

## 양단단순-타단자유 지지된 적층복합판의 처짐에 대한 종방향 모멘트 무시효과

### The Effect of Neglecting The Longitudinal Moment Terms on The Deflection of Laminated Plates with a Pair of Opposite Edges Simple Supported and The Other Pair of Opposite Edges Free

김 덕 현\*      원 치 문\*\*      심 도 식\*\*\*      이 원 석\*\*\*\*  
Kim Duk-Hyun    Won Chi-Moon    Sim Do-Sik    Lee Won-Suk

---

#### ABSTRACT

The most of the design engineers for construction has academic background of bachelors degree. Theories for advanced composite structures are too difficult for such engineers and some simple but accurate enough methods are necessary. The senior author has reported that some laminate orientations have decreasing values of  $B_{16}$ ,  $B_{26}$ ,  $D_{16}$ , and  $D_{26}$  stiffnesses as the ply number increases. Such plates above behave as special orthotropic plates and simple formulas developed by the senior author[1,3] can be used.

Most of the bridge and building slabs on girders have large aspect ratios. For such cases further simplification is possible by neglecting the effect of the longitudinal moment terms( $M_x$ ) on the relevant partial differential equations of equilibrium. In this paper, the result of the study on the subject problem is presented.

---

#### 1. 서    론

최근 산업의 발전에 따라 구조물이 대형화 되어 감에 따라 건설비용의 증가 및 지진시 더 큰 관성력을 받는등 여러 문제점을 발생시키고 있다. 이에따라 구조물 경량화와 보다 효과적인 보수·보강재료로서 첨단 복합재료의 사용이 절실히 요구되고 있으며, 전세계적으로 첨단복합재료를 건설분야에 응용하고자 하는 노력들이 활발하게 진행되고 있다.

---

\*    Korea Composites 소장  
\*\*   한라대학 건축·토목공학부 교수  
\*\*\* 강원전문대 교수  
\*\*\*\* 강원대학교 토목공학과 석사과정

실제로 건설중인 예 중의 하나로 San Diego에 세계 최초의 차량용 100% 복합재료 사장교에 대한 시방서 연구 등이 진행 중에 있다. 이 교량은 450feet 지간에 60feet의 교폭으로 계획되어 있는데 이 사업을 위해 대학 및 섬유보강 복합재료를 군사용으로 사용해온 7개의 군수 산업체가 Advanced Composite Technology Transfer(ACTT)란 이름의 컨소시엄을 이루어 사업을 진행하고 있다.

토목·건축구조물은 그 경계조건의 복잡함을 갖고 있으며, 이러한 구조물에 관한 정확한 해석해를 구한다는 것은 상당한 어려움이 있다. 이 문제를 보다 효과적으로 해결하기 위하여 유한차분법을 사용하였다. 그러나 유한차분법은 매트릭스의 크기가 너무나 방대해져 계산의 번잡함과 프로그램 수행 시간이 길어지는 등의 문제점을 발생시킨다. 만일 평형방정식중 종방향 모멘트항인  $M_x$ 의 영향이 무시될수 있다면 이러한 문제점을 줄일 수 있다<sup>[1]</sup>.

따라서 이 논문에서는 표제의 연구 결과 값들의 비교·고찰을 통해 평형방정식에 대한 종방향 모멘트인  $M_x$ 의 영향이 무시될 수 있는 범위를 제시함으로써 실무자들의 구조물 설계 및 해석에 도움을 주고자 한다.

## 2. 이론적 배경

특별직교 이방성 적층 복합판의 지배방정식은 다음과 같이 4차단일 미분항을 갖는 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (2.1)$$

여기서  $D_1 = D_{11}$ ,  $D_2 = D_{22}$ ,  $D_3 = (D_{12} + 2D_{66})$  이다.

식(2.1)을 차분식으로 적용할 때 중심차분을 사용할 경우 소요되는 pivotal point의 수가 5개가 되는 고로, 가상점을 소거시키는데 계산상의 번잡을 일으킨다<sup>[1]</sup>. 그러나 평형방정식을 다음과 같은 3개의 종속변수  $w$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ 를 갖는 2차 연립편미분 방정식으로 대치하여 이러한 문제를 해결할 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.2)$$

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

이 3개의 방정식을 풀게되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한 번에 구해낼 수 있는 장점이 있다. 위의 식(2.2), (2.3), (2.4)에서 종방향 모멘트가 무시된다면 계산의 번잡함을 줄이고 매트릭스 계산시 수렴속도를 단축시킬 수 있을 것이다. 종방향 모멘트  $M_x$ 가 무시된 방정식은 다음과 같이 나

타내어질 수 있다.

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 4D_{66} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.5)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

2개의 미지 종속변수  $w$ ,  $M_y$ 를 구하기 위해 식(2.5), (2.6)를 전형적인 구간과 경계구간에 대하여 차분식을 세운다. 그리고 차분식을 MJ개의  $y$ 방향 선으로 구성된 전체 판의 각각의 선에 대해 2MJ개의 matrix 방정식으로 나타낼 수 있고, tri-diagonal matrix해법을 사용하여 matrix방정식을 풀면  $(x,y)$ 점의  $w$ ,  $M_y$ 값을 구할 수 있다. 그리고  $M_x$ 는 계산된 처짐  $w$ 로부터 구한다.

### 3. 수치해석

대상구조물은  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판을 고려하였으며 Figure 1에 나타내었다. 이때 경계조건은 Figure 2와 같이 양단 단순지지 타단자유로 하였다. 적층복합판은 기준형상을  $a=5m$ ,  $b=5m$ 를 기준으로 하여 형상비를  $c=a/b=1\sim 5$ 까지 변화시켜 수치해석을 수행하고 고찰하였다. 하중조건은 적층판에 등분포하중을 재하 하였으며, 물성값은 다음과 같다.

$$E_1 = 67.36 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.272, \quad \nu_{21} = 0.0328, \quad G_{12} = 3.0217 \text{ GPa},$$

$$\text{Uniform Load} = 300 \text{ N/m}^2, \quad \text{적층수 } r = 1, \quad h_0 = 0.005m$$

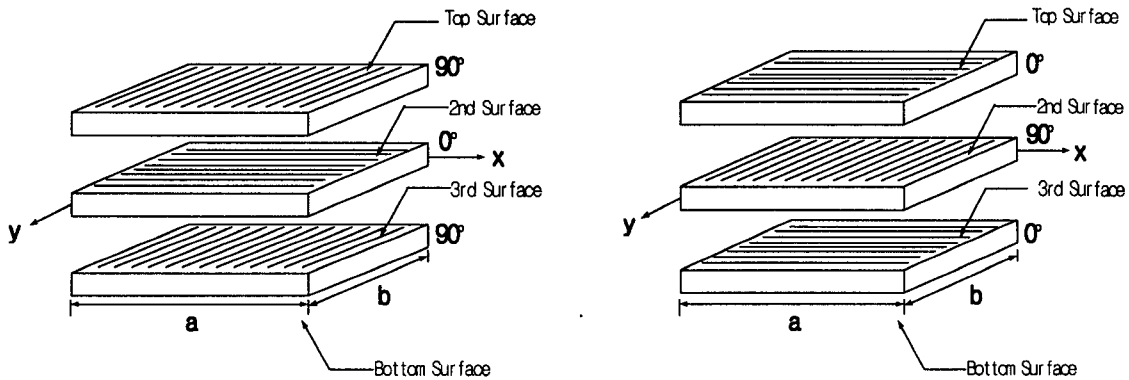


Figure 1. Special orthotropic laminated plate

종방향 모멘트인  $M_x$ 의 평형방정식에 대한 영향을 무시하였을 때, 처짐에 대한 영향을 연구하기 위해 각각의 경계조건과 보강재 배향각에 대하여 수치해석을 수행하였다.

Case A :  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트  $M_x$ 항을 고려한 경우.

Case A-N :  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트  $M_x$ 항을 무시한 경우.

Case B :  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트  $M_x$  항을 고려한 경우.

Case B-N :  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  형태의 적층복합판으로 종방향 모멘트  $M_x$  항을 무시한 경우.

각각의 Case에 대한 적층복합판의 휨강성  $D_{ij}$ 를 계산한 결과를 Table 1에 나타내었다.

Table 1. Flexural stiffness of the plate (N · m)

Case \ Stiffness	$[90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$
$D_{11}$	2926.95	18492.90
$D_{22}$	18492.90	2926.95
$D_{12}$	626.77	626.77
$D_{66}$	849.85	849.85

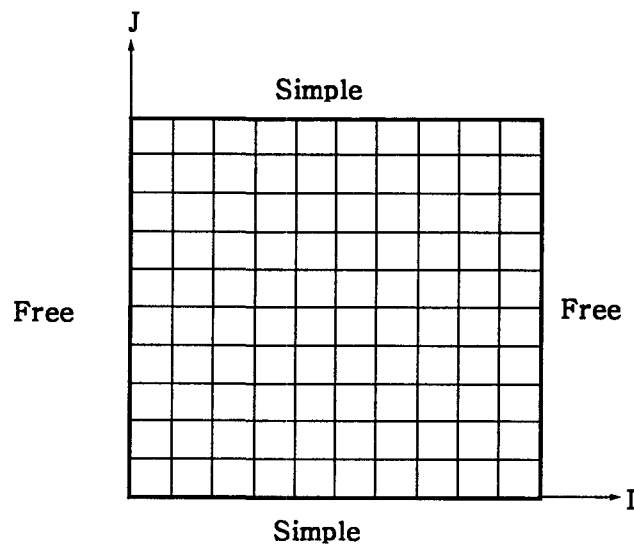


Figure 2. Node point on special orthotropic laminated plate( $c=a/b=5m/5m=1$ )

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

형상비 변화에 따른 평형방정식에 대한 종방향 모멘트  $M_x$  항의 무시효과를 고찰하기 위해 각각의 Case에 대하여 두가지 경우의 수치해석 결과 값들을 Table 2와 Table 3에 나타내었다. Figure 3과 Figure 4는 결과값을 그래프로 나타낸 것이다.

Table 2. Deflection at the center of the plate for each aspect ratio (m)

Aspect ratio Case	1	2	3	4	5
Case A	0.13075	0.13269	0.13310	0.13308	0.13308
Case A-N	0.13310	0.13308	0.13307	0.13307	0.13308
Ratio (A/A-N)	0.9823	0.9971	1.0002	1.000	1.000

Table 3. Deflection at the center of the plate for each aspect ratio (m)

Aspect ratio Case	1	2	3	4	5
Case B	0.83680	0.82566	0.82795	0.83406	0.83828
Case B-N	0.84133	0.84092	0.84082	0.84080	0.84079
Ratio (B/B-N)	0.9946	0.9819	1.0157	0.9920	0.9970

형상비가 증가함에 따라 종방향 모멘트를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우에 보강재의 배향 각에 따라 약간 차이가 있으나 서로간의 차이가 점차 줄어드는 경향으로 나타남을 알 수 있다.

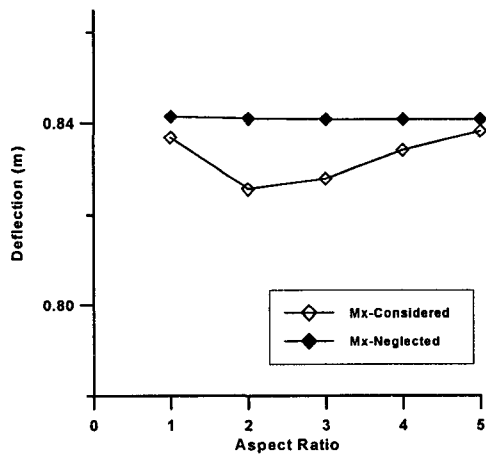


Figure 3. Deflection for case A at the center of the plate (SF)

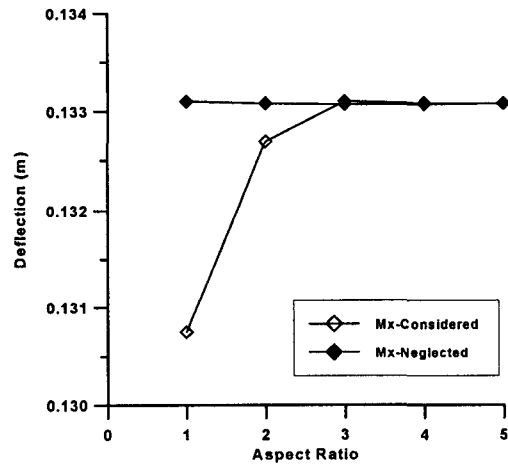


Figure 4. Deflection for case B at the center of the plate(SF)

## 5. 결 론

이 논문에서는 양단 고정 타단자유일때의 경계조건에서 배양각이  $[90,0,90]_r$ ,  $[0,90,0]_r$  형태 적층 복합판의 평형방정식에 대한 종방향 모멘트인  $M_x$  항의 영향이 무시되었을 때, 처짐에 미치는 효과에 대한 연구 결과들이 주어졌다. 유한차분법이 처짐의 영향면을 구하는데 이용되었으며 매트릭스 계산의 번잡함을 줄이기 위해 tri-diagonal matrix 해법을 이용하였다. 또한 종방향 모멘트  $M_x$ 의 영향을 무시할수 있는 범위를 보임으로서 구조물 설계 및 해석을 위한 기초자료로 제시하였다.  $[90/0/90]$ 형태의 적층판의 경우 형상비가 2일 때 차이가 0.2%, 형상비가 3일때는 오직 0.02%의 차이만을 갖는다. 또한 보강재의 보강방향에 따라 처짐값의 차이가 크게 나타남을 알 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] Kim, D. H., THE EFFECT OF NEGLECTING THE RADIAL MOMENT TERMS IN ANALYZING A FINITE SECTORIAL PLATE BY MEANS OF FINITE DIFFERENCES, Proc., International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967.
- [2] Kim, D. H., TRIDIAGONAL SCHEME TO SOLVE SUPER LARGE SIZE MATRICES BY THE USE OF COMPUTER, Journal of Korean Society of Civil Engineers (K.S.C.E.), Vol 15-1, 1967.
- [3] Kim, D. H., A SIMPLE METHOD OF ANALYSIS FOR THE PRELIMINARY DESIGN OF PARTICULAR COMPOSITE LAMINATED PRIMARY STRUCTURES FOR CIVIL CONSTRUCTION, Journal of Material Processing Technology Vol. 55, Elsevier, London, 1995, pp 242-248.
- [4] Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.
- [5] 김덕현, 이정호, 박정호, "탄성지지된 복합재료 상판의 고유진동수", 한국전산구조공학회 가을 학술발표회 논문집, 제10권 제2집(통권 제19호), 충북대학교, 1997. 10. 11, pp215-222.
- [6] 김덕현, "건물과 사회 간접 시설의 보수와 재건을 위한 복합재료", 대한토목학회지, 제 45 권 제 4호 1997. 4., pp 49-66.
- [7] Amir Wadi Al-Khafaji & John R. Tooley, "*Numerical Methods in Engineering Practice*",

Elsevier Science Publishers B.V.

- [8] 김덕현, “새로운 1000년의 건설재료(건설을 위한 복합재료)”, 새로운 건설재료에 대한 강연회 대한토목학회 강원지회, 강원대학교, 1997. 6. 20.