

탄성지지된 3경간 연속 철근 콘크리트교의 간편한 진동해석

Simple Method of Vibration Analysis of Three Span Continuous Reinforced Concrete Bridge with Elastic Intermediate Supports

김 덕 현* 박 제 선** 김 성 환*** 이 정 호***
Kim, Duk-Hyun Park, Je-sun Kim, Seong-Hwan Lee, Jung-ho

ABSTRACT

A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beams and tower structures, with irregular cross sections and with arbitrary boundary conditions was developed and reported by Kim, D. H. in 1974. In this paper, the result of application of this method to the three span continuous reinforced concrete bridge with elastic intermediate supports is presented.

Such bridge represents either concrete or sandwich type three span bridge on polymeric supports for passive control or on actuators for active control.

Any method may be used to obtain the deflection influence surfaces needed for this vibration analysis. Finite difference method is used for this purpose, in this paper. The influence of the modulus of the foundation and D_{22} , D_{12} , D_{66} stiffnesses on the natural frequency is thoroughly studied.

1. 서 론

노후화된 사회간접시설은 전세계적으로 심각한 문제로 대두 되고 있다. 이와같은 구조물의 보수를 결정하기 위해서는 신뢰할 수 있는 비파괴 검사가 필요하다. 비파괴 검사중 신뢰할수 있는 하나의 방법은 고유진동수를 구하여 현재상태의 강성을 구한 다음, 설계상태의 강성과 비교함으로써 구조물의 손상정도를 좀더 정확하게 예측하는 것이다.

거더와 가로보, 콘크리트 상판을 포함하는 대부분의 교량 구조는 특별직교 이방성 판과 같이 거동하며 이러한 패널 뿐만아니라 건물 바닥판 패널의 몇몇 경우도 단순지지된 특별직교 이방성 판과 같이 거동한다.

또한 구조물에 passive 또는 active control용 장비들이 사용될 수 있는데 이러한 장치들이 사용될 때에는 이론적으로 탄성지지된 것과 같이 작용하며, 이럴 경우 고유진동수를 구하는 것은 상당한 어려움이 있다.

불규칙 단면을 갖는 보와 타워 구조물의 제1모드에서의 고유진동수를 구하는 정확한 방법은 1974년 김덕현에 의해 발표되었다. 최근 이방법은 복합판을 포함하는 2차원 문제로 확장되었으며, 전단변형의 영향을 받는 경우와 다양한 경계조건을 갖는 복합재료판에도 적용되었으며, 미국토목학회의 1990년 제8차 구조공학 학술발표회와 1996년 4차 재료공학 학술발표회를 포함하는 여러 회의에서 발표되었다.

이 논문에서는 표제의 문제에 대한 이 방법의 응용 결과가 주어진다.

* KOREA COMPOSITES 소장

** 강원대학교 토목공학과 교수

*** 다산 엔지니어링

**** 강원대학교 토목공학과 박사과정

2. 사용된 이론

2.1 사용된 진동 이론

고유진동수 ω 를 구하기 위하여 다음의 과정이 취해진다. 어떤 몇 개의 점에서 최대 처짐의 진폭은 임의로 주어진다.

$$w(i,j)(1) = W(i,j)(1) \quad (1)$$

여기서 (i,j) 는 고려한 점을 나타낸다.

이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한(최대) 진폭에 대응하는 동적힘은

$$F(i,j)(1) = -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \quad (2)$$

이다. 이 힘에 의해 일어나는 "새로운" 변위는 F 의 함수이고 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} w(i,j)(2) &= f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \\ &= \sum \Delta(i,j,k,1) \{ -m(i,j)[\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 Δ 는 처짐에 대한 영향계수이다.

공명상태하에서 구조부재의 모든 점에서 고려한 $w(i,j)(1)$ 과 $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1)/w(i,j)(2) = 1. \quad (4)$$

이 방정식으로 부터 (i,j) 의 각 점에서의 $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만, 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로 $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은값이 모든 (i,j) 점에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진 $\omega(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 또한 처짐이 최대인 곳에서 $\omega(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다.

2번째 cycle의

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j)[\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \quad (5)$$

에서 $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. Composite 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 간단하지 않은 지지조건을 가진 판, 복잡한 경계조건등의 경우에, 이 판을 몇개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 결과의 정확성은 처짐계산의 정확도에 비례한다.

2.2 유한 차분법

이 논문에서는 표제의 문제 해결을 위해 김덕현의 방법을 이용하였으며 이 방법에 필요한 변위의 영향면은 유한 차분법으로 구했다. 특별직교 이방성 복합판의 힘에 대한 지배방정식은 처짐 w 에 관한 4차의 단일 미분항을 갖는다. 따라서 중심차분법을 사용한다 하더라도 소요되는 pivotal point의 수가 한방향으로 5개가 되므로, 가상점을 소거시키는데 계산상 번잡을 일으킨다. 그러나 평형방정식을 3개의 종속변수 w, M_x, M_y 를 가진 3개의 2차 연립편미분 방정식으로 나타낼 수 있다. 그래서 이 3개의 방정식을 풀게 되면 최종적으로 처짐과 모멘트를 한 번에 구할 수 있는 장점이 있다. 차분법에 의한 matrix는 경계조건 등을 포함하고 방대한 크기가 되는데, tri-diagonal matrix해법으로 간단히 계산될 수 있다[3].

F.D.M.의 정밀도를 증명하기 위해, 형상비 $a/b=1, m=1$ 을 갖는 $[A/B/A]$, 형태의 적층복합판이

고려되었다. 재료의 물성은 다음과 같다 ;

$$E_1 = 67.36 \text{ GPa}, \quad E_2 = 8.12 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.272,$$

$$\nu_{21} = 0.0328, \quad G_{12} = 3.0217 \text{ GPa},$$

ply 두께는 0.005m이다. r값이 증가함에 따라 B_{16} , B_{26} , D_{16} , 그리고 D_{26} 는 감소하고 특별직교 이방성 판의 식을 사용할 수 있다. 단순하게 $A=0^\circ$, $B=90^\circ$ 그리고 $r=1$ 로 가정한다. 그러면 $D(1,1)=18492.902 \text{ Nm}$ 이다. 특별직교 이방성 판의 효과적인 해석적 해의 하나가 4번단순지지되었을 때의 Navier solution이기 때문에, F.D.M.이 이 문제를 푸는데 사용되고 그 결과가 Navier solution과 비교 되었다. mesh size는 $\Delta x=a/10=0.1\text{m}$, $\Delta y=b/10=0.1\text{m}$ 이다. 등분포하중 100N/m^2 이 작용할 때, 판의 코너의 원 좌표로부터 (x,y)점의 처짐을 구하고, F.D.M에 대한 Navier solution의 비율을 Table 1에 주어졌다.

Table 1. Deflection ratio of Navier solution to F.D.M. solution

		Navier / F.D.M.				
x(m) \ y(m)		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
0.1	0.1	0.1005946E+01	0.1004916E+01	0.1004713E+01	0.1004916E+01	0.1005946E+01
0.3	0.3	0.1001279E+01	0.1000028E+01	0.9996814E+01	0.1000028E+01	0.1001279E+01
0.5	0.5	0.1000134E+01	0.9989528E+01	0.9985780E+01	0.9989530E+01	0.1000134E+01
0.7	0.7	0.1001279E+01	0.1000028E+01	0.9996815E+01	0.1000028E+01	0.1001279E+01
0.9	0.9	0.1005946E+01	0.1004916E+01	0.1004714E+01	0.1004916E+01	0.1005946E+01

다른 mesh sizes에 대해서도 계산이 수행되어졌고 판중양에서의 최대 오차는 다음과 같다.

$$10 \times 10 \text{ case} : 0.14\% \quad 20 \times 20 \text{ case} : 0.035\% \quad 40 \times 40 \text{ case} : 0.009\%.$$

오차는 1%보다 작다. 이것은 예상된 오차보다 작다.

$$(\Delta_{10})^2 = (0.1)^2 = 0.01 = 1\%, \quad (\Delta_{20})^2 = (0.05)^2 = 0.0025 = 0.25\%, \quad (\Delta_{40})^2 = (0.025)^2 = 0.000625 = 0.0625\%$$

3. 수치 해석 예

3.1 대상구조물

3.1.1 교량 형상과 하중 재하

수치해석에 고려한 교량 형상을 Figure 1에 나타내었다.

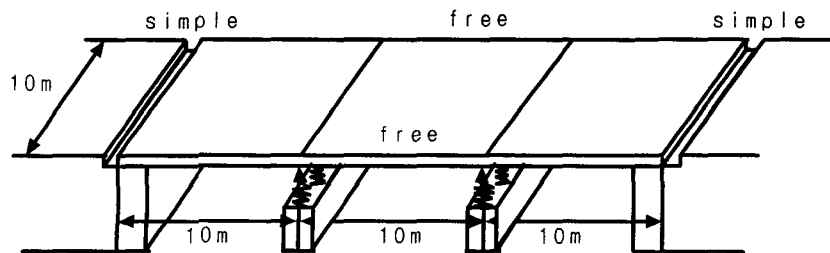


Figure 1. Three span continuous slab bridge

트럭하중의 위치는 figure 2에 보여지는 것과 같다.

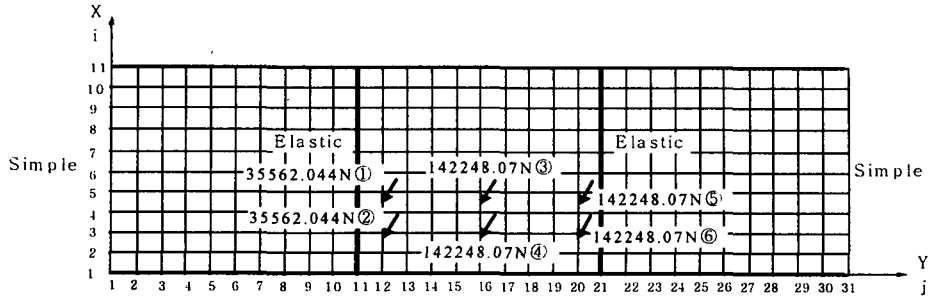


Figure 2. Location of truck loading

3.1.2 철근 콘크리트 슬래브

Figure 3은 단위폭을 갖는 슬래브의 단면을 보여준다.

$\sigma_{ck} = 210 \text{ kg/cm}^2 = 20.5942926 \text{ MPa}$ 그리고 $E_c = 15000\sqrt{\sigma_{ck}} = 21.317118060 \text{ GPa}$.

콘크리트의 포아송 비는 $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.18$ 이다.

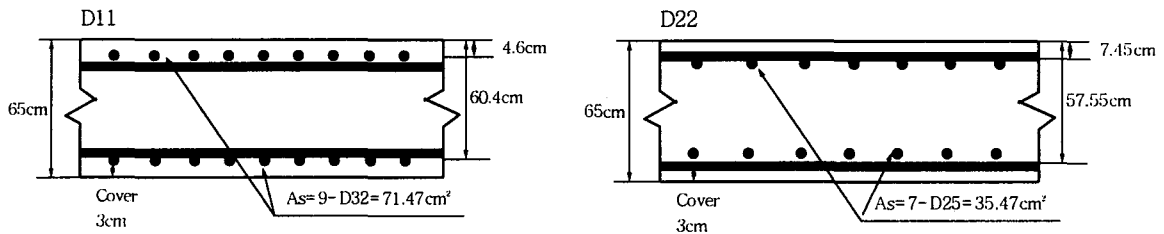


Figure 3. Cross section of the slab with unit width

강성 D_{ij} 를 구하는데 3가지 다른 개념을 채택하였다. . 모든 경우에, bending extension coupling stiffness, B_{ij} 는 단면의 대칭성으로 무시될 수 있다.

Case 1. 단면의 관성모멘트를 계산하는데 철근의 환산단면을 사용한 균형설계.

Case 2. $E_c = 15000\sqrt{\sigma_{ck}} = 21.317118060 \text{ GPa}$, $E_s = 199.92 \text{ GPa}$, 콘크리트의 $Q_{11} = E_c / (1 - \nu_{12}^2)$,

철근의 $Q_{11} = E_s$ 일 때, D_{ij} 에 대한 전형적인 적층이론을 사용한 경우.

Case 3. 최대 휨모멘트에 의한 균열단면을 사용하여 단면의 관성모멘트를 구하여 D_{ij} 를 얻는 경우.

Table 2는 3가지 경우의 휨강성을 보인다.

Table 2. Flexural stiffnesses of three cases (N · m)

Case Stiffness	Case 1	Case 2	Case 3
D ₁₁	351761502.8	323428383.7	323416426.7
D ₂₂	155665708.1	151828300.8	151827047.8
D ₁₂	90690632.4	90690632.4	90690632.4
D ₆₆	206573097.2	206573097.2	206573097.2

모든 경우에, 콘크리트의 사하중은 $2.5t/m^3 \times 0.65m = 15925 \text{ Pa}$ 이다.

지반탄성계수 $k=14504 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ 일 때 3가지 경우의 집중하중지점에서의 처짐을 Table 3에 나타내었다.

Table 4는 같은 k값하에서 3가지 경우의 고유진동수를 나타낸다 : $k=14504 \times 10^6 \text{ N/m}^2$.

강성 D₂₂, D₁₂, 그리고 D₆₆의 영향을 연구하기 위하여, Case-2에 대한 5가지의 sub-case를 Table 5와 같이 고려하였다.

Table 3. The deflections at wheel loading points for three-cases (Unit : m)

Case Load Point	Case 1	Case 2	Case 3
1	0.2786E-03	0.2955E-03	0.2955E-03
2	0.2314E-03	0.2458E-03	0.2458E-03
3	0.2132E-02	0.2300E-02	0.2300E-02
4	0.1901E-02	0.2054E-02	0.2054E-02
5	0.3900E-03	0.4155E-03	0.4155E-03
6	0.3288E-03	0.3504E-03	0.3504E-03

Table 4. The natural frequencies for three-cases (Unit : rad/sec)

Case	Natural Frequency (rad/sec)
Case 1	0.1292903E+02
Case 2	0.1233828E+02
Case 3	0.1233805E+02

Table 5. The stiffnesses of five sub-cases, for Case 2 (Unit : N · m)

Case Stiffness	Case 2-1	Case 2-2	Case 2-3	Case 2-4	Case 2-5
D ₁₁	323428383.7	323428383.7	323428383.7	323428383.7	323428383.7
D ₂₂	151828300.8	209028328.4	266228356.0	323428383.7	323428383.7
D ₁₂	90690632.4	90690632.4	90690632.4	90690632.4	0.
D ₆₆	206573097.2	206573097.2	206573097.2	206573097.2	0.

3.2 수치해석 결과

3.2.1 강성 D_{22} , D_{12} , D_{66} 의 영향

작용하중은 Figure 2에 의해 보여지는 것처럼 콘크리트 사하중과 집중하중을 고려하였다. 기초 탄성계수 $k=14504 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 일 때 Case 2의 5가지 sub-cases에 대한 집중하중점에서 처짐값이 Table 6에 주어졌다.

Table 6. The deflections at wheel loading points for five sub-cases of Case 2 (Unit : m)

Load Point \ Case	Case 2-1	Case 2-2	Case 2-3	Case 2-4	Case 2-5
1	0.2955E-03	0.2920E-03	0.2894E-03	0.2874E-03	0.4409E-03
2	0.2458E-03	0.2432E-03	0.2411E-03	0.2393E-03	0.3177E-03
3	0.2300E-02	0.2264E-02	0.2240E-02	0.2222E-02	0.2778E-02
4	0.2054E-02	0.2028E-02	0.2010E-02	0.1996E-02	0.2319E-02
5	0.4155E-03	0.4082E-03	0.4030E-03	0.3991E-03	0.5739E-03
6	0.3504E-03	0.3451E-03	0.3410E-03	0.3376E-03	0.4426E-03

Table 7은 같은 지반탄성계수 $k=14504 \times 10^6 \text{N/m}^2$ 하에서 5가지 sub-cases의 고유진동수를 나타낸다.

Table 7. The natural frequencies for five sub-cases of Case 2 (Unit : rad/sec)

Case	Natural Frequency (rad/sec)
Case 2-1	0.1233830E+02
Case 2-2	0.1248684E+02
Case 2-3	0.1257711E+02
Case 2-4	0.1263815E+02
Case 2-5	0.1101777E+02

Figure 4는 Table 7을 그래프로 나타낸 것이다.

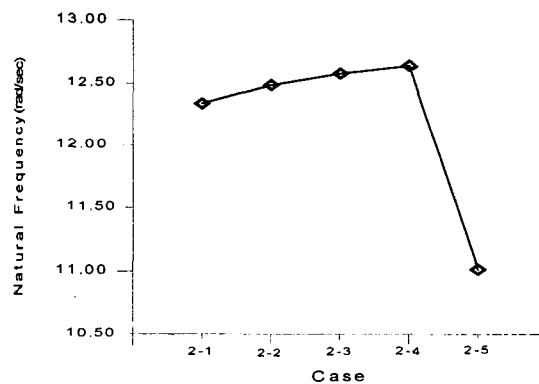


Figure 4. The natural frequency of five sub-cases, for Case 2

3.2.2 지반 반력계수의 영향

지반반력계수 k 의 영향은 k 값을 $14504 \times 10^3 \text{ N/m}^2$ 에서 $14504 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 까지 변화시키면서 고찰 하였다. Table 8은 k 값 변화하에서 Case 2-1인 경우 집중하중점에서의 처짐을 나타낸다.

Table 8. Deflection at loading points for Case 2-1 (m)

Load Point \ $k(\text{N/m}^2)$	14504×10^3	14504×10^4	14504×10^5	14504×10^6	14504×10^7
1	0.1573E-01	0.1912E-02	0.4571E-03	0.2955E-03	0.2774E-03
2	0.1502E-01	0.1810E-02	0.3951E-03	0.2458E-03	0.2296E-03
3	0.1969E-01	0.4159E-02	0.2499E-02	0.2300E-02	0.2272E-02
4	0.1866E-01	0.3849E-02	0.2242E-02	0.2054E-02	0.2029E-02
5	0.1695E-01	0.2225E-02	0.6005E-03	0.4155E-03	0.3944E-03
6	0.1608E-01	0.2083E-02	0.5224E-03	0.3504E-03	0.3311E-03

Table 9는 k 값 변화에 따른 Case 2-1의 고유진동수를 나타낸다.

Table 9. The natural frequency for Case 2-1 (Unit : rad/sec)

$k (\text{N/m}^2)$	Natural Frequency (rad/sec)
14504×10^3	0.8068337E+01
14504×10^4	0.1223924E+02
14504×10^5	0.1232987E+02
14504×10^6	0.1233830E+02
14504×10^7	0.1233943E+02

Figure 5는 Table 8을, Figure 6은 Table 9를 그림으로 나타낸 것이다.

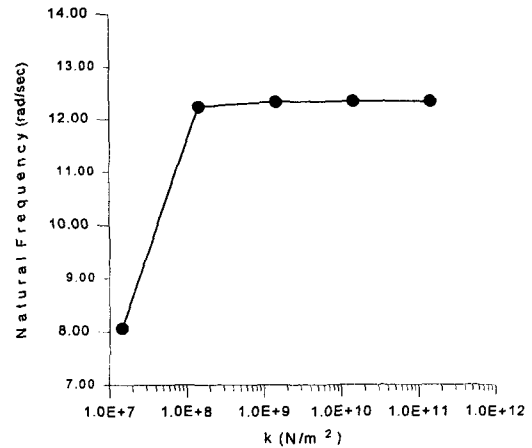
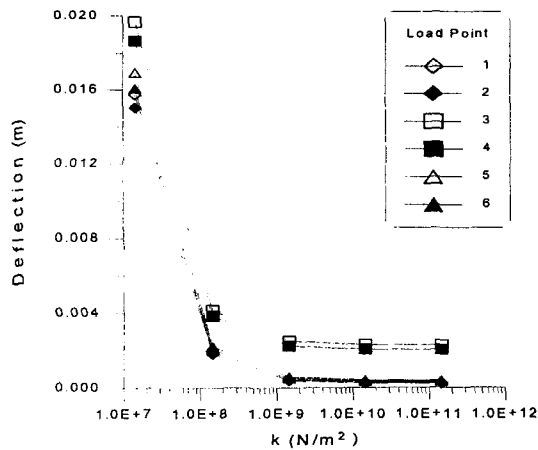


Figure 5. The deflection at loading points for Case 2-1

Figure 6. The natural frequency for Case 2-1

4. 결 론

이 논문에서는 김덕현에 의해 개발되어진 간편하고 정확한 진동해석 방법이 주어진다. 주어진 방법은 매우 정밀하면서도 사용하기에 간편하다. 경계조건과 요소의 강성과 질량이 복잡한 경우에도 쉽게 사용될 수 있다. 처짐의 영향계수를 얻기 위해 어떠한 방법도 이용될 수 있다. 해의 정밀도는 오직 처짐의 영향계수의 정확도에 비례한다. 처짐에 대한 영향계수를 얻는 것은 구조물의 설계와 해석에 있어 첫 번째 단계이다. 주어진 방법의 잇점은 구조물의 고유진동수를 얻기 위해 변위, 처짐각, 모멘트, 전단력등을 구하는데 이미 사용한 값들을 사용할 수 있다는 것이다. 판에 집중 하중 또는 하중균을 갖을 때, 판의 질량에 그들의 질량을 간단히 더할수 있고 고유진동수를 얻기 위해 같은 처짐영향면을 사용할 수 있다. 이방법이 탄성중간지지를 갖는 3경간연속 철근 콘크리트 교량에 적용되었다.

고유진동수에 대한 D_{22} , D_{12} 그리고 D_{66} 강성과 지반반력계수의 효과가 연구되고 그 결과가 실제 엔지니어들에게 지침을 제공하기 위해 표로 주어졌다.

참고문헌

- [1] Kim, D. H., ANALYSIS OF TRIANGULARY FOLDED PLATE ROOFS OF UMBRELLA TYPE, Proc., 16th Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, October, 1966.
- [2] Kim, D. H., THE EFFECT OF NEGLECTING THE RADIAL MOMENT TERMS IN ANALYZING A FINITE SECTORIAL PLATE BY MEANS OF FINITE DIFFERENCES, Proc., International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967.
- [3] Kim, D. H., TRIDIAGONAL SCHEME TO SOLVE SUPER LARGE SIZE MATRICES BY THE USE OF COMPUTER, Journal of Korean Society of Civil Engineers (K.S.C.E.), Vol 15-1, 1967.
- [4] Kim, D. H., METHOD OF VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED STRUCTURAL MEMBERS, Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, October, 1974.
- [5] Kim, D. H., A SIMPLE METHOD OF ANALYSIS FOR THE PRELIMINARY DESIGN OF PARTICULAR COMPOSITE LAMINATED PRIMARY STRUCTURES FOR CIVIL CONSTRUCTION, Journal of Material Processing Technology Vol. 55, Elsevier, London, 1995, pp 242-248.
- [6] Kim, D. H., *Composite Structures for Civil and Architectural Engineering*, E & FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.
- [7] Kim, D. H., VIBRATION ANALYSIS OF SPECIAL ORTHOTROPIC PLATE WITH VARIABLE CROSS-SECTION, AND WITH A PAIR OF OPPOSITE EDGES SIMPLE SUPPORTED AND THE OTHER PAIR OF OPPOSITE EDGES FREE, Proc. of Materials Congress, American Society of Civil Engineers, Washington, DC, November 10-14, 1996.
- [8] Clough, R. W. & Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Inc., 1995, pp 129~142.