

## 탄성기초에 지지되고 양단 축하중을 받는 특별직교 이방성 판의 진동해석

### Vibration analysis of special orthotropic plate with free edges supported on elastic foundation and with a pair of opposite edges under axial forces

김 덕 현\*      원 치 문\*\*      정 경 일\*\*\*      박 정 호\*\*\*\*  
Kim, Duk-Hyun      Won Chi-Moon      Jung Kyung-Il      Park, Jung-Ho

---

#### ABSTRACT

A method of calculating the natural frequency corresponding to the first mode of vibration of beams and tower structures, with irregular cross sections and with arbitrary boundary conditions was developed and reported by Kim, D. H. in 1974. In this paper, the result of application of this method to the special orthotropic plates with free edges supported on elastic foundation and with a pair of opposite edges under axial forces is presented. Such plates represent the concrete highway slab and hybrid composite pavement of bridges. The reinforced concrete slab can be assumed as a special orthotropic plate, as a close approximation. The highway slab is supported on elastic foundation, with free boundaries. Sometimes, the pair of edges perpendicular to the traffic direction may be subject to the axial forces. The plate is subject to the concentrated load/loads, in the form of traffic loads, or the test equipments. Any method may be used to obtain the deflection influence surfaces needed for this vibration analysis. Finite difference method is used for this purpose, in this paper. The influence of the modulus of the foundation, the aspect ratio of the plate, and the magnitudes of the axial forces and the concentrated attached mass on the plate, on the natural frequency is thoroughly studied.

---

#### 1. 서 론

악화된 고속도로 콘크리트 슬래브의 문제는 세계적으로 심각한 문제가 되고 있다. 그러므로, 그 보수작업을 결정하기 전에 신뢰할만한 비파괴 평가가 필요하다. 믿을만한 방법중 하나는 강성값을 이용한 고유진동수 평가이다. 설계시의 고유진동수를 구하여 현상태의 고유진동수와 비교하여 그 손상의 정도를 좀 더

---

\* KOREA COMPOSITE 소장  
\*\* 한라공과대학 건축·토목공학부 교수  
\*\*\* 한석 엔지니어링  
\*\*\*\* 강원대학교 토목공학과 석사과정

정확히 평가할 수 있다. 철근 콘크리트 슬래브는 대체로 특별 직교 이방성 판으로 취급될 수 있다. 고속도로 슬래브의 경우는 자유단을 갖는 전면 탄성지지된 판으로 볼 수 있다. 때로는 교통방향에 수직인 양단에 축방향력이 작용될 수 있다. 그리고 앞으로는 미래의 교량 상판을 위한 최상의 포장 재를 만들기 위한 재료 시험이 필요되어 지며, 그러한 재료중하나가 상판부 전 단면에 걸쳐 형성된 마모가 적은 강한 폴리머에 그 물과 같은 섬유를 삽입한 첨단 복합재료이다. 그러한 포장재료도 역시 자유단을 가지며, 탄성기초된 특별 직교 이방성 판으로 거동할 것이다. 그러한 재료는 고속도로 포장과는 달리 교통 진행방향과 평행한 방향으로 축방향력이 작용된다고 볼 수 있다. 또한 그러한 경우 판은 교통하중이나 시험 차량의 형태인 판에 수직 방향으로의 집중하중이나 집중하중 군에 의해 지배되는데 이러한 경우의 해석은 매우 어렵다. 대부분의 토목·건축 구조물은 치수가 크고 적층수도 크며 두께와 길이의 비가 작아서 응력 해석에 있어서 횡방향의 전단 변형 효과를 무시할 수 있다. 그러한 판의 경우, 특별 직교 이방성 판이론을 위한 충분히 많은 섬유 배양각이 적용될 수 있다. 이런 경우의 간편식이 김덕현에 의해 사용되어졌다[3]. 간편하면서도 정확한 보와 타워구조와 같은 불규칙 단면을 갖고, 임의의 경계조건인 구조물의 제 1모드의 고유진동수를 계산하는 방법이 김덕현에 의해 1974년 보고되고 발전되었다[17]. 이 방법은 공명상태하에서의 판성력에 기인하는 요소의 처짐 모드 형태의 결정으로 구성된다. 초기 추측 모드 형태에서 시작하여 유사한 반복 과정에 의해 정확한 모드 형태가 얻어진다. 최근 이 방법은 복합 적층판을 포함한 2차원의 문제로도 확장되어 전단 처짐 효과를 포함하거나 하지않는 다양한 경계조건을 가진 판해석에 적용되고 있으며, 여러 국제 학회에도 발표된바 있다 [6, 12]. 이 논문에서는 이 방법에 필요한 변위의 영향계수를 구하기 위해 유한 차분법을 사용했으며, 판의 기초 탄성 계수, 판의 형상비, 그리고 축방향력의 크기, 그리고 집중된 첨가 질량등의 고유진동수에 대한 영향이 연구된다.

## 2. 해석 방법

이 논문에서 사용된 방법은 김 덕 현의 저서에 상세히 설명되어 있다[1]. 어떤 점의 최대 처짐 크기는 다음과 같이 임의로 주어진다.

$$w(i,j)(1) = W(i,j)(1) \dots\dots\dots(1)$$

여기서 (i,j)는 고려한 점을 나타낸다. 이것은 절대적으로 임의의 값이지만 경험에 의해 가정하면 수렴을 촉진시키는데 더욱 좋다. 이러한 최대 진폭에 대응하는 동적 힘은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$F(i,j)(1) = m(i,j) [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \dots\dots\dots(2)$$

이 힘에 의해 일어나는 새로운 변위는 F의 함수이고 다음 식과 같이 쓸 수 있다

$$w(i,j)(2) = f \{ m(i,j) [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \\ = \sum \Delta(i,j,k,l) \{ m(i,j) [\omega(i,j)(1)]^2 w(i,j)(1) \} \dots\dots\dots(3)$$

여기에서  $\Delta(i,j,k,l)$ 는 처짐에 대한 영향 계수이다.

공명 상태하에서 구조 부재의 모든 점에서 고려한  $w(i,j)(1)$ 과  $w(i,j)(2)$ 는 동일해야 하고 다음 식의 조건을 만족해야 한다.

$$w(i,j)(1) / w(i,j)(2) = 1 \dots\dots\dots(4)$$

식(4)의 방정식으로 부터 (i,j)의 각 점에서의  $\omega(i,j)(1)$ 이 얻어질 수 있지만 대부분의 경우에 일치하지 않는다. 구조부재의 고유 진동수가 부재의 모든 점에서 동일해야 하므로  $\omega(i,j)$ 의 충분한 같은 값이 모든(i,j)점

에서 얻어질 때까지 이 과정이 반복된다. 그러나 대부분의 경우에 첫번째 cycle의 계산에 의해 얻어진  $w(i,j)$ 의 최대와 최소값의 차이는 공학적으로 충분히 무시 될 수 있다. 정확도는 최대와 최소치의 평균을 취하거나 처짐이 최대인 곳에서  $w(i,j)$ 의 값을 취함으로써 개선될 수 있다. 두 번째 cycle에서의 처짐은 다음 식과 같이 구해질 수 있다.

$$w(i,j)(3) = f \{ m(i,j) [\omega(i,j)(2)]^2 w(i,j)(2) \} \quad \dots\dots\dots(5)$$

식(5)에서  $w(i,j)(2)$ 의 절대적 수치가 편리하게 사용될 수 있다. 복합재료 구조물을 포함하여 불규칙한 단면과 이상적이 아닌 지지 조건을 가진 판의 경우 이 판을 몇 개의 요소로 나누어 고려하는 것이 편리하다. 이 방법은 구조물의 고유 진동 해석을 위해 매우 정확하고 간편한데 이 방법의 정확성은 처짐영향계수의 정확성에 비례한다.

### 3. 수치 해석의 예

[A/B/B/C/A/A/B]<sub>r</sub> 적층형태가 고려되었다. 재료의 특성은 다음과 같다.

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, E_2 = 8.27 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = 0.26, \nu_{21} = 0.0557, G_{12} = 4.14 \text{ Gpa.}$$

단위 층의 두께는 0.000125m.  $r$ 이 증가함에 따라,  $B_{16}$ ,  $B_{26}$ ,  $D_{16}$ 와  $D_{26}$  값이 감소하며, 특별 직교 이방성 판의 방정식이 사용될 수 있다. 간단히 하기 위해, 적층판의 배양은  $A=45^\circ$ ,  $B=-45^\circ$ ,  $C=90^\circ$  그리고  $r=22$ 로 한다.

#### 3.1 유한 차분법 (F.D.M.)

이 논문에서는 처짐 영향면을 구하기 위해 F.D.M.이 사용되었다. 특별 직교 이방성 복합판의 휨에 대한 지배방정식은 처짐  $w$ 에 관한 4차 단일 미분항을 갖는다. 그러므로 소요되는 Pivotal Point수는 중앙차분 사용시 한 방향으로 5개가 되며, 가상점 소거에 번잡함을 가져온다. 그러므로 판의 평형방정식을 3개의 종속변수  $w$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ 를 갖는 2차 연립 미분 방정식으로 표현하여 3개의 방정식을 통해 처짐과 모멘트를 구한다[14]. 이는 또한 한번에 처짐과 모멘트를 구해낼 수 있는 장점을 가졌다. 3개의 방정식에 적용된 차분법에 의한 matrix는 경계조건 등을 포함하여 그 크기가 방대하다. 이를 해결하기 위해 김덕현은 tri-diagonal matrix해법을 사용하여 이러한 문제를 효과적으로 해결하였다[14,15,16].

#### 3.2 유한 차분식의 정확도 분석

임의의 경계조건을 갖는 판에 대한 해석해가 없으므로 부득이하게 네변이 모두 단순지지 되었을 경우에 비교적 정확해로 알려진 Navier해법과 유한차분법의 해를 비교하여 그 정확함을 입증하였다. 여기에 사용된 형상비는  $l_m/l_m=1$ , mesh의 크기는  $\Delta x=0.1$ ,  $\Delta y=0.1$ 였다.

#### 3.3 판의 형상비와 기초 탄성 계수의 영향

이 연구에서는 기초 탄성계수를  $k$ 로 하여 보조기층의 반력 크기를  $kw(N/m)$ 로 단순 가정하였다. 판의 입체도는 그림 1과 같다.

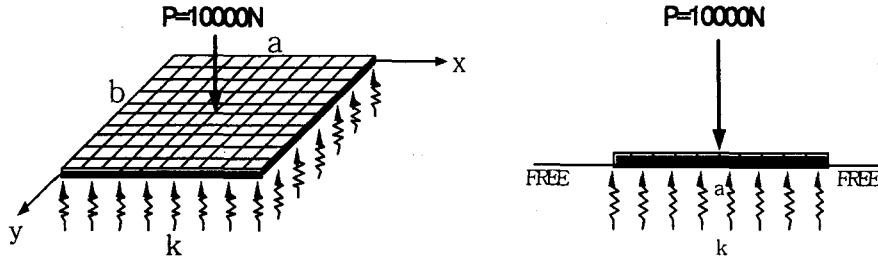


그림 1. 판의 입체도와 하중

적층 배양각은 위에 주어진 재료 특성을 갖는  $[45^0, -45^0, -45^0, 90^0, 45^0, 45^0, -45^0]_{22}$ 로 하였다. 기초 탄성계수  $k$ 와 판의 형상비( $a/b$ )의 조건별로의 판 중심에서의 처짐이 표 1에 주어졌다. 그림 2는 표 1의 결과를 나타낸다.

표 1. 판의 중심에서의 처짐 (m)

(  $N_x=1000$  N/m)

$a/b$	$k(N/m^3)$	$k=10^5$	$k=10^6$	$k=10^7$	$k=10^8$	$k=10^9$
1		0.157464E-01	0.174296E-02	0.416537E-03	0.132746E-03	0.413241E-04
2		0.763536E-02	0.145253E-02	0.403906E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
3		0.716962E-02	0.142352E-02	0.404193E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
4		0.693619E-02	0.141226E-02	0.404183E-03	0.132654E-03	0.413241E-04
5		0.673492E-01	0.141228E-02	0.404184E-03	0.132654E-03	0.413241E-04

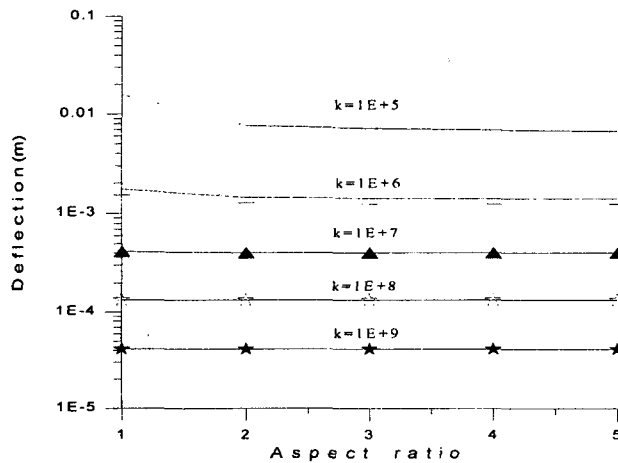


그림 2. 각각의 형상비와 기초 탄성계수 조건에 따른 판 중심의 처짐 ( $N_x=1000$  N/m)

위의 진동해석 방법에 의한 결과가 표 2와 그에 대한 그래프가 그림 3에 주어져 있다.

표 2. 각각의 기초 탄성 계수와 형상비 조건에 따른 고유진동수 (rad/sec)

( $N_x=1000$  N/m)

a/b \ k(N/m <sup>3</sup> )	$k=10^5$	$k=10^6$	$k=10^7$	$k=10^8$	$k=10^9$
1	7.71164	22.86935	48.69064	86.63852	155.4520
2	10.86166	25.66662	49.43317	86.66915	155.4520
3	11.21350	26.02688	49.43380	86.66916	155.4521
4	11.38889	26.04412	49.44381	86.66919	155.4522
5	11.42447	26.04678	49.45140	86.66920	155.4522

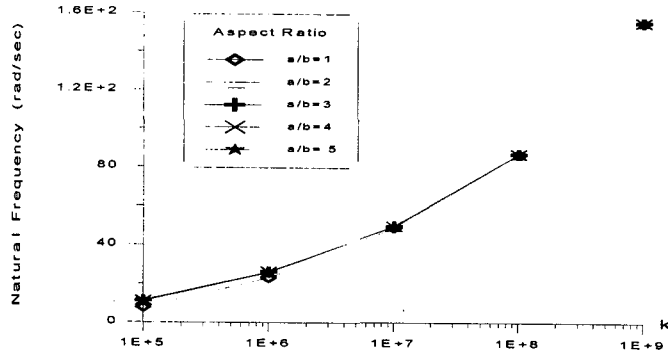
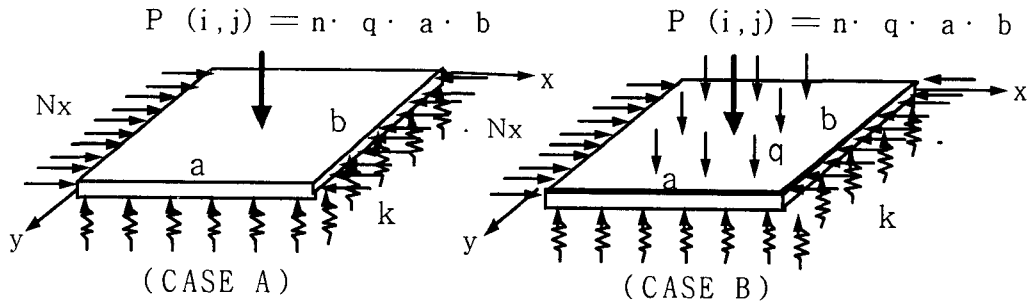


그림 3. 각각의 기초 탄성 계수와 형상비 조건에 따른 고유진동수

### 3.4 집중하중의 영향

그림 4는 판의 배양각과 재하 조건을 보여준다. 조건은  $[45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]_{22}$ ,  $a=1m$ ,  $b=1m$ ,  $k=7MN/m^3$ ,  $N_x=1000$  N/m 그리고  $q=367.8675N/m^2$ .  $n$ 은 정수배.  $P(i,j)$ 는 판의 중심 하중. 표 3은 각  $n$ 값에 따른 판의 중심 처짐을 보여준다. 표 4는 각  $n$ 값에 따른 판의 고유진동수를 보여준다.



$$a=b=1m, k=7MN/m^3, N_x=1000 \text{ N/m}, q=367.8675N/m^2, [45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, -45^\circ]_{22}$$

그림 4. 판의 하중 조건

표 3. 판의 중심 처짐 (m)

n	CASE A	CASE B	CASE A /CASE B
0		0.5250E-04	
1	0.1865E-03	0.2590E-03	0.7803
3	0.5595E-03	0.6120E-03	0.9145
5	0.9325E-03	0.9850E-03	0.9367
7	0.1306E-02	0.1358E-02	0.9411
10	0.1865E-02	0.1917E-02	0.9581
20	0.3730E-02	0.3782E-02	0.9786

표 4. 고유진동수 (rad/sec)

n	CASE A	CASE B	CASE A /CASE B
0		13.78558	
1	7.322637	6.768390	0.9243
3	4.227726	4.117696	0.9740
5	3.274783	3.223351	0.9843
7	2.767696	2.736574	0.9888
10	2.315621	2.297361	0.9921
20	1.637319	1.630922	0.9961

각 형상비에 따른 축력의 영향이 표 5에 주어져 있다.

표 5. 각 형상비와 각 축력 조건에 따른 고유진동수 (rad/sec)

k=10<sup>7</sup>(N/m<sup>2</sup>)

Nx(N/m) a/b	1000	3000	5000	7000	10000
1	48.68064	48.64727	48.61361	48.52819	48.16460
2	49.43140	49.40760	49.37989	49.31506	49.05111
3	49.43317	49.40827	49.38069	49.31756	49.05547
4	49.43380	49.41567	49.38266	49.31832	49.05650
5	49.43381	49.42568	49.39196	49.31836	49.05657

## 6. 결 론

이 논문에서는 김 덕 현에 의한 간단하고 정확한 진동해석 방법이 소개되었다. 소개된 방법은 사용하기 쉽고 매우 정확하다. 임의의 경계조건에 사용될 수 있다. 요소의 질량과 강성은 다양하게 할 수 있다. 이 방법에 필요한 영향 계수를 구하기 위해 어떠한 방법을 사용해도 좋다. 진동해석 결과의 정확성은 처짐 영향 계수의 정확성에 비례한다. 구조물의 해석과 설계를 위해서는 처짐 영향계수를 구하는 것이 첫 단계임을 생각해야 한다. 소개된 방법의 우수성은 구조물의 고유진동수를 구하기 위해 계산된 처짐 영향계수로 처짐, 처짐각, 모멘트, 전단력을 모두 구할 수 있다는 것이다. 집중하중이나 집중하중균이 작용할 경우에 간단히 판의 자중에 이들 하중을 추가할 수 있으며, 고유진동수를 얻기위해 같은 처짐 영향면을 사용할 수 있다. 이 방법은 축하중을 받고 탄성기초 위에 놓여진 자유단인 특별 직교 판에 적용하였다. 그러한 판의 경우는 교량 상판의 혼성 복합 포장과 고속도로 콘크리트 슬래브 등이 있다. 교량의 상판 포장과 고속도로 포장의 경우 교통 방향에 평행한 방향으로, 진행되는 트럭에 의한 충격 내지는 온도 변화 등에 의해 교통방향에 직각인 한 쌍의 경계에서 축하중을 받는 경우가 있다.

이 논문에서는 유한 차분법을 이용하여 처짐 영향면을 구하였으며, 기초 탄성계수, 판의 형상비, 그리고 축방향력의 크기의 고유진동수에 대한 영향이 연구되었다. 그리고 그 결과가 설계 기술자들에게 도움을 주고자 표와 그림에 주어졌다.

## 참 고 문 헌

- [1] *Kim, D. H.*, Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, Published by E & FN SPON, Chapman & Hall, London, 1995.
- [2] *Kim, D. H.*, COMPOSITE MATERIALS FOR REPAIR AND REHABILITATION OF BUILDINGS AND INFRASTRUCTURES, Plenary Lecture at The Third International Symposium on Textile Composites In Building Construction, Seoul, Korea, November 7-9, 1996.
- [3] *Kim, D. H.*, A SIMPLE METHOD OF ANALYSIS FOR THE PRELIMINARY DESIGN OF PARTICULAR COMPOSITE LAMINATED PRIMARY STRUCTURES FOR CIVIL CONSTRUCTION, Journal of Materials Processing Technology Vol. 55, Elsevier, London, 1995, pp 242-248.
- [4] *Kim, D. H.*, POSSIBILITY OF USING THE CLASSICAL MECHANICS FOR THE PRELIMINARY DESIGN OF LAMINATED COMPOSITE STRUCTURES FOR CIVIL CONSTRUCTION, Proc of KSCE Conference, October, 1991.
- [5] *Kim, D. H.*, A SIMPLIFIED METHOD OF VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED COMPOSITE STRUCTURAL ELEMENTS, First International Society for the Advancement of Material and Process Engineering Symposium (JISSE 1), Tokyo, December, 1989.
- [6] *Kim, D. H.*, VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED COMPOSITE STRUCTURAL MEMBERS - FOR HIGHER MODES, 8th Structures Congress, ASCE, Baltimore, MD., U.S.A., April 30 - May 3, 1990.
- [7] *Kim, D. H.*, VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED LAMINATED THICK COMPOSITE PLATES, ICCM 8, Honolulu, Hawaii, July, 1991.
- [8] *Kim, D. H.*, DESIGN OF COMPOSITE MATERIAL STRUCTURES, China-Japan-USA Trilateral Symposium /Workshop on Earthquake Engineering, Harbin, China, November, 1991.
- [9] *Kim, D. H.*, VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED LAMINATED THICK COMPOSITE PLATES 2, JISSE-2, Tokyo, December, 1991.
- [10] *Kim, D. H.*, THE EFFECT OF CONCENTRATED MASS/MASSES ON THE NATURAL FREQUENCY OF VIBRATION OF SPECIAL ORTHOTOPIC LAMINATES WITH VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS, Third Asian-Pacific Conference on Computational Mechanics, Sheraton Hotel, Seoul, Korea, September 16-18, 1996.

- [11] *Kim, D. H.*, THE EFFECT OF NEGLECTING OWN WEIGHT ON THE NATURAL FREQUENCY OF VIBRATION OF LAMINATED COMPOSITE PLATES WITH ATTACHED MASS/MASSES, The Third International Symposium on TEXTILE Composites In Building Construction, Seoul, Korea, November 7-9, 1996.
- [12] *Kim, D. H.*, VIBRATION ANALYSIS OF SPECIAL ORTHOTROPIC PLATE WITH VARIABLE CROSS-SECTION, AND WITH A PAIR OF OPPOSITE EDGES SIMPLE SUPPORTED AND THE OTHER PAIR OF OPPOSITE EDGES FREE, Fourth Materials Congress, American Society of Civil Engineers, Washington, DC, November 10-14, 1996.
- [13] *Kim, D. H.*, ANALYSIS OF TRIANGULARLY FOLDED PLATE ROOFS OF UMBRELLA TYPE, 16th Congress of Applied Mechanics, Tokyo, Japan, October, 1966.
- [14] *Kim, D. H.*, THE EFFECT OF NEGLECTING THE RADIAL MOMENT TERMS IN ANALYZING A FINITE SECTORIAL PLATE BY MEANS OF FINITE DIFFERENCES, International Symposium on Space Technology and Sciences, Tokyo, Japan, May, 1967.
- [15] *Kim, D. H.*, TRIDIAGONAL SCHEME TO SOLVE SUPER LARGE SIZE MATRICES BY THE USE OF COMPUTER, Jour., K.S.C.E., Vol 15-1, 1967.
- [16] *Kim, D. H.*, GENERAL THEORY AND APPROXIMATE METHOD OF ANALYSIS OF NON-PRISMATIC FOLDED PLATE STRUCTURES, Jour., K.S.C.E., December, 1971.
- [17] *Kim, D. H.*, A METHOD OF VIBRATION ANALYSIS OF IRREGULARLY SHAPED STRUCTURAL MEMBERS, Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, Seoul, Korea, October, 1974.