

## 다중변위 구속조건하에서 고층철골조의 이산형 최적화 Discrete Optimization of Tall Steel Frameworks under Multiple Drift Constraints

이 한 주\*      김 호 수\*\*  
Lee, Han-Joo    Kim, Ho-Soo

---

### ABSTRACT

This study presents a discrete optimization of tall steel buildings under multiple drift constraints using a dual method. Dual method can replace the primary optimization problem with a sequence of approximate explicit subproblems. Since each subproblem is convex and separable, it can be efficiently solved by using a dual formulation. Specifically, this study considers the discrete-optimization problem due to the commercial standard steel sections to select member sizes. The results by the proposed method will be compared with those of the conventional optimality criteria method.

---

### 1. 서 론

고층건물의 구조설계에서 무엇보다도 먼저 고려해야 하는 것은 횡력에 의한 처짐이다. 아울러 고층구조물의 횡변위에 대해 보편적으로 설정된 기준은 없으나 최상층 및 층간변위의 허용값이 주로 건물전체 또는 해당되는 층 높이의 비(1/200~1/600)로써 주어진다. 일단 골조에 대한 형상 및 지점조건이 세워지면 주된 설계 노력은 개개의 보, 기둥 그리고 가새 등의 부재크기의 설정에 놓이게 되는데, 세장한 고층건물에 있어서 구조부재설계는 일반적으로 응력구속조건보다는 변위구속조건에 의해 주로 영향을 받는다. 더욱이 고층건물은 보통 수천 개의 부재들로 구성되어 있기 때문에 설계자의 직관이나 경험 등에 근거한 반복적이고 시행착오적인 방법으로 횡변위 구속조건이 만족되도록 부재를 설정하는 것은 매우 복잡하고 어려운 일이다. 따라서 이에 대한 효율적인 알고리즘의 개발이 요구된다.

또한 철골구조물의 구조부재는 대부분 상용화된 이산형 표준 철골단면으로 주어진다. 이에 따라 재래적인 구조최적화문제에서의 구조물의 최적설계는 먼저 연속형 단면설계변수를 사용하여 최적화된 다음, 추가적인 기법에 의해 실제적인 이산형 단면크기를 설정하는 것으로 최종설계가 이루어진다.

그러나 최근엔 근사화 개념을 도입하여 수학적계획법을 보완함으로써 이산형 최적화 문제를 계산상 보다 효율적으로 해결할 수 있는 방안이 강구되고 있다. 이에 따라 1970년대 말 Fleury에 의해 제안된 쌍대법(dual method)<sup>1,2)</sup>은 최적정기준법에서 제기되는 어려운 지배적인 구속조건식의 설정문제와 각각의 구속조건에 대응하는 활성 및 비활성 설계변수로의 적절한 분할문제를 쌍대알고리즘내에서 직접 해결함으로써 최

---

\* 청주대학교 건축공학과 박사과정

\*\* 청주대학교 건축공학과 부교수

적정기준법의 일반화방안으로 제시되었고 수학적계획법 및 최적정기준법의 일체화를 위한 기초로 제공되고 있다.

이 방법은 초기의 최적화 문제를 하나의 간단한 대수학적인 형태를 가지는 근사화된 양함수형태의 부문제 (explicit subproblem)로 대체할 수 있고, 이때 각 부문제는 볼록하고 분리가능한(convex and separable) 형태 이므로 쌍대알고리즘(dual algorithm)을 적용함으로써 효과적으로 풀려질 수 있다는 개념에 근거한다. 따라서 이 방법은 새롭고 강력한 수학적계획법으로써 최적화 문제에 광범위하게 적용되고 있다.

이에 따라 본 연구에서는 상용화된 표준 첩골단면을 이용한 최상층 및 층간변위 구속조건을 받는 고층첩골조의 이산형 최적화를 위해 쌍대법에 근거한 효율적인 알고리즘기법을 제시하고자 한다. 또한 본 연구 결과를 기존의 해석기법인 최적정기준법과 비교하기 위해 Grierson과 Chan에 의해 제시된 두 개의 45층 이차원 첩골조모델<sup>5)</sup>이 고려된다.

## 2. 최적화 문제의 정식화

### 2.1 다중변위 구속조건의 설정

다중변위 구속조건을 받는 고층첩골조의 최소중량설계는 다음과 같은 이산형 최적화 문제로 정식화될 수 있다.

$$\text{Minimize : } W(a_i) = \sum_i w_i a_i \quad (1a)$$

$$\text{Subject to : } (\delta_j - \delta_{j-1}) \leq d_j^u h_j \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (1b)$$

$$\delta_i \leq d_i^u h_i \quad (1c)$$

$$a_i \in A_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1d)$$

식 (1a)는 구조물의 중량을 나타내며 여기서  $a_i$ 는 부재  $i$ 의 단면적,  $w_i$ 는  $i$  부재의 중량계수이다. 식 (1b)는 구조물의 층간변위 구속조건을, 그리고 식 (1c)는 구조물의 최상층변위 구속조건을 나타내는데, 여기서  $\delta_j$ 와  $\delta_{j-1}$ 은 두 개의 연속된 층에서의 횡변위이고,  $\delta_i$ 는 최상층의 횡변위이다.  $d_j^u$ 와  $d_i^u$ 는 각각  $j$ 층의 허용 층간변위비와 최상층의 허용 횡변위비를 나타내고,  $h_j$ 와  $h_i$ 는 각각  $j$ 층의 층높이와 건물전체높이를 의미한다. 식 (1d)는 각 부재의 단면적  $a_i$ 가 상용화된 표준첩골단면에서 선정됨을 의미한다.

여기서 식 (1b)와 (1c)는 설계변수  $a_i$ 의 음함수 형태이므로 컴퓨터를 이용하여 최적설계를 하기위해선 양함수형태로 다시 정식화하는 것이 필요하다. 이를 위해  $n$ 개의 부재를 가지는 일반적인 이차원 첩골조의 임의 점에서의 변위는 가상의 원리를 이용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \left( \frac{F_x f_x}{Ea} + \frac{M_z m_z}{EI_z} \right)_i dx \quad (2)$$

여기서  $E, a$  = 탄성계수와 단면적

$I_z$  = 단면 이차 모멘트

$F_x, f_x$  = 실제의 축력 및 가상의 축력

$M_z, m_z$  = 실제 휨모멘트 및 가상의 휨모멘트

또한 상용화된 표준철골부재에 대한 단면의 성질  $I_z$ 는 단면적  $a$ 에 의해 선형회귀식으로 정식화될 수 있다. 이를 위해 본 연구에선 기존의 여러방법중 Chan이 제시한 선형회귀식<sup>5)</sup>을 적용하고자 한다.

$$1/I_z = C_{Iz} (1/a) + C'_{Iz} \quad (3)$$

여기서 계수  $C_{Iz}$ 와  $C'_{Iz}$ 는 선형 회귀식에 의해 결정되며 단면형태와 크기에 따라 다른 값을 갖는다. 식 (2)로부터 변위  $\delta_j$ 는 식 (3)을 통해 다음 (4)식과 같이 부재 단면적  $a_i$ 만에 의한 식으로 표현될 수 있다.

$$\delta_j = \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_{ij}}{a_i} + C'_{ij} \right) \quad (4)$$

여기서 계수  $C_{ij}$ ,  $C'_{ij}$ 는 식 (2)와 (3)으로부터 다음 (5)식과 같이 구해진다.

$$C_{ij} = \int_0^{L_i} \left( \frac{F_x f_x + M_z m_z C_{Iz}}{E} \right)_i dx, \quad C'_{ij} = \int_0^{L_i} \left( \frac{M_z m_z C'_{Iz}}{E} \right)_i dx \quad (5)$$

식 (4)로부터 층간변위구속조건식 (1b)와 (1c)의 왼쪽 항은 다음과 같이 설계변수  $a_i$ 의 양함수 형태로써 표현된다.

$$(\delta_j - \delta_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{e_{ij}}{a_i} + e'_{ij} \right) \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (6a)$$

$$\delta_i = \sum_{i=1}^n \left( \frac{C_{it}}{a_i} + C'_{it} \right) \quad (6a)$$

여기서 계수  $e_{ij}$ ,  $e'_{ij}$ 는 다음과 같고  $C_{it}$ ,  $C'_{it}$ 는 위의 식 (5)의 최상층에 해당하는 계수이다.

$$e_{ij} = C_{ij} - C_{ij-1}, \quad e'_{ij} = C'_{ij} - C'_{ij-1} \quad (7)$$

## 2.2 이산형 최적화를 위한 쌍대법의 적용

식 (1)과 (6)에 역변수  $x_i = 1/a_i$ 을 도입하면 다음과 같은 이산형 최적화 문제로 정리된다.

$$\text{Minimize : } W(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i/x_i \quad (8a)$$

$$\text{Subject to : } \sum_{i=1}^n (e_{ij}x_i + e'_{ij}) \leq d_j^u h_j \quad (j=1,2,\dots,m) \quad (8b)$$

$$\sum_{i=1}^n (C_{it}x_i + C'_{it}) \leq d_t^u h_t \quad (8c)$$

$$x_i \in X_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (8d)$$

여기서 식 (8a)의 중량계수  $w_i$ 의 값은 양수이고 부등제한조건식 (8b)와 (8c)는 변수  $x_i$ 의 선형함수이다.

그리고 식 (8a), (8b), (8c)는 모두 변수  $x_i$ 의 분리가능한 함수이기 때문에 위의 이산형 최적화문제를 풀기 위해 쌍대법(dual method)이 적용된다. 이를 위해 우선 이산형변수 구속조건인 식 (8d)를 무시하고 라그랑지 함수로 정식화한다.

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[ \sum_{i=1}^n (e_{ij} x_i + e'_{ij}) - d_j^u h_j \right] + \lambda_{m+1} \left[ \sum_{i=1}^n (C_{it} x_i + C'_{it}) - d_t^u h_t \right] \quad (9)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,m,m+1) \quad (10)$$

쌍대법은 이산형변수 구속조건인 식 (8d)가 만족되도록 고려하면서 식 (9)의 saddle-point  $(x^*, \lambda^*)$ 를 찾는 것으로 수행된다. 여기서 식 (9)의 saddle-point는 다음 (11)식과 같은 최대-최소 문제의 해로써 주어진다.

$$(x^*, \lambda^*) = \max_{\lambda} [ \min_x L(x, \lambda) ] \quad (11)$$

식 (11)과 같은 형태의 문제는 먼저  $\lambda$  변수만에 의한 함수를 세우기 위해  $x$  변수에 대한 라그랑지 함수를 최소화함으로써 풀다. 즉,

$$L_m(\lambda) = \min_x L(x, \lambda) = \min_x \sum_{i=1}^n L_i(x_i, \lambda_j) - L_o \quad (j=1,2,\dots,m,m+1) \quad (12)$$

여기서 식 (9)로부터  $L_o = \sum_{j=1}^m \lambda_j d_j^u h_j + \lambda_{m+1} d_t^u h_t$ 이고 독립변수의 형태로 표현되는 함수는 다음과 같다.

$$L_i(x_i, \lambda_j) = \frac{w_i}{x_i} + \sum_{j=1}^m (\lambda_j e_{ij} x_i + e'_{ij}) + \lambda_{m+1} (C_{it} x_i + C'_{it}) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (13)$$

쌍대함수라고 불리는 식 (12)는 이산형변수  $x_i$ 에 대응하는 상용화된 표준철틀골단면에 대해 식 (13)의 각 함수  $L_i(x_i, \lambda_j)$ 를 최소화하고 이를 더하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L_m(\lambda) = \sum_{i=1}^n \min_{x \in X_i} L_i(x_i, \lambda_j) \quad (14)$$

$\lambda$  변수는 다양한 값을 갖기 때문에 대응하는 함수  $L_i(x_i, \lambda_j)$ 가 최소가 되는 설계변수  $x_i$ 의 값은 상용화된 표준철틀골단면에 대한 이산형값  $x_i^k$ 부터 다음 이산형값  $x_i^{k+1}$ 까지 변한다. 이때 쌍대함수  $L_m(\lambda)$ 의 연속성은 다음 (15)식에 의해 유지된다.

$$L_i(x_i^k, \lambda_j) = L_i(x_i^{k+1}, \lambda_j) \quad (15)$$

(15)식에 식 (13)을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{w_i}{x_i^k} + \sum_{j=1}^m (\lambda_j e_{ij} x_i^k + e'_{ij}) + \lambda_{m+1} (C_{it} x_i^k + C'_{it}) \quad (16a)$$

$$= \frac{w_i}{x_i^{k+1}} + \sum_{j=1}^m (\lambda_j e_{ij} x_i^{k+1} + e'_{ij}) + \lambda_{m+1} (C_{it} x_i^{k+1} + C'_{it})$$

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j e_{ij} + \lambda_{m+1} C_{it} = \frac{w_i}{x_i^k x_i^{k+1}} \quad (16b)$$

식 (16)으로부터 대응하는 함수  $L_i(x_i, \lambda_j)$ 가 최소가 되는 설계변수  $x_i$ 의 특정한 이산형값은 식 (17)이 만족될 경우 (18)식과 같이  $x_i^k$ 로 주어진다.

$$x_i^o = x_i^k \quad (17)$$

$$\frac{w_i}{x_i^{k-1} x_i^k} < \sum_{j=1}^m \lambda_j^o e_{ij} + \lambda_{m+1}^o C_{it} < \frac{w_i}{x_i^k x_i^{k+1}} \quad (18)$$

여기서 윗첨자 'o'는 현행의 설계단계에서의 값을 의미한다.

(14)식을 통해 (12)식을 구하고 나면 (11)식은 다음과 같이 정리된다.

Maximize :

$$L_m(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i^k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left[ \left( \sum_{i=1}^n e_{ij} x_i^k + e'_{ij} \right) - d_j^u h_j \right] + \lambda_{m+1} \left[ \sum_{i=1}^n (C_{it} x_i^k + C'_{it}) - d_{m+1}^u h_{m+1} \right] \quad (19a)$$

$$\text{Subject to : } \lambda_j \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,m,m+1) \quad (19b)$$

여기서  $x_i^k$ 는 (17)과 (18)식으로부터 알 수 있다. (19)식에 제시된 쌍대최적화문제는 라그랑지 변수를 다음 (20)식과 같이 반복적으로 수정하는 gradient projection method를 사용하여 풀 수 있다.

$$\lambda_j^{v+1} = \lambda_j^v + \alpha S_j \quad (j=1,2,\dots,m,m+1) \quad (20)$$

여기서  $S_j$ 는 탐색방향(search direction),  $\alpha$ 는 단계길이(step length)매개변수이고  $\lambda_j^v$ 는 바로 전의 탐색단계에서 구한 변수값이다.  $\lambda_j^v$ 가 변함에 따라  $x_i^k$ 가 변하므로 식 (20)은 식 (19a)가 최대화 되는 점  $(x^*, \lambda^*)$ 를 구하기위해 식 (19b)의  $\lambda_j$ 변수에 대한 경계와 식 (18)의 설계변수  $x_i$ 에서 불연속성을 고려한다. 여기서 점  $x^*$ 는 최적설계문제식 (8)의 해이다.

이와 같은 이산형 최적화 알고리즘을 흐름도로 나타내면 다음 그림 1과 같으며, 그에 따른 설계과정은 MATLAB<sup>7)</sup> 및 SODA 프로그램<sup>8)</sup>을 활용하였다.

### 3. 적용에 및 고찰

본 연구에서 제시된 이산형 최적화 방안을 최적성 기준법과 비교검토하기 위해 Chan에 의해 제시된<sup>5)</sup> 그림 2와 같은 풍하중을 받는 두 개의 45층 이차원 철골프레임을 고려한다.

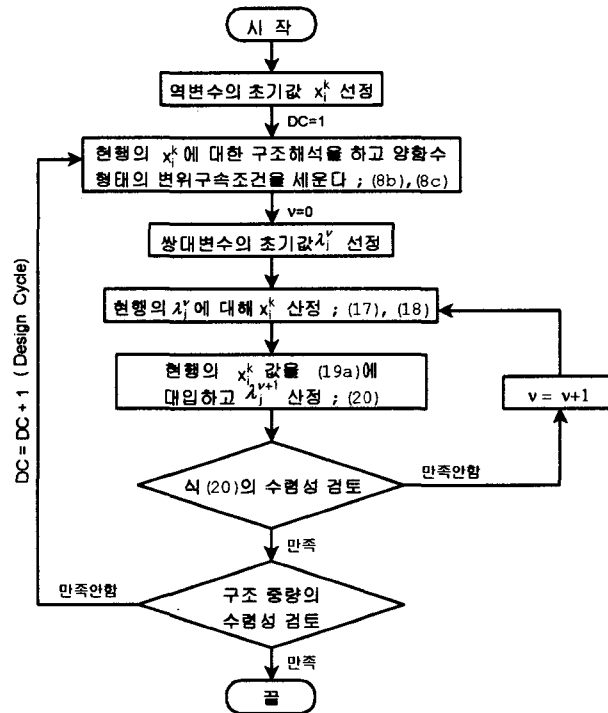
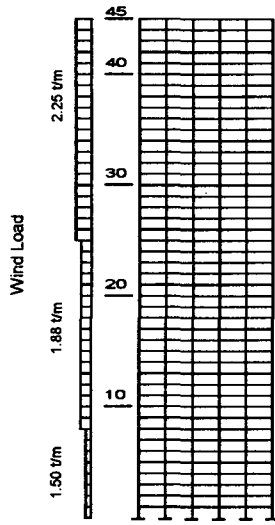


그림 1. 제시된 이산형 최적화의 흐름도

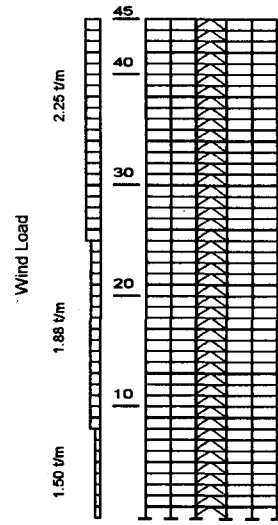
예제 1은 횡강성이 단지 보와 기둥을 통해 공급되는 강철철골조이고 예제 2는 가새보강된 강철철골조이다. 여기서 증가된 층전단성능은 축방향 하중을 받는 대각선 가새부재에 의해 제공된다. 프레임을 구성하는 모든 보와 기둥은 강철점으로 연결되어 있으며 K-브레이스시스템의 대각선 가새들은 힌지절점으로 연결되어 있다. 연직하중은 고려하지 않았으며 수평 풍하중이 각 층의 레벨에서 수평집중하중으로 작용하는 것으로 고려하였다. 그림 2에서 풍압은 15m의 부담폭을 갖는 것으로 계산하였고 두 예제 모두 베이폭은 6m이고 층고는 3.6m이다. 부재는 미국의 AISC 표준 Wide-Flange W 철골단면이 부재크기를 정하는데 사용된다. 여기서 기둥과 대각선 가새들은 W14X22에서 W14X730사이의 범위내에서 선정되며 보는 W24X55에서 W24X492사이의 범위 내에서 선정된다. 또한 보와 대각선 가새는 각 층에 대해 동일단면을 갖도록 그룹화 되고 기둥은 연속되는 두 개의 층에 대해 대칭되는 한 쌍씩 동일단면을 갖도록 그룹화 된다. 프레임은 층간변위가  $h/400$ 를 초과하지 않도록 설계된다. 여기서  $h$ 는 건물의 해당하는 한 층의 높이이다.

또한 초기단면을 다르게 하였을 때 최종설계의 영향을 알아보기 위해 두 가지의 다른 초기단면 세트를 설정한다. 첫 번째 계획 A는 기둥과 보에 대해 각각 허용범위 중 최대단면인 W14X730 및 W24X492로 선정하고, 두 번째 계획 B는 기둥과 보에 대해 각각 허용범위 중 최소단면인 W14X22 및 W24X55로 선정한다.

쌍대알고리즘을 이용하여 구해진 예제 1과 예제 2의 최적설계결과는 표 1과 그림 3~그림 5에서 보여진다. 표 1은 기존의 최적정기준법과 제안된 방법의 최종물량을 보여주는데, 예제 1의 경우 기존의 최적정기준법에 비해 제안된 방법의 계획 A는 4.5%, 계획 B는 1.6% 더 적은 반면, 예제 2의 경우 계획 A는 5.6%, 계획 B는 4.9% 더 많은 것이 보여진다. 그러나 모두 6% 이내로 두 방법에 의한 차이가 거의 없음을 알 수 있다. 그림 3은 초기단면을 계획 A 및 계획 B로 설정하여 구한 최종설계값을 나타내는데 예제 1, 예제 2 모두 2~3회 이내의 반복과정을 통해 비슷한 최종중량으로 수렴하는 것이 보여진다. 그리고 예제 2의 계획 B를 제외하면 모든 경우 두 번째 반복과정 후에 수렴되고, 예제 2의 계획 B는 세 번째 반복과정 후에 수렴되었다. 이러한



(a) 예제 1 - 강철철골조



(b) 예제 2 - 가새보강된 강철철골조

그림 2. 45층, 5베이 철골조 모델링

표 1. 최종중량 (ton)

		예제 1	예제 2
최적정기준법		1015.1	760.5
제안된 방 법	계획 A	971.2	830.0
	계획 B	998.8	798.0

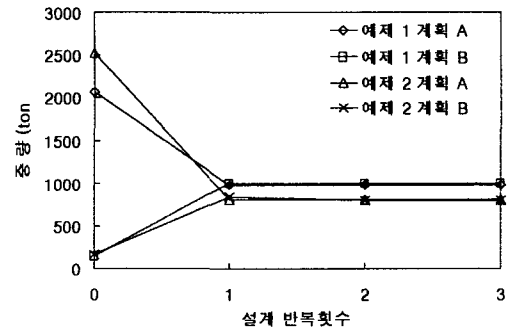


그림 3. 예제 1 및 예제 2의 설계이력

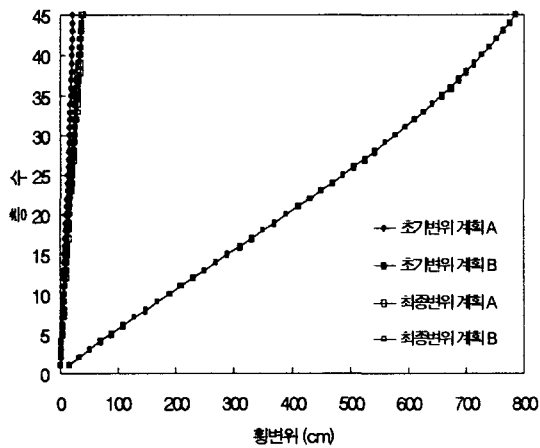


그림 4. 예제 1의 초기 및 최종횡변위

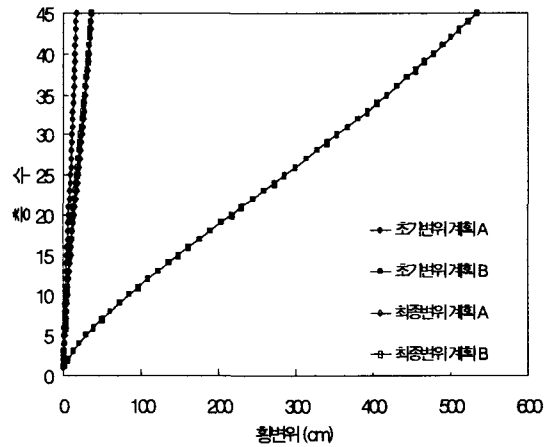


그림 5. 예제 2의 초기 및 최종횡변위

계획 A와 B에 대한 빠른 수렴은 내부 부재력의 분배가 부재크기의 변화에 덜 민감하기 때문인 것으로 판단된다. 그림 4와 5는 각각 예제 1과 예제 2의 계획 A와 B에 대한 초기 횡변위가 서로 매우 큰 차이를 보이지만 최적설계된 후 같은 최종변위로 수렴된다는 것을 보여준다. 이것은 쌍대알고리즘을 통해 얻어진 최종의 최적설계는 초기부재단면선정에 의해 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

### 3. 결 론

본 연구에서는 다중변위 구속조건하에서 고층철골조의 이산형 최적화를 위해 쌍대법에 근거한 효율적인 이산형 최적알고리즘을 제시하였으며 이에 따른 해석결과를 기존의 최적정기준법과 비교해 본 결과 다음의 결론을 얻었다.

최적정기준법의 경우 초기엔 연속형변수로 최적화된 후, 유사 이산형(pseudo-discrete) 최적화기법에 의해 이산형 변수로 환산되나 쌍대법의 경우는 직접 이산형 설계변수와 그에 대응하는 구속조건식을 고려한다.

또한 기존의 최적정기준법은 지배적인 구속조건식을 정확히 설정하고 각각의 구속조건에 대응하는 활성(active) 및 비활성(inactive) 설계변수로의 적절한 분할과정이 요구되는 어려움이 있는 반면, 본 연구에서 제시한 쌍대법의 경우 지배적인 구속조건 설정문제는 쌍대합수의 최대값을 구할 때 쌍대변수에 대한 양수(non-negativity)의 구속조건을 고려함으로써 자동적으로 다루어지며, 활성 및 비활성 설계변수의 분할개념은 쌍대알고리즘내에 본래 포함되어 있다.

특히, 예제 1과 예제 2의 설계결과를 살펴보면 쌍대알고리즘에 의한 이산형 최적화의 경우 고층구조물에서 부재력의 분배가 부재크기의 변화에 덜 민감하기 때문에 매우 빠른 수렴을 보여 주는 것으로 사료되며, 이의 최종결과는 초기 부재단면의 선정과는 상관없이 최적정기준법의 결과와 거의 비슷하게 주어짐을 알 수 있다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 핵심전문 연구비지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

1. C.Fleury, Structural Weight Optimization by Dual Methods of Convex Programming, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, pp.1761-1783, 1979
2. L.A.Schmit and C.Fleury, Structural Synthesis by Combining Approximation Concepts and Dual Methods, AIAA Journal, Vol.18, No.10, pp.1252-1260, 1980
3. C.Fleury and V.Braibant, Structural Optimization : A New Dual Method using Mixed Variables, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, pp.409-428, 19863.
4. C.Fleury, CONLIN : An Efficient Dual Optimizer based on Convex Approximation Concepts, Structural Optimization 1, 81-89, 1989
5. D.E.Grierson and C.M.Chan, An Efficient Resizing Technique for the Design of Tall Steel Building subject to Multiple Drift Constraints, The Structural Design of Tall Buildings, Vol. 2, 17-32, 1993
6. U.Kirsch, Structural Optimization : Fundamentals and Applications, Springer-Verlag, New York, 1993
7. MATLAB User's Guide, The MathWorks Inc., Massachusetts, 1992
8. SODA User's Manual, Structural Optimization Design & Analysis Software for Structural Engineering, Acronym Software Inc., Canada, 1996