

## 면내회전자유도를 가지는 4 절점 비적합 평면셀의 개발 A 4-Node Non-conforming Flat Shell Element with Drilling DOF

최 창 근 \*            이 필 승 \*\*  
Choi, Chang-Koon    Lee, Phill-Seung

### ABSTRACT

A versatile flat shell element has been developed by combining a membrane element with drilling degree-of-freedom and a plate bending element. This element is formulated by the enhanced displacement field with the additional non-conforming displacement modes. Thus the element possesses six degrees-of-freedom (DOF) per node which permits an easy connection to other six DOF elements as well as the improvement of the element behavior.

In plate bending part, this element is established by the combined use of the addition of non-conforming modes, the reduced (or selective) integration scheme, and the construction of the substitute shear strain fields. The achieved improvement may be attributable to the fact that the merits of these individual techniques are merged into the new element in a complementary manner. In membrane part, this element shows better membrane behavior as the nonconforming displacement mode is added to drilling mode.

### 1. 서 론

본 논문은 보다 나은 평면셀요소의 개발에 대하여 기술 하고자 한다. 쉘구조물을 해석함에 있어서 곡률을 가지는 셀의 형상은 잘게 쪼개어 생각하면 편평한 면의 연속체로 처리할 수 있다는 물리적 개념과 사용상의 편리함으로 인해 실무에서는 평면셀을 많이 사용한다. 특히 절판 형태의 구조물의 해석에는 매우 효과적이다. 일반적으로 다른 셀요소와 마찬가지로 평면셀요소의 단점은 요소면에 대한 수직축 방향의 회전에 대한 강성 즉 면내회전강성을 고려하지 못하기 때문에 임의의 한 절점을 둘러싼 인접요소들이 모두 동일한 평면위에 정의된 경우에는 해당 절점의 면에 수직인 면내 회전강성이 존재하지 않기 때문에 발생하는 특이(Singular)문제가 된다. 이를 해결하기

\* 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

\*\* 한국과학기술원 토목공학과 석사과정

위하여 기존의 구조해석 프로그램에서는 해당 자유도 성분을 제한하거나 임의의 강성을 추가하는 방법을 사용한다. 본 요소는 평판과 6 번째 자유도인 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소의 결합에 의하여 6 개의 자유도를 가지게 되는데 이로 인해 앞에서 언급한 문제점을 해결 할 수 있으며 6 개의 자유도를 가진 다른 요소들과의 결합이 쉽게 이루어질 수 있다.

대부분의 평판요소는 민들린(Mindlin)이론에 기초하는데 이 경우 요소의 두께가 얇아졌을 때 강성이 과대평가되는 전단잠김(Shear Locking)현상이 발생하게 된다. 이 현상은 선택적 감차적분(Selective Reduced Integration), 대체변형률장(Substitute Strain Field)의 이용, 비적합모드(Non-conforming Mode)의 추가에 의하여 제거될 수 있다. 그리고 이 세가지 방법들을 잘 혼용한다면 더 좋은 거동을 보이는 요소를 만들 수 있다. 본 연구는 이 세 방법을 조합하여 가장 좋은 거동을 보이는 4 절점 평판 요소를 제시하였다. 본 요소에 사용된 평면 응력요소는 Allman Type 의 회전변위장을 이용하여 면내회전자유도를 추가하였으며 요소의 직선변위장과 회전변위장에 각각 비적합모드를 추가하여 요소의 거동을 개선시켰다.

## 2. 평판(Plate)요소의 정식화

변위장은 회전변위장에 요소의 휨거동을 개선하기 위하여 비적합모드를 추가하였다.

$$w = \langle N \rangle \{w\} \quad (1)$$

$$\theta_x = \langle N \rangle \{\theta_x\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}_x\} \quad (2)$$

$$\theta_y = \langle N \rangle \{\theta_y\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{\theta}_y\} \quad (3)$$

여기서  $\langle N \rangle$ 은 4 절점 기본 형상함수,  $\langle \bar{N} \rangle$ 는 비적합모드  $\bar{N}_1 = 1 - \xi^2$ ,  $\bar{N}_2 = 1 - \eta^2$  이고  $\bar{\theta}_x$ ,  $\bar{\theta}_y$ 는 비적합변위이다. 변위-변형률관계는 비적합변위에 의하여 비적합변위와 변형률간에 관계를 나타내는  $\bar{B}_b$ ,  $\bar{B}_s$  가 추가되게 된다. 전단에의한 잠김현상을 방지하기 위하여  $B_s$ 를 Donea (1987)가 제시한  $\tilde{B}_s$ 로 대신

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_b & \bar{B}_b \\ B_s & \bar{B}_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{\theta_x\} \\ \{\theta_y\} \\ \{\bar{\theta}_x\} \\ \{\bar{\theta}_y\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

함으로서 대체변형률장을 적용하였다. 일반적으로 비적합모드를 사용하게 되면 비적합모드에 의한 변형에너지의 변화로 인해 요소는 조각시험(Patch Test)를 통과할 수 없는데 이를 통과시켜 수렴성을 보장받기위하여 B-bar 방법(Zienkiewicz and Taylor 1989)을 사용하여 조각시험을 통과시켰다. B-bar 방법에 의하여 비적합모드에 관계된  $\bar{B}_s$ ,  $\bar{B}_b$ 를  $\bar{B}_s^*$ ,  $\bar{B}_b^*$ 로 대신하게된다.

$$\bar{B}_b^* = z\left(\frac{1}{z}\bar{B}_b - \frac{1}{V}\int_V \frac{1}{z}\bar{B}_b dV\right) \quad (5)$$

$$\bar{B}_s^* = \bar{B}_s - \frac{1}{V}\int_V \bar{B}_s dV \quad (6)$$

강성행렬은 비적합변위의 추가에 의하여 식(7)과 같이 나타나게 되며 정적응축에

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

의하여 비적합변위를 제거시키면 최종적으로 식(8)의 강성행렬을 얻을 수 있다.

$$K = K_{cc} - K_{cn}K_{nn}^{-1}K_{cn}^T \quad (8)$$

여기서  $K_{cc}, K_{cn}, K_{nn}$ ,은 식(9),(10),(11)과 같으며 적분은 모든 부분에서  $2 \times 2$  가우스적분을 수행한다.

$$K_{cc} = \int_V B_b^T D_b B_b dV + \int_V \tilde{B}_s^T D_s \tilde{B}_s dV \quad (9)$$

$$K_{cn} = \int_V B_b^T D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \tilde{B}_s^T D_s \bar{B}_s^* dV \quad (10)$$

$$K_{nn} = \int_V \bar{B}_b^{*T} D_b \bar{B}_b^* dV + \int_V \bar{B}_s^{*T} D_s \bar{B}_s^* dV \quad (11)$$

응력은 강성행렬의 구성에서와 같이 비적합변위를 소거하여 구한다.

$$\{\sigma\} = [D] \begin{bmatrix} B_c & B_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_n \end{Bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} B_c - B_n K_{nn}^{-1} K_{cn}^T \\ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서  $B_c, B_n$ 은  $\begin{bmatrix} B_b \\ \tilde{B}_s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{B}_b^* \\ \bar{B}_s^* \end{bmatrix}$  이다.

### 3. 면내회전자유도를 가지는 평면응력요소의 정식화

변위장은 4 절점요소의 기본형상함수  $\langle N \rangle$ 과 Allman의 회전변위장관련 형상함수  $\langle C \rangle$ ,  $\langle S \rangle$ 와 이에 각각 추가된 비적합모드  $\langle \bar{N} \rangle$ ,  $\langle \bar{C} \rangle$ ,  $\langle \bar{S} \rangle$ 에 의하여 구성된다.

$$u = \langle N \rangle \{u\} + \langle C \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{u}\} + \langle \bar{C} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \quad (13)$$

$$v = \langle N \rangle \{v\} + \langle S \rangle \{\theta_z\} + \langle \bar{N} \rangle \{\bar{v}\} + \langle \bar{S} \rangle \{\bar{\theta}_z\} \quad (14)$$

$$\psi = \langle N \rangle \{\theta_z\} \quad (15)$$

여기서  $\{\bar{u}\}, \{\bar{v}\}, \{\bar{\theta}_z\}$ 는 비적합변위이다.

정식화는 Hughes 와 Brezzi (1989)가 제시한 변분 방정식 (variational equation)을 적용하였으며 적용 범위는 균질한 경계조건을 가지는 등가정적 Dirichlet 경계치를 가지는 선형탄성 문제로 제한된다. Hughes 와 Brezzi 는 평형방정식, 응력의 대칭조건, 변위경사의 반대칭 부분으로 표현되는 회전의 정의 및 구성방정식을 이용하여 다음과 같은 변분방정식을 유도하였다.

$$\begin{aligned}
0 &= D \prod_{\gamma} (u, \psi, skew\sigma) \cdot (v, \omega, skew\tau) \\
&= \int_{\Omega} (symm\nabla v) \cdot C \cdot (symm\nabla u) d\Omega + \int_{\Omega} skew\tau^T \cdot (skew\nabla u - \psi) d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} (skew\nabla v^T - \varpi^T) \cdot skew\sigma d\Omega - \gamma^{-1} \int_{\Omega} skew\tau^T \cdot skew\sigma d\Omega - \int_{\Omega} v \cdot f d\Omega
\end{aligned} \tag{16}$$

변위의 대칭부분(Symmetric Part)와 반대칭부분(Skew-Symmetric Part)은 식(17),(18)과 같이 행렬형태로 표현할 수 있으며 여기서  $[B], [G], [\bar{B}], [\bar{G}], [b], [g], [\bar{b}], [\bar{g}]$  는 변위-변형률 관계를 나타내는 행렬들이다.

$$symm\nabla u = [B] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} + [G] \{\psi\} + [\bar{B}] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} + [\bar{G}] \{\bar{\psi}\} \tag{17}$$

$$skew\nabla u - \psi = [b] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \end{Bmatrix} + [g] \{\psi\} + [\bar{b}] \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \end{Bmatrix} + [\bar{g}] \{\bar{\psi}\} \tag{18}$$

회전자유도와 비적합변위에 의해 생기는 여분의 변형에너지를 제거하여 조각시험(Patch Test)을 통과시키기 위하여  $B, G, \bar{G}$  행렬을 B-bar 방법(Zienkiewicz and Taylor 1989)에 의하여 수정한다.

$$\bar{B}^* = \bar{B} - \frac{1}{V} \int \bar{B} dV, \quad G^* = G - \frac{1}{V} \int G dV, \quad \bar{G}^* = \bar{G} - \frac{1}{V} \int \bar{G} dV \tag{19}$$

식(16)의 변분방정식이 식(17),(18)에 의해 행렬형태로 바뀌면 최종적으로 식(20)와 같이 혼합형태(Mixed Formulation)의 식으로 구성되게 된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{K} & h^T \\ h & -\gamma V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{\psi\} \\ \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \\ \{\bar{\psi}\} \\ \tau_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_u\} \\ \{f_v\} \\ \{f_\psi\} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

식(20)에서  $[\bar{K}]$  는 식(21)과 같으며  $[\bar{K}]$  의 부분행렬들은 식(22),(23),(24)과 같다.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{cc} & \bar{K}_{cn} \\ \bar{K}_{cn}^T & \bar{K}_{nm} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[\bar{K}_{cc}] = \int [B \ G^*]^T D [B \ G^*] dV \quad (22)$$

$$[\bar{K}_{cn}] = \int [B \ G^*]^T D [\bar{B}^* \ \bar{G}^*] dV \quad (23)$$

$$[\bar{K}_{nm}] = \int [\bar{B}^* \ \bar{G}^*]^T D [\bar{B}^* \ \bar{G}^*] dV \quad (24)$$

그리고 식(20)의  $[h]$ 와  $\gamma$ 는 식 (25) 이다.

$$[h] = \int [b \ g \ \bar{b} \ \bar{g}]^T dV, \quad \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (25)$$

식(19)에서 비적합변위  $\{\bar{u}\}, \{\bar{v}\}, \{\bar{\theta}_z\}$ 와 응력항  $\tau_0$ 를 정적응축(Static Condensation)함으로서 강성행렬을 구할 수 있으며 적분은  $2 \times 2$ 가 아닌  $3 \times 3$  가우스적분을 수행하여야 한다. 응력은 식(26)에 의하여 계산하게 된다.

$$\{\sigma\} = [D][B \ G^*]\{u\} \quad (26)$$

#### 4. 평면셀의 구성

평면셀의 강성행렬은 평판요소와 평면응력요소의 독립적인 결합에 의하여 구성될 수 있다.

$$[K]_{Plate} + [K]_{Membrane} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{Plate} & 0 \\ 0 & K_{Membrane} \end{bmatrix} \quad (27)$$

3 차원상으로 강성행렬을 변환하기 위해서는 국부좌표계(Local Coordinate)에서 구한 강성행렬에 회전변환행렬  $[T]$ 를 곱하여 전체좌표계(Global Coordinate)에서의 강성행렬을 구할 수 있다.

$$[K]_{Global} = [T]^T [K]_{Local} [T] \quad (28)$$

#### 5. 수치해석 결과

평판요소의 거동을 평가하기 위해 조각시험(Patch Test), 전단잠김시험(Shear Locking Test), 수렴시험(Convergence Test)를 하였으며 Rectangular Plate에 대하여 수치해석하였다. 조각시험에 대하여는 비틀림, 휨, 전단에 대하여 모두 통과 하였다. 그림 1 과 2 는 대체변형률장만 사용한 요소(S), 여기에 비적합모드를 추가한 요소(S+N), 그리고 감차적분까지 한 요소(S+N+R)의 전단잠김과 수렴시험

결과를 비교하여 보여주고 있다. 두 시험결과 S+N 요소가 가장 좋은 결과를 보여주고 있으며 두께 대 길이비가  $10^{-7}$  일 때 까지도 전단잠김이 일어나지 않고 있음을 알 수 있다.

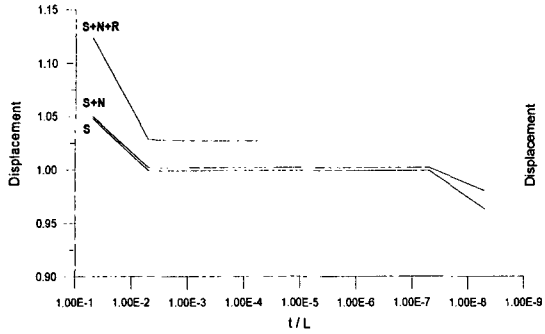


그림 1. Shear Locking Test

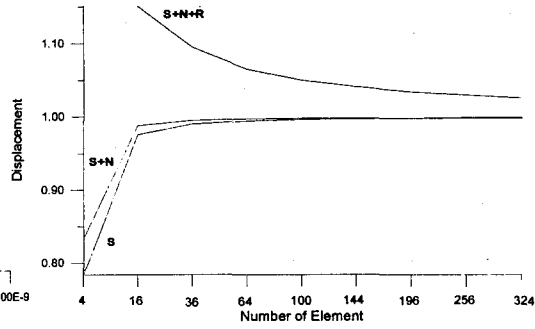


그림 2. Convergence Test

폭과 높이가 2.0 인 사변 고정 정사각형 평판을 1/4 모델하여 해석하였다. 물성치는 탄성계수 1.7472E7, 두께 0.0001, 포아슨비 0.3 이며 하중은 등분포 0.0001 인 경우와 중앙집중하중 0.0004 인 경우이다. 이론치와 범용구조해석 프로그램인 SAP 과 결과가 가장 좋은 S-N 요소의 결과를 비교하였다. (표 1)

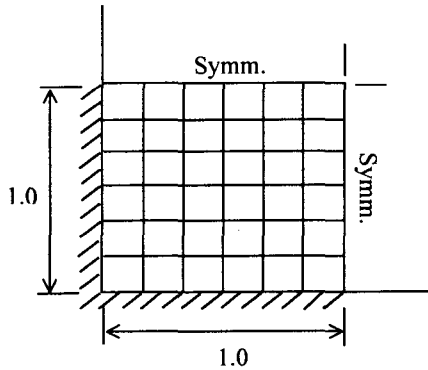
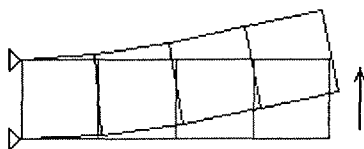


표 1. 평판요소의 수치시험 결과

	SAP	S+N	이론치 (최대처짐)
등분포하중	1.29 (102 %)	1.26 (100 %)	1.26
집중하중	5.76 (103 %)	5.54 (99 %)	5.60

그림 3. Clamped Plate

평면응력요소의 거동을 평가하기위해 조각시험(Patch Test), 단순보시험(Simple Beam Test)을 하였으며 모두 통과하였으며 그림 4 의 Cantilever 보를 해석하였다. 보의 치수 는 길이 48, 높이 12, 두께



1.0 이며 물성치는 탄성계수 30000, 포아슨비 0.25, 하중은 자유단에 40 이 작용된다. 이론값은 자유단변위는 0.3558 이며 하단 1/4 지점 수직응력은 60 이다. 결과는 면내회전자유도가 없는 요소(M-0)와 있는 요소 (M-1) 그리고 면내회전 자유도가 있고 여기에 비적합모드가 추가된 요소(M-2)를 비교하였다. 결과는 표 2 와 같다.

그림 4. Cantilever

표 2. 평면응력요소의 수치시험 결과

요소수	변위 (자유단 수직변위)			응력
	M-0	M-1	M-2	M-2
1 × 4	0.2424 (68.1 %)	0.3283 (92.3 %)	0.3493 (98.2 %)	64.00 (106.7%)
2 × 8	0.3162 (88.9 %)	0.3460 (97.2 %)	0.3516 (98.8 %)	62.30 (103.8%)
4 × 16	0.3447 (96.9 %)	0.3528 (99.2 %)	0.3543 (99.6 %)	61.03 (101.7%)
8 × 32	-	0.3550 (99.8 %)	0.3554 (99.9 %)	60.50 (100.8%)

면내회전자유도가 있는 요소의 거동이 없는 요소보다 훨씬 좋은 거동을 보이고 있으며 여기에 비 적합모드가 추가된 요소는 더욱 개선된 결과를 보이고 있다.

가장 거동이 좋은 S-N 평판요소와 M-2 평면응력요소를 결합하여 평판 셸을 구성하였으며 원통형셸을 1/2 모델링하여 수치해석하였다. 원통의 치수는 반지름 4.953, 길이 10.35, 두께 0.094 이며

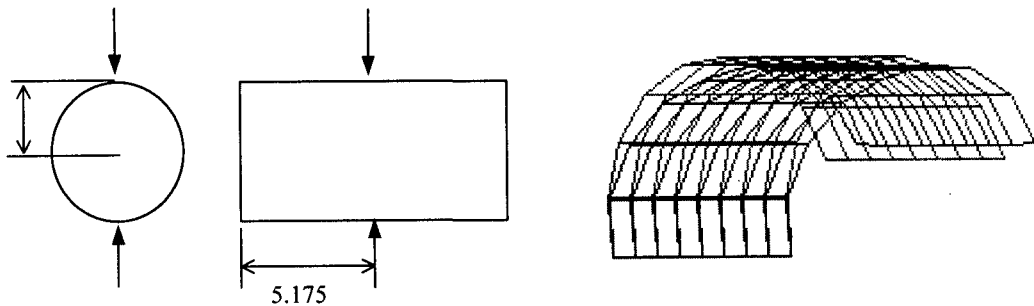


그림 5. 원통셸

물성치는 탄성계수 1.05E7 포아슨비 0.3125 이다. 하중은 중앙에 집중하중이 원통 중심방향으로 100 작용한다. 하중작용점의 하중작용방향 처짐을 비교하였다.(표 3)

표 3. 평면셸요소의 수치시험 결과

	SAP	본 요소	이론치	
			Ashell and Sabin (1972)	Thin Shell Theory
8 × 8	0.1090	0.0999	0.1139	0.1084
16 × 16	0.1109	0.1099		

## 6. 결론

본 연구에서는 비적합모드의 추가에 의한 개선된 면내회전자유도를 가지는 4 절점 평면셀요소를 개발하였다. 평면셀의 평판요소 부분에서는 보다 나은 요소를 개발하기 위해 대체변형률장과 비적합모드를 혼용한 요소(S+N), 대체변형률장, 비적합변위, 감차적분을 혼용한 요소(S+N+R)를 개발하여 이를 대체변형률장만을 사용한 요소(S)와 비교하였으며 대체변형률장과 비적합모드를 혼용한 요소(S+N)가 가장 좋은 거동을 보임을 수치해석을 통하여 확인할 수 있었다. 그리고 평면응력요소 부분에서는 면내회전자유도만 가지고 있는 요소(M-1), 여기에 비적합모드가 추가된 요소(M-2) 와 면내회전자유도가 없는 요소(M-0)를 비교한 결과 면내회전자유도를 가지고 비적합모드가 추가된 요소가 가장 좋은 거동을 보임을 알 수 있었다. 가장 좋은 거동을 보인 평판요소와 평면응력요소를 결합시켜 만든 평면셀요소를 가지고 수치해석을 한 결과 상당히 좋은 거동을 보임을 알 수 있었다.

## 참고 문헌

1. C.K. Choi and W.H. Lee, 'Versatile variable-node flat shell element', *J. of Eng. Mech.(ASCE)*, 122(5), 432-441, 1996
2. C.K. Choi and Y.M. Park, 'A robust quadratic nonconforming Mindlin plate bending element'
3. J. Donea and G. Lamain, 'A modified representation of transverse shear in  $C^0$  quadrilateral plate element', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 63, 183-207 (1987)
4. Edward L. Wilson and Adnan Ibrahimbegovic 'Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses', *Finite Element in Analysis and Design*, 7(1990), 229-241
5. Adnan Ibrahimbegovic, 'A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation', *Finite Element in Analysis and Design*, 7(1990), 167-179
6. Adnan Ibrahimbegovic, Robert L. Taylor and Edward L. Wilson, 'A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom', *Int. J. numer. methods eng. Eng.*, vol.30. 445-457 (1990)
7. D.J. Allman, 'A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis', *Int. j. numer. methods eng.*, vol.26. 717-730 (1988)
8. Thomas J.R. Hughes and F. Brezzi, 'On drilling degrees of freedom', *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 72, 105-121 (1989)
9. 이완훈, '면내 회전자유도를 가진 변이 평면 셀요소의 개발과 이를 이용한 적응적 체는 세분화', 한국과학기술원, 박사학위논문