덕현, "새로운 1000년의 건설재료(건설을 위한 복합재료)", 새로운 건설재료에 대한 강연회, 대한토목학회 강원지회, 강원대학교, 1997. 6. 20.