

얕은 정현형(正弦型) 아치의 분기좌굴에 관한 연구

A study on the bifurcation buckling for shallow sinusoidal Arches

김 승 덕*
Kim, Seung-Deog

권 택 진**
Kwun, Taek-Jin

박 지 윤***
Park, Ji-Yoon

ABSTRACT

The equilibrium path of shallow sinusoidal arches supported by hinges at both ends is investigated. The displacement increment method is used to get the solution of the nonlinear differential equations for these structures and to plot the equilibrium paths by the results.

Using the equilibrium paths, the relations between the position of buckling point and buckling type for the case of sinusoidal distributed loads are inferred. From the result that the buckling type changes according to the normalized rise of arch, it is also shown that the arch rise is the governing factor to stability regions.

1. 서 론

아치는 곡률을 가진 곡선구조 형태로서 외부하중에 대하여 효과높게 저항할 수 있는 형태저항형 구조물이며, 구조물의 곡률을 이용하여 주로 압축력으로 힘을 전달할 수 있게 한 구조시스템이다. 따라서 안전하고 경제적이며 외부곡면은 미적으로 아름다울 뿐 아니라 유체의 저항을 최소화할 수 있다.

고대 로마시대 이래로 아치는 석재로 많이 건조되어 왔고 철과 콘크리트의 시대에 들어와서도 역학적 장점으로 인하여 대경간(大徑間) 구조물에 많이 사용되고 있다. 역학의 발전과 함께 아치의 단면은 점점 작아지고, 경간은 길어져, 가늘고 긴 아치의 시공이 늘고 있다.

아치가 가늘고 길어질수록 그 강도는 좌굴강도에 의하여 결정되고, 또한 좌굴강도는 좌굴형태에 의하여 지배되므로 좌굴형태 및 좌굴강도의 해석, 즉 안정해석을 통한 구조불안정 문제의 해결은 아치의 강도결정에 중요한 인자가 된다.

아치의 구조불안정 문제는 크게 뿔좌굴(snap-through), 분기좌굴(bifurcation), 굴복좌굴(flattening)로 나누어 생각할 수 있다. 뿔좌굴은 구조물의 평형경로(equilibrium path)상에 극한점이 존재하고, 이 극한점(limit point)에 도달하면 새로운 평형점으로 점프하는 현상이며, 주로 대칭변형모드에 의해 일어난다. 분기좌굴(bifurcation)은 구조물의 평형경로상의 어느 한 점에서 그때까지의 주 변형모드인 대칭변형모드가 아닌 완전히 새로운 비대칭 변형모드가 나타나며 2개 이상의 평형경로로 나누어지는 불안정현상이다. 이때 평형경로가 나누어지는 점을 분기점(bifurcation point)이라 하고, 좌굴 후 평형경로의 접선방향을 대표하는 변형모드 즉, 분기점에서의 좌굴모드에 따라 하중모드와 좌굴모드가 직교하는 대칭분기점, 직교하지 않는 비대칭 분기점으로 나누어진다. 또한 분기 후 평형경로의 상태에 따라 안정 분기점, 불안정 분기점으로 분류된다. 안정 분기점은 초기불완전(initial imperfection)에 대하여 덜 민감하나, 불안정 분기점인 경우에는 초기불완전량의 증가에 따라 좌굴내력이 저하되며, 변위의 점프 또는 급격한 내하능력의 감소 등 매우 민감한 반응을 보인다.

* 정회원, 세명대학교 건축공학과 교수, 공학박사

** 정회원, 성균관대학교 건축공학과 교수, 공학박사

*** 성균관대학교 건축공학과, 석사과정

다. 굴복좌굴(flattening)은 $p-\delta$ 관계가 비선형이고, 변위에 대한 하중의 증가율 $dp/d\delta$ 가 점차 감소하여 $dp/d\delta = 0$ 에 도달한 후에는 하중이 감소하여도 변위가 증가해 결국 파괴하게 되는 불안정현상으로 주로 단면의 기하학적 특성으로 인하여 야기된다.

이러한 불안정문제들은 모두 기하학적 비선형문제이므로 아치의 구조설계에서는 대변형 또는 유한변형이론에 의해 구조거동의 비선형적 특성을 파악해야 할 경우가 많다. 이를 위하여 많은 연구자들이 아치와 같은 대공간 구조물에 관한 비선형 문제를 다루고 있으며, 다양한 연구결과들을 보고하고 있다.^{(3),(4)} 여러 가지 비선형 해석기법이 제안되고 있으나, 어떤 해석법이 가장 적합하고 유리한 해법인가에 관해서는 정해가 따로 없으며, 다만 비선형 문제의 유형과 이용자 자신의 경험에 의존할 수 밖에 없다. 대공간 구조물의 비선형 문제는 구조불안정문제와 직결되고, 아치 구조물 자체가 외력 및 구조물 형상에 매우 민감하게 반응하기 때문에 특이점(singular point)근방에서의 해석가능 문제도 중요한 과제이다. 그러므로 아치 구조물의 구조해석 문제는 여러 가지 난제들이 존재하고 있으며, 이는 불안정문제에 관한 금세기 수학의 한계성에 기인하는 것으로 근본적인 해결방법은 수학적인 문제에 귀착된다 할 수 있다.

현재 기하학적 비선형문제의 비선형 해석기법으로는 반복근사법, Newton-Raphson법, 하중증분법, 수정하중증분법, 변위증분법, 섭동법, 호장증분법 등이 있지만 좌굴점의 위치와 안정영역의 정확한 경계를 구할 수 없기 때문에 이를 이용한 구조물의 정확한 거동파악에는 한계가 존재한다. 본 연구에서는 아치구조물의 불안정 구조특성을 파악하기 위하여 정현형 아치가 정현형 분포하중을 받았을 때의 뒤틀좌굴 및 분기좌굴의 경계를 파악하고, 또한 초기불완전(initial imperfection)에 대한 분기경로를 알아본다.

2. 비선형 기초방정식

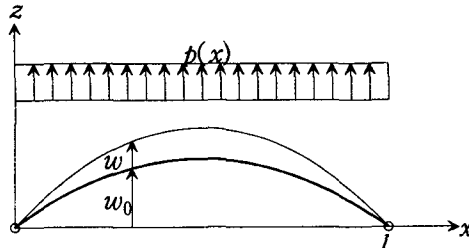


그림 1 아치의 기하학적인 형상

그림 1에서와 같이 직교좌표계를 사용하여 아치의 초기형상을 $w_0(x)$, x 방향 및 z 방향의 변위를 $u(x)$, $w(x)$ 로 나타낼 때, 변형 전후 상태에서의 중립축의 미소길이 ds_0 및 ds 는 식(1)과 (2)로 나타낼 수 있다.

$$(ds_0)^2 = [1 + (w_{0,x})^2] dx^2 \quad (1)$$

$$(ds)^2 = [1 + 2u_{,x} + (u_{,x})^2 + (w_{0,x})^2 + 2w_{0,x}w_{,x} + (w_{,x})^2] dx^2 \quad (2)$$

중립축의 변형도 e_{x0} 를 구하기 위하여 식(3)과 같이 Green의 변형도를 채택한다.

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{x0} dx^2 \quad (3)$$

식(3)에 식(1), (2)를 대입하고, $u_{,x} \gg \frac{1}{2} u_{,x}^2$ 의 관계를 고려하면, e_{x0} 를 구할 수 있다.

$$e_{x0} = u_{,x} + w_{0,x}w_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 \quad (4)$$

Bernoulli-Euler가정에 의해 곡률변화에 대한 선형화 관계를 이용하면, 중립축에서 z 만큼 떨어진 점에서의 변형도 e_x 는 식(5)과 같다.

$$e_x = e_{x0} - zw_{,xx} \quad (5)$$

응력-변형도 관계식은 Hooke의 법칙에 따라 식(6)과 같다.

$$\sigma_x = Ee_x \quad (6)$$

합응력인 축력 N 과 모멘트 M 은 식(7), (8)과 같다.

$$N = \int \int \sigma_x dA = EAe_{x0} = EA \left[u_{,x} + w_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right] \quad (7)$$

$$M = \int \int \sigma_x z dA = -EI w_{,xx} \quad (8)$$

이상을 이용하여 변형도에너지 U , 포텐셜에너지 V 를 구하면 식(9), (10)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int Ee_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l (EAe_{x0}^2 + EI(w_{,xx})^2) dx \quad (9)$$

$$V = - \int_0^l p w dx \quad (10)$$

다음은 가상일의 원리를 이용하여 평형방정식을 구해본다.

가상일의 원리는 식(11)과 같다.

$$\int \delta(U+V) dt = 0 \quad (11)$$

식(11)에 식(9), (10)을 대입해서 부분적분하면 식(12)와 같다.

$$\begin{aligned} \int \delta(U+V) dt &= \int \left[\int_0^l \{ -N_{,x} \delta u - (N w_{0,x} + N w_{,x})_{,x} \delta w \right. \\ &\quad \left. - M_{,xx} \delta w - p \delta w \} dx \right] dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

임의의 변분 δu 와 δw 의 계수를 0으로 두면 식(13), (14)와 같은 평형방정식이 얻어진다.

$$N_{,x} = 0 \quad (13)$$

$$M_{,xx} + [N(w_{0,x} + w_{,x})]_{,x} + p = 0 \quad (14)$$

식(13)은 ' $N =$ 일정'함을 나타내므로, 식(13)을 식(14)에 대입하고 식(8)의 관계를 이용하면 식(15)와 같다.

$$EI w_{,xxxx} - N(w_{0,xx} + w_{,xx}) - p = 0 \quad (15)$$

다음은 $x = 0, l$ 일 때 $u(x) = 0$ 인 경우를 생각한다.

식(7)로부터,

$$u_{,x} = \frac{N}{EA} - w_{0,x} w_{,x} - \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \quad (16)$$

양변을 x 에 관해 적분하고 경계조건 $u(0) = u(l) = 0$ 을 대입하고, 식(13)의 ' $N =$ 일정'함을 고려하면,

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2 w_{0,x} w_{,x}] dx \quad (17)$$

식(17)을 식(15)에 대입하면 식(18)과 같은 아치의 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$$EI w_{,xxxx} - \frac{EA}{2l} \int_0^l [(w_{,x})^2 + 2 w_{0,x} w_{,x}] dx (w_{0,xx} + w_{,xx}) - p = 0 \quad (18)$$

얇은 아치의 좌굴해석을 위하여 식(19)과 같은 무차원 파라미터를 도입한다.

$$\eta = \frac{w}{k}, \quad k = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad q = \frac{p}{EI k} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4, \quad \xi = \frac{\pi}{l} x \quad (19)$$

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\rho A \omega_0}$$

식(19)의 파라미터를 식(18)에 대입하여 정리하면 식(20)와 같은 무차원화된 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$$\eta_{,\xi\xi\xi\xi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [(\eta_{,\xi})^2 + 2\eta_{0,\xi} \eta_{,\xi}] d\xi (\eta_{0,\xi\xi} + \eta_{,\xi\xi}) - q = 0 \quad (20)$$

3. Galerkin법에 의한 이산화 기초방정식

다음의 순서로 Galerkin법을 적용하여 무차원화된 비선형 기초방정식을 이산화한다.

1) 변수를 시간 및 공간에 관해 분리 : $\eta = \sum D_n(\tau) f_n(\xi)$ (21)

2) 기초 방정식에 대입 : $g(\eta) = 0$ (22)

3) 이산화 : $\int_0^\pi g(\eta) f_r(\xi) d\xi = 0$ (23)

본 연구에서는 초기형상과 작용하는 분포하중을 모두 정현형(正弦型)일 때를 대상으로 한다. 초기형상, 변위, 하중을 Fourier급수를 이용하여 정의하면 식(26)과 같이 된다.

$$\eta_0 = H \sin \xi, \quad \eta = \sum_{n=1}^N (-D_n) \sin n\xi, \quad q = -\Lambda \sin \xi \quad (24)$$

여기서 변위 및 하중의 방향을 역방향으로 하기 위하여 '-'를 추가하였다.

이산화 과정에서 각 함수의 직교성(orthogonality)과 Galerkin법을 이용하면 식(25)와 같이 변위 모드 D_n 을 변수로 하는 이산화 비선형 기초방정식이 얻어진다.

$$F_r(D_1, \dots, D_N, \Lambda) = \sum_{n=1}^N n^4 D_n \delta_{nr} + \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^N n^2 D_n^2 - 2HD_1 \right) \left(-H\delta_{1r} + \sum_{n=1}^N n^2 D_n \delta_{nr} \right) - \Lambda \delta_{1r} = 0 \quad (25)$$

(δ_{nr} : kronecker symbol, N : 자유도 수)

4. 분기좌굴 해석

아치의 뒤틀좌굴과 분기좌굴의 경계를 알아보기 위하여 식(25)의 일반화 좌표 D_n 을 $n = 1, n = 2$ 인 경우만을 채택한다. 즉, $n = 1$ 인 경우는 대칭모드를, $n = 2$ 는 비대칭모드를 나타내므로 좌굴시 변형모드가 대칭모드일 경우가 뒤틀좌굴모드가 되며, 비대칭모드일 경우가 분기좌굴모드가 된다. 분기좌굴이 일어날 경우에는 대칭모드와 비대칭모드가 연성(Coupling)하여 일어나므로 연성좌굴이 되며, 이에 대응하여 뒤틀좌굴은 비연성좌굴이 된다. 식(25)에 $n = 1, 2$ 를 대입하여 2개의 자유도 방정식을 구하면,

$$F_1(D_1, D_2, \Lambda) = \left(1 + \frac{1}{2} H^2\right) D_1 - \frac{3}{4} HD_1^2 - HD_2^2 + D_1 D_2^2 + \frac{1}{4} D_1^3 - \Lambda = 0 \quad (26)$$

$$F_2(D_1, D_2, \Lambda) = 16D_2 - 2HD_1 D_2 + D_1^2 D_2 + 4D_2^3 = 0 \quad (27)$$

섭동법을 이용하여 식(26), (27)의 증분방정식을 구한다.

식(25)을 간단히 tensor기호로 나타내면,

$$F_r(D_i, \Lambda) = 0 \quad (28)$$

평형경로상의 현재점을 (D_i^0, Λ^0) 라 하였을 때, 이 점에서의 증분 (d_i, λ) 만큼 전진한 평형경로점

$(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda)$ 를 구한다. 즉, 두 점 모두 평형경로상의 점이므로,

$$F_r(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) = 0 \quad (29)$$

$$F_r(D_i, \Lambda) \equiv F_r(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) = 0 \quad (30)$$

(D_i^0, Λ^0) 를 중심으로 Taylor 전개하면,

$$F_r(D_i^0 + d_i, \Lambda^0 + \lambda) = F_r(D_i^0, \Lambda^0) + \left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right] F_r^0 + \frac{1}{2!} \left[d_i \frac{\partial}{\partial D_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right]^2 F_r^0 + \dots = 0 \quad (31)$$

식(31)에 식(29), (30)를 대입하여 정리하면,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_r^0}{\partial D_i} d_i + \frac{\partial F_r^0}{\partial \Lambda} \lambda + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial D_j} d_i d_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial \Lambda} d_i \lambda + \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial \Lambda^2} \lambda^2 \right] + \dots = 0 \quad (32)$$

식(32)의 d_i 와 λ 에 관한 계수를 식(33)과 같이 정의한다.

$$k_n = \frac{\partial F_r^0}{\partial D_i}, \quad k_{nij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial D_j}, \quad k_{n\lambda} = \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial D_i \partial \Lambda}, \quad (33)$$

$$f_{n\lambda} = -\frac{\partial F_r^0}{\partial \Lambda}, \quad f_{n\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_r^0}{\partial \Lambda^2}$$

식(33)의 계수를 이용하여 (d_i, λ) 를 미지수로 하는 증분방정식을 구하면 식(34)와 같다.

$$f_r(d_i, \lambda) = \sum_{i=1}^n k_{ni} d_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{nij} d_i d_j + \sum_{i=1}^n k_{ni\lambda} d_i \lambda - f_{n\lambda} \lambda - f_{n\lambda\lambda} \lambda^2 = 0 \quad (34)$$

식(34)를 풀기 위하여 임의의 파라미터 t 를 도입하여 증분 d_i , λ 를 $d_i(t)$, $\lambda(t)$ 로 가정하고, $t=0$ 일 때,

$$d_i(0) = 0, \quad \lambda(0) = 0 \quad (35)$$

라 놓으면, $t=0$ 에서 $(D_i, \Lambda) = (D_i^0, \Lambda^0)$ 가 되고, $d_i(t)$, $\lambda(t)$ 를 Maclaurin급수를 이용해 전개하면,

$$d_i(t) = \dot{d}_i t + \frac{1}{2} \ddot{d}_i t^2 + \dots \quad (36)$$

$$\lambda(t) = \dot{\lambda} t + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} t^2 + \dots \quad (37)$$

식(36), (37)을 식(34)에 대입하고 t 의 각 차수에 대한 계수를 0으로 두면 섭동방정식이 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^n k_{ni} \dot{d}_i = f_{n\lambda} \dot{\lambda} \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^n k_{ni} \ddot{d}_i + 2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{nij} \dot{d}_i \dot{d}_j + \sum_{i=1}^n k_{ni\lambda} \dot{d}_i \dot{\lambda} - f_{n\lambda\lambda} \dot{\lambda}^2 \right] = f_{n\lambda} \ddot{\lambda} \quad (39)$$

매트릭스로 나타내면 식(40), (41)과 같이 된다.

$$\mathbf{K} \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{f} \dot{\lambda} \quad (40)$$

$$\mathbf{K} \ddot{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\kappa}(\dot{\mathbf{d}}, \dot{\lambda}) = \mathbf{f} \ddot{\lambda} \quad (41)$$

(\mathbf{K} : 증분구간에 있어서의 접선강성행렬 \mathbf{f} : 하중모드벡터)

식(26), (27)을 이용하여 식(33)의 계수를 구하면 식(42)와 같이 된다

$$k_{11} = \left(1 + \frac{1}{2} H^2 \right) - \frac{3}{2} HD_1^0 + (D_2^0)^2 + \frac{3}{4} (D_1^0)^2$$

$$k_{12} = k_{21} = 2D_1^0 D_2^0 - 2HD_2^0$$

$$k_{22} = 16 - 2HD_1^0 + (D_1^0)^2 + 12(D_2^0)^2$$

$$k_{111} = -\frac{3}{2}H + \frac{3}{2}D_1^0, \quad k_{112} = k_{121} = k_{211} = 2D_2^0 \quad (42)$$

$$k_{122} = k_{212} = k_{221} = 2D_1^0 - 2H, \quad k_{222} = 2AD_2^0$$

$$f_{1\lambda} = 1, \quad f_{2\lambda} = 0, \quad f_{1\lambda\lambda} = 0, \quad f_{2\lambda\lambda} = 0$$

$$k_{11\lambda} = k_{12\lambda} = k_{21\lambda} = k_{22\lambda} = 0$$

따라서 식(42)에 의한 제 1섭동식은,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \quad (43)$$

평형경로상의 시작점인 하중 0인 상태를 나타내는 제 1 step에서는 $D_1^0 = D_2^0 = 0$ 이므로,

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}H^2 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \quad (44)$$

해를 구하면,

$$\dot{d}_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}H^2} \lambda, \quad \dot{d}_2 = 0 \quad (45)$$

제 2 step에서는 식(44)는 식(46)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{2}H^2\right) - \frac{3}{2}HD_1^0 + \frac{3}{4}(D_1^0)^2 & 0 \\ 0 & 16 - 2HD_1^0 + (D_1^0)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda \quad (46)$$

이때의 초기변위는 식(45)로부터,

$$D_1^0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}H^2} \lambda, \quad D_2^0 = 0 \quad (47)$$

$D_2^0 = 0$ 인 경우에는 식(42)로부터 $k_{12} = k_{21} = 0$ 이 성립하며 그 결과 $\dot{d}_2 = 0$ 이 된다.

이는 평형경로상에서 대칭 변형 D_1 만이 존재하고, 비대칭 변형 D_2 가 생기지 않음을 의미한다.

그러나 $k_{22} = 16 - 2HD_1^0 + (D_1^0)^2$ 가 0이 되면 \dot{d}_2 의 존재가 가능해지므로 비대칭 변형 D_2 가 생기게 되는 데, 이 점을 분기점(bifurcation point)이라 하고, 그 때의 하중을 분기좌굴하중이라 정의한다.

분기좌굴의 존재여부는 k_{22} 와 관계가 있으므로 아치의 형상파라미터 H 에 의존함을 알 수 있다.

또한, 형상파라미터가 $H < 2$ 일 경우는 k_{11} 의 해가 존재하지 않고($k_{11} \neq 0$), $H \geq 2$ 일 경우에만 해가 존재하게 되는데($k_{11} = 0$), 이때의 평형경로상의 점을 극한점(limit point)이라 한다. 따라서 $H < 2$ 의 형상에서는 뿔좌굴이 일어나지 않고 일반적인 보와 유사한 거동을 하게 되며, $H \geq 2$ 가 되면 뿔좌굴이 일어나게 된다. 또한, k_{22} 는 $H < 4$ 일 경우에 해가 존재하지 않으며($k_{22} \neq 0$), $H \geq 4$ 경우에만 해가 존재한다($k_{22} = 0$).

이는 $H \geq 4$ 가 되면 비대칭변형모드가 생겨서 대칭모드와 비대칭모드가 서로 연성하면서 분기좌굴을 일으키게 됨을 의미한다.

그림 2에서는 형상파라미터 H 의 변화에 따라 평형경로를 추적한 것이다. 여기서는 완전형태의 아치의 결과이고, 분기좌굴경로는 나타나지 않고 $H \geq 2$ 의 경우에 뿔좌굴만이 존재함을 알 수 있다.

그림 3에서는 형상파라미터 H 의 변화에 따라 k_{11} , k_{22} 의 변화를 나타낸 것으로, $H = 1$ 일 때는 불안정현상이 나타나지 않으며, $H = 3$ 일 경우는 k_{11} 이 먼저 0에 접근하여 뿔좌굴을 나타낸다. 그러나 $H = 5$,

7인 경우에는 k_{22} 가 먼저 0에 접근하면서 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다.

그림 4에서는 D_2 의 형상초기불완전이 $0.001H$ 만큼 존재할 때의 결과이고, $H \geq 4$ 일 때 평형경로상에서 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다. (a)는 D_1 의 평형경로를, (b)는 D_2 의 평형경로를 나타낸 것이다.

$H = 1, 3$ 일 경우는 D_2 모드가 나타나지 않으며, 주로 D_1 에 의존함을 알 수 있다. 그러나 $H = 5, 7$ 일 경우는 분기좌굴하중 근방에서 D_2 가 급격히 증가하며 D_1 과 D_2 가 서로 연성하며 분기좌굴을 나타냄을 알 수 있다.

다음은 $H=7$ 일 경우에 D_1 과 D_2 와의 관계를 그림 5에서 나타낸다.

형상초기불완전량을 $0.001H, 0.01H, 0.1H$ 로 변화시켰을 경우의 평형경로의 변화를 나타낸 것으로, 분기점 근방에서 타원을 형성함을 알 수 있다.

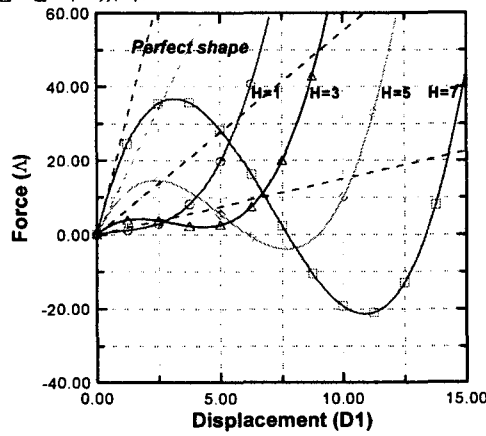


그림 2 완전형상아치의 평형경로

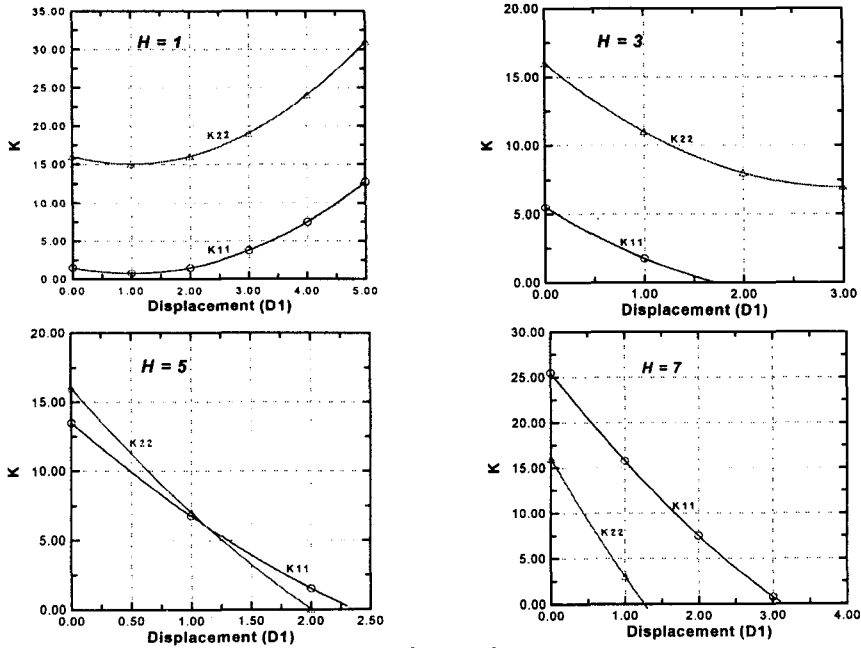


그림 3 k_{11} 및 k_{22} 의 변화

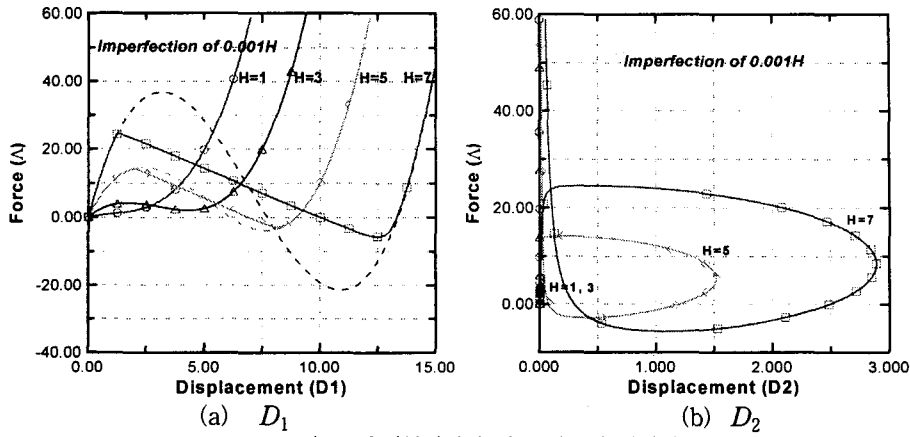


그림 4 초기불완전이 있는 경우의 평형경로

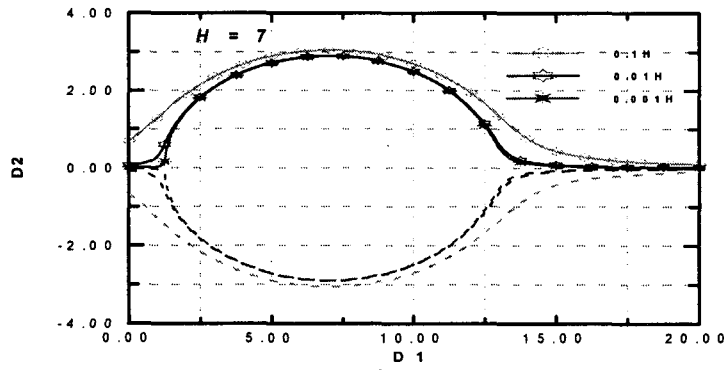


그림 5 $D_1 - D_2$ 관계

5. 결 론

본 연구에서는 아치 구조물의 불안정현상을 파악하기 위하여 비선형 방정식을 유도하고, 이를 Galerkin법에 의해 이산화시킨 후 섭동법을 이용하여 좌굴해석을 하였다. 대상모델은 정현형 분포하중을 받는 정현형 아치로 하였고 그 결과는 형상 파라미터 H 의 변화에 따라 다음과 같이 나타났다.

- 1) $H < 2$ 일 경우 : 불안정현상이 나타나지 않음.
- 2) $2 \leq H < 4$ 일 경우 : 뽕좌굴(snap-through)이 나타남.
- 3) $H \geq 4$ 일 경우 : 분기좌굴(Bifurcation)이 나타남.

감사의 글

본 연구는 초대형 구조시스템 연구센터(STRESS)의 지원에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다

참고문헌

1. 김승덕 외 다수 공저, 대공간 구조물의 해석 및 설계, 한국전산구조공학회 교재 15-2, pp.3-28.
2. 半谷裕彦, 川口健一 共著, 形態解析, 培風館, 1991, pp.141-163.
3. Lock, M. H., "Snapping of a Shallow Sinusoidal Arch under a Step Pressure Load," *AIAA Journal*, AIAA, Vol. 4, No. 7, July, 1966, pp.1249-1256.
4. Gjelsvik, A. & Bodner, S. R., "The Energy Criterion and Snap buckling of Arches," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 88, No. EM5, October, 1962, pp.87-134.