

## 회전자유도를 갖는 평면셀요소에 의한 박판구조물의 기하비선형해석

Geometrical Nonlinear Analysis of Thin-walled Structures  
by Flat Shell Elements with Drilling D.O.F.

최창근\*                      송명관\*\*  
Choi, Chang-Koon          Song, Myung-Kwan

---

### ABSTRACT

A nonlinear finite element formulation of flat shell elements with drilling d.o.f. is presented for the geometrical nonlinear analysis of thin-walled structures. The shell element to be applied in finite element analysis was developed by combining a membrane element named as CLM with drilling rotation d.o.f. and plate bending element. The combined shell element possesses six degrees of freedom per node. The element showed the excellent performance in the linear analysis of the folded plate structures, in which the normal rotational rigidity of folded plates is considered, therefore, using this element geometrical nonlinear analysis of those structures is fulfilled in this study. An incremental total Lagrangian approach is adopted throughout in which displacements are referred to the original configuration. Comparing the results with those of other researches shows the performance of this element and a folded plate structure is analyzed as an example.

---

### 1. 서론

박판구조물과 같이 판(plate)의 결합으로 이루어진 구조물을 수치해석함에 있어서 유한요소해석이 많이 사용되고 있고, 주로 셀요소 또는 입체요소로 모델링하여 해석하게 된다. 그러나, 일반적으로 5개의 자유도(d.o.f.)를 갖는 셀요소를 사용하여 해석할 경우에는 판이 접하는 부분에서 연직방향 회전(drilling d.o.f.)의 강성과 그 영향을 정확하게 판단하지 못함으로 인하여 해석 결과가 정확하지 않거나, 정확한 해석을 위해서는 요소 세분화 및 특수한 방법을 요구하게 되고, 입체 요소를 사용하여 해석할 경우에는 구조물을 많은 수의 입체요소로 세분화해야 하는 과정을 거쳐야 하므로 효율성을 잃게 된다. 따라서, 이러한 단점들을 극복하고 정확한 유한요소해석 결과를 얻기 위해서는 판의 연직방향 회전에 대한 적절한 강성 평가와 그 영향들이 고려된 새로운 셀요소를 사용하여야 한다. 뿐만 아니라, 유한요소해석에 의한 실제적인 구조 해석시에 나타나는 셀요소와 다른 회전 자유도를 갖는 요소들 간의 연결 문제를 해결하기 위해서는 연직방향 자유도가 있는 셀요소의 개발과 사용이 필요하게 된다. 이러한 연구는 최근 유한요소해석 분야에서 활발히 연구되고 있으며, 많은 방법들이 제시되고 있다.

---

\* 한국과학기술원 토목공학과 교수

\*\* 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

회전자유도를 갖는 평면응력요소 CLM과 평판휨요소를 결합하여 개발된 CLS요소(Choi and Lee, 1995)는 이미 많은 시험예제해석을 통하여 선형탄성영역에서는 정확한 해석결과를 주는 것으로 검증되었으며, 본 연구에서는 기하비선형 영역으로 확장시켜서 적용하게 된다. 일반적인 기하비선형 해석법으로는 total Lagrangian approach와 updated Lagrangian approach로 분류되는 데, 본 연구에서는 비선형 수식화 방법으로 total Lagrangian approach를 채택하여 사용한다. 이 방법은 updated Lagrangian approach와는 달리 변위 진행에 따른 요소좌표계의 변화를 고려하지 않으면서 updated Lagrangian approach와 같은 정도의 정확한 해석이 가능하다. 그러나, 해석 시간이 길어지는 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 incremental total Lagrangian approach를 채택하여 CLS요소에 의한 박판 구조물의 기하비선형 해석방법을 제시하고, 예제 해석을 통해 고찰한다.

## 2. 기하비선형 수식화 과정(formulation)

CLS요소는 요소 절점들이 공유하는 1개의 평면 상에서 요소좌표계를 정의하기 때문에 변위 진행에 따라 절점들이 한 평면 상에 존재하지 않을 때에는 요소좌표계의 재구성이 불가능하게 된다. 따라서, 본 연구에서는 비선형 수식화 방법으로 total Lagrangian approach를 채택하여 사용한다. 이 방법은 updated Lagrangian approach와는 달리 변위 진행에 따른 요소좌표계의 변화를 고려하지 않으면서 updated Lagrangian approach와 같은 정도의 정확한 해석이 가능하다.

CLS요소의 응력, 합응력(stress resultants), 변형률은 요소좌표계에서 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{xy'}, \chi_{x'}, \chi_{y'}, \chi_{xy'}, \gamma_{zx'}, \gamma_{yz'}] \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{xy'}, M_{x'}, M_{y'}, M_{xy'}, Q_{zx'}, Q_{yz'}] \quad (2)$$

Incremental total Lagrangian formulation에서 2nd Piola-Kirchhoff 응력과 Green-Lagrangian 변형률을 고려하고, 재료는 탄성영역에 있다고 가정하면, 요소좌표계에서 정의되는 변형률벡터(strain vector)는 다음 식(3)으로 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} \quad (3)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^L$ 은 Green-Lagrangian 변형률의 선형 부분,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}$ 은 비선형 부분이다. 이 선형 부분과 비선형 부분은 각각 평면 응력요소와 평판휨요소에서 식(4)와 같이 정의될 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^L + \boldsymbol{\varepsilon}^{NL} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} + \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서,  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 은 평면응력요소에서 정의되는 부분,  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 는 평판휨요소에서 정의되는 부분이다.

### 2.1 평면휨요소(CLS)

CLS 사각형 변절점 평면휨요소는 그림 1(a)에서 살펴볼 수 있듯이 요소변에 변절점을 갖는다. 면내거동과 면외거동이 서로 독립적이라고 가정하면, 평면휨요소의 강성행렬은 평면응력요소와 평판휨요소의 강성행렬을 단순조합하여 구성될 수 있다. 요소좌표계(국부좌표계) 상에서의 평면응력요소와 평판휨요소의 절점자유도는 그림 1(b)과 (c)와 같다.

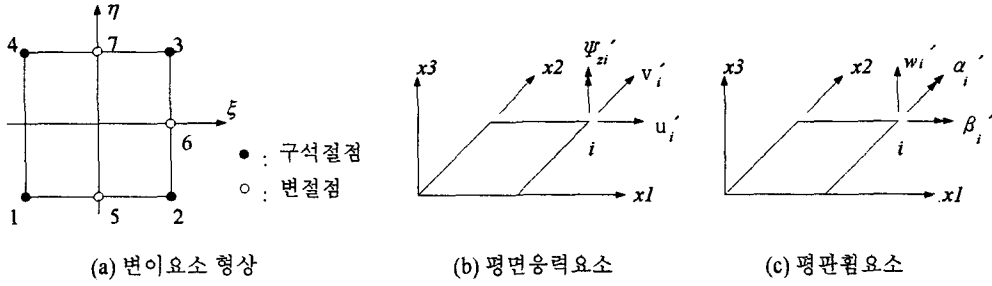


그림1 변이요소의 형상 및 요소좌표계 상의 평면응력요소 및 평판휨요소의 절점자유도

## 2.2 회전 자유도를 갖는 평면응력 요소

회전자유도를 가지는 평면응력요소의 기본적인 거동을 규정하는 형상함수는 Allman의 변위장 형태를 갖는다[그림.2].

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{v}' \end{Bmatrix} = \mathbf{u}'_m = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{8} (1_{ki} N_{iS_1} \mathbf{n}_{ki} - 1_{ij} N_{iS_1} \mathbf{n}_{ij}) \Psi_{zi} + \sum_{i=5}^n \frac{1}{8} 1_{op} N_{iS_1} \mathbf{n}_{op} \Psi_i + N_0 \Delta \mathbf{u}_0 \quad (5)$$

여기서  $l_{ij}, \mathbf{n}_{ij} = \langle \cos \alpha \sin \alpha \rangle^T$  절점 I와 J 사이에 위치하는 요소변의 길이와 요소 외부방향 수직단위벡터이다.

식(4)의 Green-Lagrangian 변형률 중 평면응력요소에서 정의되는 부분은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_m^L \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_m^{NL} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \epsilon_m = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \gamma_{xy'} \end{Bmatrix} = \epsilon_m^L + \epsilon_m^{NL} \quad (6)$$

평면응력요소에서의 Green-Lagrangian 변형률의 선형 부분과 비선형 부분은 다음과 같다.

$$\epsilon_m^L = \begin{Bmatrix} u'_{x'} \\ v'_{y'} \\ u'_{y'} + v'_{x'} \end{Bmatrix} \quad \epsilon_m^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} [(u'_{x'})^2 + (v'_{x'})^2] \\ \frac{1}{2} [(u'_{y'})^2 + (v'_{y'})^2] \\ u'_{x'} u'_{y'} + v'_{x'} v'_{y'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_m \mathbf{R}_m \quad (7)$$

따라서, 요소강성행렬의 변위 dependent 부분( $\mathbf{A}_m \mathbf{G}_m$ )을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} u'_{x'} & v'_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u'_{y'} & v'_{y'} \\ u'_{y'} & v'_{y'} & u'_{x'} & v'_{x'} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_m = \begin{Bmatrix} u'_{x'} \\ v'_{x'} \\ u'_{y'} \\ v'_{y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_m \mathbf{u}_m = \mathbf{G}_m \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ \psi'_z \\ \Delta u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x'} & 0 & G_{ix'} & R_{ix'} & 0 \\ 0 & N_{i,x'} & G_{ix'} & 0 & R_{ix'} \\ N_{i,y'} & 0 & G_{iy'} & R_{iy'} & 0 \\ 0 & N_{i,y'} & G_{iy'} & 0 & R_{iy'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \psi'_{zi} \\ \Delta u_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

위의 식(8),(9)를 이용하면, 변형률의 symmetric항은 앞에서 언급한 Allman 형태의 변위장을 적용하여 요소좌표계에서 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\text{symm}\nabla\mathbf{d}\mathbf{u}'_m = (\mathbf{B}_m^L + \mathbf{A}_m\mathbf{G}_m)\mathbf{d}\mathbf{u}_m \quad (10)$$

여기서,  $\mathbf{B}_m^L = \langle \mathbf{B}_i^e \quad \mathbf{G}_i^e \quad \mathbf{R}_i^e \rangle$ 이다. 해석결과의 수렴성을 보장하기 위하여 비적합변위형 및 회전자유도와 관련을 가지는 변형률 행렬을 수정한다(B-bar 방법(Zienkiewicz and Taylor(1989))).

$$\bar{\mathbf{G}}^e = \mathbf{G}^e - \frac{1}{\Omega^e} \int \mathbf{G}^e d\Omega, \quad \bar{\mathbf{R}}^e = \mathbf{R}^e - \frac{1}{\Omega^e} \int \mathbf{R}^e d\Omega \quad (11)$$

이후의 정식화 과정은 CLS요소(Choi and Lee, 1995)의 정식화 과정을 따르게 된다[ref.1]. 요소강성행렬은 요소의 차원에서 비적합매개변수를 소거하기 위하여 정적응축을 행하게 된다. 요소강성행렬의 응력 stiffening 부분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{A}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,x'} & \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,x'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,y'} & \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,y'} \\ \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,y'} & \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,y'} & \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,x'} & \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,x'} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{xy'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & 0 & \tau_{xy'} & 0 \\ 0 & \sigma_{x'} & 0 & \tau_{xy'} \\ \tau_{xy'} & 0 & \sigma_{y'} & 0 \\ 0 & \tau_{xy'} & 0 & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,x'} \\ \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,x'} \\ \mathbf{d}\mathbf{u}'_{,y'} \\ \mathbf{d}\mathbf{v}'_{,y'} \end{Bmatrix} \\ &= \mathbf{S}_m \mathbf{G}_m \mathbf{d}\mathbf{u}_m \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$\mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \mathbf{I} & \tau_{xy'} \mathbf{I} \\ \tau_{xy'} \mathbf{I} & \sigma_{y'} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

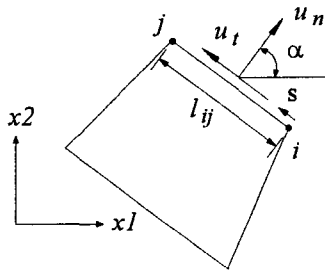


그림 2 회전자유도를 갖는 평면응력요소

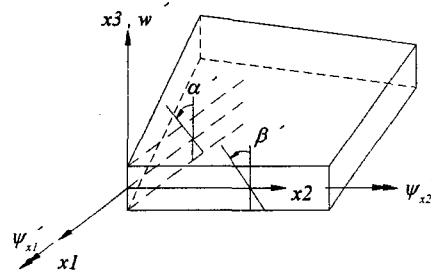


그림 3 Mindlin 평판휨요소

### 2.3 평판휨요소

Reissner-Mindlin 평판이론을 바탕으로하는 평판휨요소는 연직처점 변위장과 회전변위장을 별도로 가정하며 변위장을  $C^0$ 연속성만 만족하면 되고 전단변형을 고려할 수 있다. 일반적인 감절점 Mindlin 평판휨 등매개변수요소의 형상은 [그림. 3]과 같고 변절점 평판휨요소의 변위장은 식 (14)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{u}_p = \{w', \psi'_{x1}, \psi'_{x2}\}^T = \{w', \beta', \alpha'\}^T \approx \mathbf{N}\mathbf{u}_{pi}, i = 1, \dots, n \quad (14)$$

정확한 전단변형률 행렬을 산정하기 위하여, 본 변절점 평판요소에는 대체전단변형률장이 사용된다. 사용된 대체전단변형률장은 4절점 요소에 적용할 수 있도록 제시된 Donea의 전단변형률장을 변절점요소에게 확장하여 적용한 것이다. 식(4)의 Green-Lagrangian 변형률 중 평판요소에서 정의되는 변형률은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

평판요소에서 정의되는 Green-Lagrangian 변형률의 선형 부분과 비선형 부분은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \begin{Bmatrix} \alpha'_{,x'} \\ -\beta'_{,y'} \\ \alpha'_{,y'} - \beta'_{,x'} \\ w'_{,x'} + \alpha' \\ w'_{,y'} - \beta' \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_p^L \mathbf{u}_p \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(w'_{,x'})^2 \\ \frac{1}{2}(w'_{,y'})^2 \\ w'_{,x'} w'_{,y'} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_p \mathbf{R}_p \quad (16)$$

따라서, 요소강성행렬의 변위 dependent 부분( $\mathbf{A}_p \mathbf{G}_p$ )을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} w'_{,x'} & 0 \\ 0 & w'_{,y'} \\ w'_{,y'} & w'_{,x'} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_p = \begin{Bmatrix} w'_{,x'} \\ w'_{,y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_p \mathbf{u}_p = \mathbf{G}_p \begin{Bmatrix} w' \\ \beta' \\ \alpha' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x'} & 0 & 0 \\ N_{i,y'} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w' \\ \beta' \\ \alpha' \end{Bmatrix} \quad (17)$$

위의 식을 이용하여, 변형률의 선형, 비선형 부분의 변분을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$d \boldsymbol{\varepsilon}_p^L = \mathbf{B}_p^L d\mathbf{u}_p, \quad d \boldsymbol{\varepsilon}_p^{NL} = \mathbf{A}_p \mathbf{G}_p d\mathbf{u}_p = \mathbf{B}_p^{NL} d\mathbf{u}_p \quad (18)$$

그리고, 요소강성행렬의 응력 stiffening 부분은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\sigma}_{mp} = \begin{bmatrix} dw'_{,x'} & 0 \\ 0 & dw'_{,y'} \\ dw'_{,y'} & dw'_{,x'} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw'_{,x'} \\ dw'_{,y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p d\mathbf{u}_p \quad (19)$$

## 2.4 분할 평형 방정식(Discretized Equilibrium Equations)

Incremental total Lagrangian approach에서의 구조물의 일반적인 분할 평형 방정식은 가상일의 표현 방정식을 이용하여 표현하면 다음 식(20)과 같다.

$$\psi = \mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\alpha} dV = \mathbf{R} - \mathbf{P} \quad (20)$$

잔여치  $\psi$ 는 외력과 가정된 변위장 형태의 절점 평형에 필요한 절점력의 차이로 나타낼 수 있다. 위 식은 변위  $\mathbf{u}$ 에 대해서 직접 해를 구할 수 없으며, 점중 분할 평형 방정식을 유도하여 해를 구하기 위한 반복과정을 거쳐야 한다. 위 식을 변위  $\mathbf{u}$ 에 대해서 변분(variation)을 취하면, 기하비선형 문제에 대한 접선강성행렬(tangential stiffness matrix)을 구할 수 있는 일반적인 점중 분할 평형 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
d\psi &= d\mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV - \int_V d\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \\
&= d\mathbf{R} - \int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V d\mathbf{G}^T [\mathbf{H} + \mathbf{A}]^T \boldsymbol{\sigma} dV
\end{aligned} \tag{21}$$

여기서,  $\mathbf{B} = [\mathbf{H} + \mathbf{A}]\mathbf{G}$  이다. 따라서, 접선강성행렬의 변위 dependent 부분은

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{B}^T d\boldsymbol{\sigma} dV &= \int_V \mathbf{B}_m^T d\boldsymbol{\sigma}_m dV + \int_V \mathbf{B}_m^T d\boldsymbol{\sigma}_{mp} dV + \int_V \mathbf{B}_p^{NL^T} d\boldsymbol{\sigma}_m dV + \int_V \mathbf{B}_p^{L^T} d\boldsymbol{\sigma}_p dV + \int_V \mathbf{B}_p^{NL^T} d\boldsymbol{\sigma}_{mp} dV \\
&= \int_V \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dV du_m + \int_V \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_p^{NL} dV du_p + \int_V \mathbf{B}_p^{NL^T} \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m dV du_m \\
&\quad + \int_V \mathbf{B}_p^{L^T} \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p^L dV du_p + \int_V \mathbf{B}_p^{NL^T} \mathbf{D}_m \mathbf{B}_p^{NL} dV du_p \\
&= \mathbf{K}_L du
\end{aligned} \tag{22}$$

위 식은 평면셀요소의 일반적인 점중 분할 평형 방정식이며, 이 식을 적용함에 있어서 앞에서 유도된 평면응력 요소의 변형률의 symmetric 항을 이용하며[식(10)], 일련의 접선강성행렬의 구성과정은 CLS요소의 요소강성행렬의 구성 과정과 일치한다[ref.1]. 그리고, 접선강성행렬의 응력 stiffening 부분은

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{G}^T d\mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} dV &= \int_V \mathbf{G}_m^T d\mathbf{A}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m dV + \int_V \mathbf{G}_p^T d\mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\sigma}_{mp} dV \\
&= \int_V \mathbf{G}_m^T \mathbf{S}_m \mathbf{G}_m dV du_m + \int_V \mathbf{G}_p^T \mathbf{S}_p \mathbf{G}_p dV du_p = \mathbf{K}_{\sigma_1} du
\end{aligned} \tag{23}$$

그리고, 접선강성행렬의 응력 divergence 부분은

$$\begin{aligned}
\int_V d\mathbf{G}^T [\mathbf{H} + \mathbf{A}]^T \boldsymbol{\sigma} dV &= \int_V d[\mathbf{B}_m^T \boldsymbol{\sigma}_m] dV + \int_V d[\mathbf{B}_p^T \boldsymbol{\sigma}_p] dV + \int_V d[\mathbf{G}_p^T \mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\sigma}_{mp}] dV \\
&\quad + \int_V d[\mathbf{B}_m^T \boldsymbol{\sigma}_{mp}] dV + \int_V d[\mathbf{G}_p^T \mathbf{A}_p^T \boldsymbol{\sigma}_m] dV \\
&= \mathbf{K}_{\sigma_2} du
\end{aligned} \tag{24}$$

따라서, 점중 분할 평형 방정식(incremental discretized equilibrium equations)은 다음과 같다.

$$d\psi = d\mathbf{R} - [\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{\sigma_1} + \mathbf{K}_{\sigma_2}] du = d\mathbf{R} - \mathbf{K}_T du \tag{25}$$

여기서,  $\mathbf{K}_T$  는 symmetric 접선강성행렬이다.

### 3. 비선형 해석기법

본 연구에서는 비선형 해석기법으로 하중제어법을 기본적으로 적용한 Newton-Raphson Method를 사용한다. 반복 해석 때마다 강성 행렬을 새로이 구성한 후 해석을 수행하는 방법으로 수렴 속도가 빠른 반면 하중-변위의 곡선의 형태에 따라 수렴의 여부를 보장할 수 없는 경우도 있다. 반복 해석이 진행됨에 따라 변위 증분  $\Delta u_i$  이 점점 작아져 허용치 범위 내에 들게 되면 해가 수렴한 것으로 간주하고 해석을 마치게 된다. 본 연구에서는 구조물에 작용하는 외력  $\mathbf{R}^E$  을 하중단계 수로 등분하여 작용시켜 각 하중 단계마다 Newton-Raphson Method를 적용한다.

#### 4. 예제 해석

각각 평면응력요소와 평판휨요소에 대해서 기존의 연구결과들과 비교하였다. 평면응력요소의 경우는 기존의 8절점 quadratic 요소에 의한 기하비선형 해석결과와 비교하였다. 구조물의 물성치는 탄성계수  $E=3560.$ , 포와송비는 0.15, 두께는 1.0이다. 본 연구에 의한 해석결과는 8-node quadratic 요소에 비하여 대체적으로 Stiff한 결과를 보이고 있으며, 변절점요소를 사용할 경우(14절점) 효율적으로 근사한 해석 결과를 보이고 있다. 따라서, 변절점요소를 사용하여 적절히 구조물을 모델링할 경우 정확한 해석 결과를 얻을 것으로 보인다[그림 4].

평판휨요소는 HS2요소(Hughes and Liu, 1981)와 Way(1938)의 연구결과와 비교하였다. 기존의 대부분의 연구 결과들이 두 연구결과와 근사하며, 본 연구결과와도 비교가 가능하다. 해석예제로는 등분포하중  $q$ 가 작용하는 4변고정 평판이며, 1/4 모델을 사용하여 해석한다. 구조물의 물성치는  $E=20000.kg/mm^2$ , 포와송비는 0.3, 두께는 2.0mm이다. 위의 두 연구 결과들과 비교하여 본 연구결과는 비교적 간단한 수식화를 통하여 효율적인 결과를 보이고 있다. 변절점요소를 사용하여 좀 더 세분화된 모델링을 사용하여 해석할 경우, 좀 더 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 보인다[그림 5].

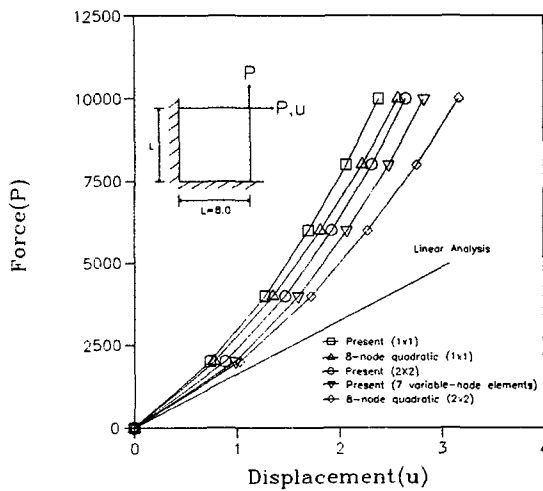


그림 4. 평면응력요소 해석 예제

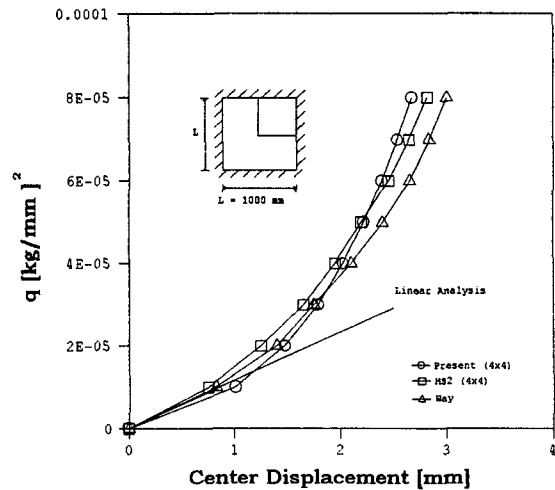


그림 5. 평판휨요소 해석 예제

간단한 예제로 앞 예제의 4변고정 평판에 Stiffner가 있는 경우와 없는 경우에 대해서 해석결과를 비교하였으며, 유한요소 모델링은 그림.6과 같이 1/4모델링을 하였다. 그림.6(c)와 같이 변절점요소를 사용하므로써 손쉽게 Stiffner의 유한요소 세분화가 가능하였다. 그림. 7의 해석결과에서 보이듯이 Stiffner의 영향으로 인한 변위의 감소를 볼 수 있다.

#### 5. 결 론

본 연구에서는 회전 자유도를 갖는 CLS요소(Choi and Lee, 1995)를 incremental total Lagrangian approach 방법을 채택하여 기하비선형 영역으로 확장시켜서 적용하였다. 평면응력요소와 평판휨요소, 각각에 대해서

기존의 연구 결과들과 근사한 해석결과를 주며, 변절점요소를 사용할 경우 효율적인 해석이 가능하였다. 실제로 Stiffner가 있는 평판구조를 변절점 요소를 사용하여 정확하면서도 효율적으로 해석결과를 얻을 수 있었다. 그러나, CLS요소의 적용에 있어서 면내거동과 면외거동이 서로 독립적이라고 가정하였는데, 면내거동과 면외거동의 간섭이 크게 나타나는 구조물에 대한 해석결과는 다소 차이가 있다. 차후 효율적인 비선형 해석기법의 보완이 필요하며, 좀 더 다양한 박판구조물에 대한 해석이 이루어져 할 것이다.

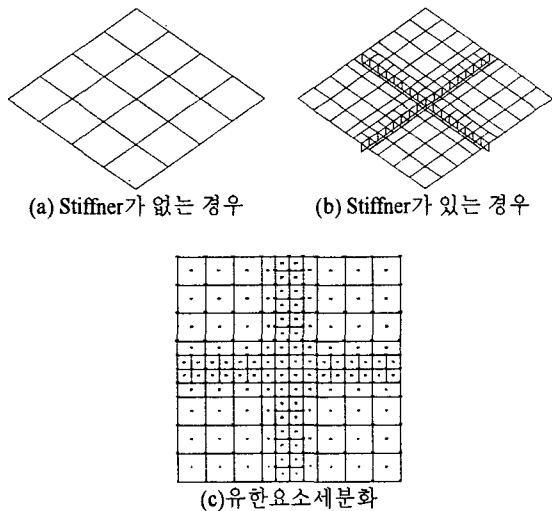


그림.6 유한요소세분화(1/4모델)

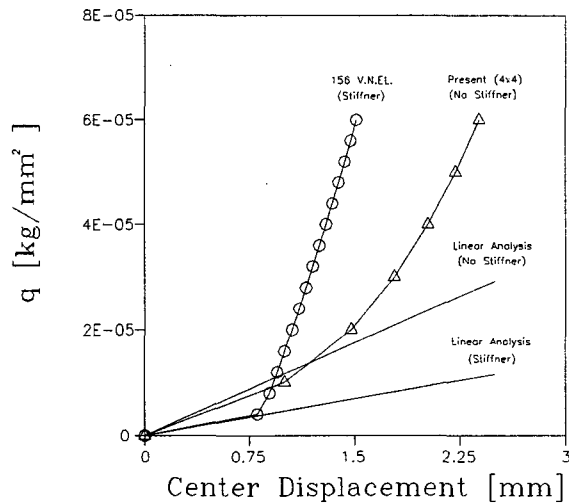


그림.7 하중-변위 관계(Stiffner유무)

## 참고 문헌

1. C.K. Choi and W.H. Lee, 'Versatile Variable-node Flat Shell Element', J. of Engrg. Mech.(ASCE), 122(5), 432-441, 1996.
2. C.K. Choi and J.G. Paik, 'An Effective Four Node Degenerated Shell Element for Geometrically Nonlinear Analysis', Thin-walled Structures, 24, 261-283, 1996.
3. T.J.R. Hughes and W.K. Liu, 'Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. Three-dimensional Shells', Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 26, 331-362, 1981.
4. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, *The Finite Element Method: Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Nonlinearity*, Vol.II, McGraw-Hill, London, 1989.
5. S. Oral and A. Barut, 'A Shear-flexible Facet Shell Element for Large Deflection and Instability Analysis', Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 93, 415-431, 1991.
6. J.L. Meek and S. Ristic, 'Large Displacement Analysis of Thin Plates and Shells Using a Flat Facet Finite Element Formulation', Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 145, 285-299, 1997.
7. K.M. Hsiao, 'Nonlinear Analysis of General Shell Structures by Flat Triangular Shell Element', Comp. & Struct., 25(5), 665-675, 1987.
8. K.S. Surana, 'Geometrically Nonlinear Formulation For the Curved Shell Elements', Int. J. Numer. Methods Eng., 19, 581-615, 1983.
9. K.J. Bathe and L.W. Ho, 'A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures', Comp. & Struct., 13, 673-681, 1981.