

거더간 상대처짐을 고려한 바닥판의 해석 The Analysis of Bridge Deck Considering Relative Girder Deflection

유철수* 강영종** 최진유*** 양기재****
Yu, Chul-Soo Kang, Young-Jong Choi, Jin-Yu Yang, Gi-Jae

ABSTRACT

The chloride attack of the top mat of reinforcing bars is a major cause of deterioration of concrete deck of plate girder bridges. This is caused by a current design method which requires a top mat of reinforcing bars to resist a negative bending moment in bridge decks. In recently, empirical evidence has indicated that the top transverse reinforcing bars can partially or fully be eliminated without jeopardizing the structural integrity of a deck. So, one of the most efficient way to increase durability of concrete deck of bridges is the development of new design method that reduce or eliminate the top mat reinforcing bars, and it is possible by the exact analysis that considering the negative bending moment reducing effect which introduced by relative deflection of plate girders.

In this study, we develop the new bridge deck analysis method that considered the effect of relative girder deflection by applying the principles of slope deflection method of frames, and that is fine tuned with results of finite element analysis. This new approach evaluate a bending moment in a deck based on the effect of relative girder deflection as well as the magnitude of wheel loads, the girder spacing and stiffness, deck stiffness, and the span length

1. 서론

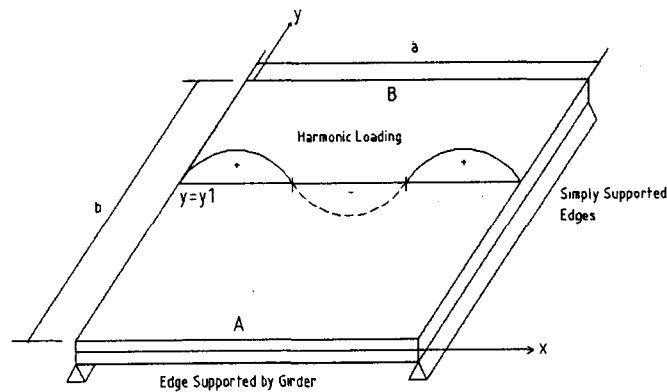
한국의 도로교 시방서(1996)나 미국의 AASHTO시방서(1996)에서 제시하고 있는 바닥판의 설계휨모멘트의 산출방법은 바닥판 슬래브를 고정된 거더에 연속지지되어 있는 것으로 보고 휨모멘트를 산정하는 Westergaard⁽¹⁾의 이론에 근거를 두고 있다. Westergaard는 단순지지된 무한판에 집중하중이 작용하는 경우에 판에 작용하는 정모멘트를 수식적인 정해로 유도하였다. 이 식에 따르면 하중의 크기와 지점의 간격에 의해서 판에 작용하는 정모멘트의 크기가 결정된다. 현재의 시방규정에서 채택하고 있는 바닥판 휨모멘트의 산정식은 Westergaard가 제안한 식을 근거로 발전된 식에 연속바닥판의 효과를 고려하기 위하여 0.8 배를 하여 사용하고 있고, 정·부모멘트의 크기를 같은 것으로 간주하고 있다. 이러한 설계모멘트에 근거하여 바닥판의 상부와 하부에 같은 양의 철근을 배근하고 있다. 그러나 최근의 연구결과^(2,3)는 거더부에 발생하는 부모멘트는 정모멘트보다 상당히 작은 값을 가지며, 현재의 설계규정에 의해 산출된 상부철근의 양이 과도함을 보여주고 있다. 또한 부모멘트가 정모멘트 보다 상당히 작은 값을 가지는 원인이 거더간의 상대처짐에 의한 효과임을 입증하였다. 상부철근의 과도한 배근은 바닥판에 온도나 건조수축에 의한 균열에 취약하게 만들며, 이 균열의 틈새를 통해 침투한 염화물등에 의해 부식되어 바닥판을 손상시키게 된다. 이러한 바닥판의 손상을 방지하기 위한 가장 효과적인 방법중의 하나는 바닥판의 정확한 거동특성에 바탕을 둔 휨모멘트를 산정하여 상부철근의 배근량을 감소시키는 것이라고 볼 수 있다. 이와 같은 필요성에 따라서 본 연구에서는 조화해석법과 처짐각법의 원리를 이용하여 거더간의 상대처짐효과가 고려된 바닥판의 해석법을 개발하였으며, 유한요소해석과의 비교를 통하여 그 타당성을 검증하였다.

*고려대학교 토목환경공학과 교수
**고려대학교 토목환경공학과 부교수
***고려대학교 토목환경공학과 박사과정
****고려대학교 토목환경공학과 석사과정

2. 처짐각법을 이용한 판형교 해석

2.1 조화해석법(Harmonic Analysis)

조화해석법은 구조물에 작용하는 하중을 Fourier 변환(Fourier Transform)에 의해 조화함수의 합으로 표현하므로써, 각 조화함수에 따라 구조물의 거동을 분리시켜 해석하는 방법이다. 평판에 작용하는 하중이 조화함수의 합으로 표현될 경우, 각 하중에 따른 평판의 응답도 같은 형태의 조화함수로 표현되며, 각 하중에 의한 응답을 중첩시키면 평판의 최종적인 응답을 결정할 수 있다.⁽⁴⁾



[그림1] 양단이 단순지지된 판

[그림1]과 같이 y축과 평행한 양단이 단순지지되어 있고, x축과 평행한 양단(A, B)은 빔으로 지지되어 있거나 어떤 임의의 지지조건을 가지고 있는 평판이 x축 방향의 사인함수 하중을 받고 있을 경우, 평판의 처짐은 $w = Y_n \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right)$ 로 표현할 수 있다. 이를 판이론에 따라 정리하면 아래와 같이 하중과 같은 주기를 갖는 sine함수의 응답형태를 얻을 수 있다.

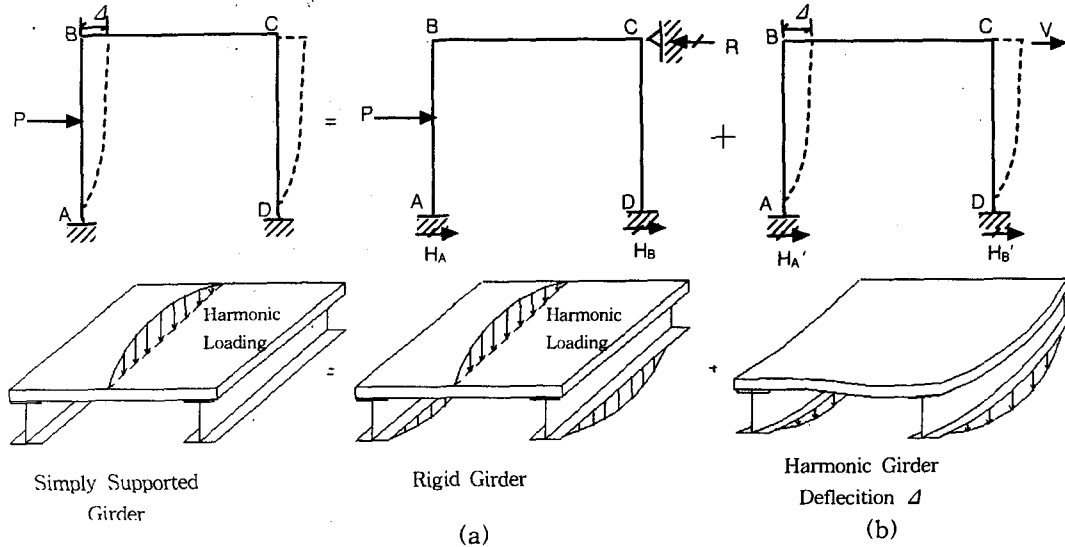
$$\begin{aligned}
 \text{처짐각: } \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\pi}{s} Y' \sin \xi & \text{전단력: } V_y &= D \frac{\pi^3}{s^3} (Y' - Y''') \sin \xi \\
 \text{모멘트: } M_y &= D \frac{\pi^2}{s^2} (-Y'' + \nu Y) \sin \xi & \text{반력: } R_y &= D \frac{\pi^3}{s^3} [(2-\nu)Y' - Y'''] \sin \xi \\
 \text{여기서, } s &= \frac{a}{n}, \quad \eta = \frac{\pi y}{s}, \quad \xi = \frac{\pi x}{s}, \quad Y = \frac{dY}{d\eta}, \quad Y' = \frac{s^2}{\pi^2} \frac{d^2 Y}{dy^2} & & \text{(식1)}
 \end{aligned}$$

2.2 처짐각법의 적용

2.2.1 개요

처짐각법(Slope Deflection Method)은 연속보나 라멘과 같은 부정정 구조물의 해석에 적용할 수 있는 방법으로, 구조물의 절점에 처짐각 방정식을 이용하여 절점모멘트를 구하는 일

중의변위법으로 볼 수 있다. [그림3]과 같이 Sine함수의 하중이 작용하는 바닥판의 거동은 거더의 처짐이 구속된 경우(a)와 거더의 처짐만이 작용하는 경우(b)로 나누어 각각 처짐각법을 적용하여 해석할 수 있다. (a)의 경우, 하중에 의해서 지점에 발생하는 모멘트는 라멘 구조물의 절점B에서와 같이 양 지점의 처짐각의 함수와 일정한 강성계수(Stiffness Factor), 고정단 모멘트의 함수로 구성할 수 있으며, (b)의 경우에는 라멘구조물의 가로흔들이 (Sidesway) 처럼 거더의 처짐량 $\Delta = \Delta_0 \sin \xi$ 을 거더에 작용하는 수직반력의 평형을 이용하여 산정할 수 있으므로, 거더의 처짐에 의해서 발생하는 지점 모멘트를 결정할 수 있다



[그림3] 처짐각법의 적용

2.2.2 바닥판의 강성계수(Stiffness Factor for Plate)

(1) 지점에 sine함수 형태의 처짐각이 발생하는 경우

[그림1]의 변 A(y=0)는 고정지지 되어 있고, 변 B(y=b)에 $\phi = \phi_0 \sin \xi$ 의 처짐각이 발생할 경우 판의 경계조건은

$$y=0 \text{에서 } \phi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = 0 \quad y=b \text{에서 } \phi = -\frac{\partial w}{\partial y} = \phi_0 \sin \xi, \Delta = w = 0$$

이다. 이 경계조건을 이용하여 (식1)에 따라 지점부에 작용하는 모멘트와 반력을 계산하면 다음과 같다.

$$y=b \text{에서 } M = M_y = K\phi_0 \sin \xi$$

$$y=0 \text{에서 } M = M_y = -kK\phi_0 \sin \xi$$

$$K = 2\beta \frac{\sinh \beta \cosh \beta - \beta}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \frac{D}{b}$$

$$k = \frac{\beta \cosh \beta - \sinh \beta}{\sinh \beta \cosh \beta - \beta}$$

$$R = R_y = Q\phi_0 \sin \xi$$

$$R = R_y = -qQ\phi_0 \sin \xi$$

$$Q = \beta^2 \left[\frac{\sinh^2 \beta + \beta^2}{\sinh^2 \beta - \beta^2} + \nu \right] \frac{D}{b^2}$$

$$qQ = \frac{2\beta^3 \sinh \beta}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \frac{D}{b^2} \quad \text{여기서, } \beta = \frac{\pi b}{s}$$

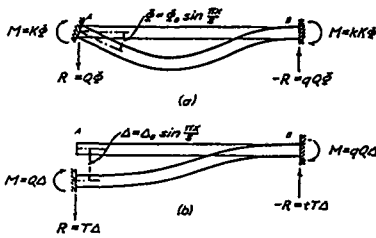
위식에서 K, Q는 바닥판의 형상(S,L)과 휨강성(D)에 의해서 결정되는 강성계수로 지점에 단위 처짐각이 발생하게 하는 모멘트와 반력을 나타낸다. [그림2]

(2) 지점에 sine함수 형태의 처짐이 발생할 경우

[그림1]에서 변 A(y=0)는 고정지지 되어 있고 변 B(y=b)에 $\Delta = \Delta_0 \sin \xi$ 의 처짐이 발생할 경우 판의 경계조건은

$$y=0 \text{에서 } \phi = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = 0 \quad y=b \text{에서 } \phi = -\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \Delta = w = \Delta_0 \sin \xi$$

이다. 이 경계조건을 이용하여 (식2)에 따라 지점부에 작용하는 모멘트와 반력을 계산하면 다음과 같다.



$$y=0 \text{에서 } M = M_y = -qQ\Delta_0 \sin \xi$$

$$R = -R_y = -tT\Delta_0 \sin \xi$$

$$t = \frac{\beta \cosh \beta + \sinh \beta}{\sinh \beta \cosh \beta + \beta}$$

$$y=b \text{에서 } M = M_y = Q\Delta_0 \sin \xi$$

$$R = R_y = T\Delta_0 \sin \xi$$

$$T = 2\beta^3 \frac{\sinh \beta \cosh \beta + \beta}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \frac{D}{b^3}$$

[그림2] 바닥판의 강성계수

위 식에서, T, Q 는 바닥판의 형상비와 휨강성에 의해서 결정되는 강성계수로 단위처짐이 발생하게 하는 반력과 모멘트를 나타낸다.[그림2]

2.2.3 바닥판의 고정단 모멘트, 반력(Fixed End Moment & Reaction for Plate)

(1) 종방향 선하중이 작용할 경우

[그림1]과 같이 양단(변A, B)이 고정지지 되어 있고, $y=y_1$ 에 $F = F_0 \sin \xi$ 의 선하중이 작용할 경우에 고정단에 작용하는 모멘트는 영향선의 개념을 이용하여 계산할 수 있다. 영향선은 상반처짐의 법칙(reciprocal theorem)을 적용하여 구할 수 있고, 하중이 $y=y_1$ 에 작용할 때 변B에 작용하는 모멘트는 $y=y_1$ 의 영향선 종거에 하중의 크기를 곱해 계산할 수 있다. 이를 수식적으로 표현하면 (식3)과 같은

$$\begin{cases} \phi = \phi_0 \sin \xi = -F = -F_0 \sin \xi \\ w = w_0 \sin \xi = M^F = M_0^F \sin \xi \end{cases} \quad (\text{식3})$$

상반관계식을 얻을 수 있다.

따라서, 변 B의 고정단 모멘트를 계산하는 문제는 상반 처짐의 법칙에 의해서 변 B에 단위 처짐각 $\phi = \phi_0 \sin \xi$ 이 발생했을 경우 처짐 w 을 구하는 문제로 단순화 될 수 있으며, 이에 따라 (식3)의 상반관계를 적용하여 변B에 작용하는 고정단 모멘트를 아래와 같이 산정할 수 있다.

$$y=b \text{에서 } M_0^F = -\frac{F_0 s}{\pi} \frac{\alpha \sinh \beta \sinh \eta_1 - \beta \eta_1 \sinh \alpha}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \quad (\text{식4})$$

$$M^F = M_0^F \sin \xi$$

$$\alpha = \beta - \eta_1 = n \frac{\pi}{a} (b - y_1)$$

$$y_1 = \text{선하중작용위치}$$

고정단에 작용하는 반력도 고정단 모멘트의 경우와 마찬가지로 상반처짐법칙과 영향선의 개념을 적용하면 아래와 같은 상반관계식을 유도할 수 있으며, 이에 따라 변 B에 작용하는 고정단 반력은 (식6)과 같다.

$$\begin{cases} \Delta = \Delta_0 \sin \xi = -F = -F_0 \sin \xi \\ w = w_0 \sin \xi = R^F = R_0^F \sin \xi \end{cases} \quad (\text{식5})$$

$$y = b \text{에서} \quad R_0^F = -\frac{F_0}{\sinh^2 \beta - \beta^2} \{ \sinh \beta (\sinh \eta_1 + \alpha \cosh \eta_1) - \beta (\sinh \alpha + \eta_1 \cosh \alpha) \} \quad (\text{식6})$$

$$\text{여기서,} \quad R^F = R_0^F \sin \xi$$

$$\alpha = \beta - \eta_1 = n \frac{\pi}{a} (b - y_1)$$

$y_1 =$ 선하중작용위치

(2) 판전체에 분포하중이 작용할 경우

판전체에 $p = p_0 \sin \xi$ 의 분포하중이 작용할 경우에도 판의 경계조건과 하중에 의한 특별해를 이용하면 (식7)과 같은 고정단 모멘트와 반력을 산정할 수 있다.

$$\begin{aligned} M^F &= -(Q - qQ) p_0 \frac{s^4}{D\pi^4} \sin \xi + \nu \frac{p_0 s^2}{\pi^2} \sin \xi \\ R^F &= -(T - tT) \frac{p_0 s^4}{D\pi^4} \sin \xi \end{aligned} \quad (\text{식7})$$

2.2.3 거더의 처짐 및 비틀림

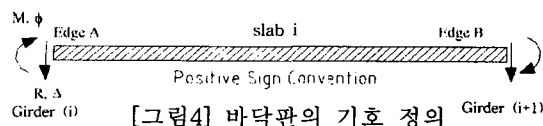
바닥판에 작용하는 조화하중에 의해 각 거더에는 같은 주기를 갖는 조화함수의 반력이 작용하게 되고 이 반력은 거더에 $\Delta_{(i)} = \Delta_{(i0)} \sin \xi$ 만큼의 처짐을 발생하게 한다. 따라서, $\Delta_{(i)}$ 의 값이 결정되면 보의 지배 미분방정식에 의해서 거더에 작용하는 하중과 모멘트, 전단력등을 계산할 수 있다.

또한 거더의 단면에 $\phi_{(i)} = \phi_{(i0)} \sin \xi$ 의 회전각이 발생할 경우, 거더의 비틀림 강성에 의해서 그에 저항하는 비틀림이 작용하게 된다.

$$\begin{aligned} \therefore F_{(i)} &= U_{(i)} \Delta_{(i)} = \frac{\pi^4}{s^4} EI_{(i)} \Delta_{(i0)} \sin \xi & \phi_{(i)} &= \phi_{(i0)} \sin \xi \\ M_{(i)} &= \frac{\pi^2}{s^2} EI_{(i)} \Delta_{(i0)} \sin \xi & M_{T(i)} &= GJ_{(i)} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \phi_{(i0)} \sin \xi \\ V_{(i)} &= \frac{\pi^3}{s^3} EI_{(i)} \Delta_{(i0)} \cos \xi & M_{T(i)} &= L_{(i)} \phi_{(i0)} \sin \xi, \quad L_{(i)} = GJ_{(i)} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \end{aligned} \quad (\text{식8})$$

2.2.4 평형방정식

거더의 처짐이 구속된 경우 i번째 슬래브의 양 지점(i), (i+1)에 대해서 처짐각법을 적용하면, 하중에 의한 고정단 모멘트와 반력($M_{(i0)}^{Fi}$, $R_{(i0)}^{Fi}$), 각 지점의 처짐각의 함수로 지점 모멘트와 반력을 계산할 수 있다. 마찬가지로 거더의 처짐만이 발생할 경우에는 양 지점의 처짐에 의한 고정단 모멘트와 반력, 각 지점의 처짐각의 함수로 지점 모멘트와 반력을 계산할 수 있다.



[그림4] 바닥판의 기호 정의

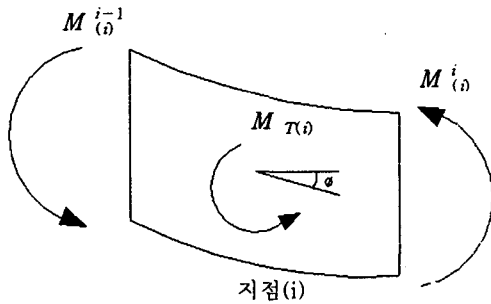
(a) 거더의 처짐이 구속된 경우

$$\begin{aligned} M_{(i)}^i &= [M_{(i0)}^{Fi} + K_i \phi_{(i0)} + k_i K_i \phi_{(i+10)}] \sin \xi \\ M_{(i+1)}^i &= [M_{(i+10)}^{Fi} + K_i \phi_{(i+10)} + k_i K_i \phi_{(i0)}] \sin \xi \\ R_{(i)}^i &= [R_{(i0)}^{Fi} + Q_i \phi_{(i0)} + q_i Q_i \phi_{(i+10)}] \sin \xi \\ R_{(i+1)}^i &= [R_{(i+10)}^{Fi} - Q_i \phi_{(i+10)} - q_i Q_i \phi_{(i0)}] \sin \xi \end{aligned} \quad (\text{식9})$$

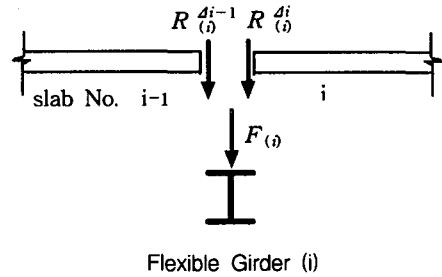
(b) 거더의 처짐만 발생한 경우

$$\begin{aligned} M_{(i)}^{Ai} &= [Q_i \Delta_{(i0)} - q_i Q_i \Delta_{(i+10)} + K_i \phi_{(i0)}^A + k_i K_i \phi_{(i+10)}^A] \sin \xi \\ M_{(i+1)}^{Ai} &= [-Q_i \Delta_{(i+10)} + q_i Q_i \Delta_{(i0)} + K_i \phi_{(i+10)}^A + k_i K_i \phi_{(i0)}^A] \sin \xi \\ R_{(i)}^{Ai} &= [T_i \Delta_{(i0)} - t_i T_i \Delta_{(i+10)} + Q_i \phi_{(i0)}^A + q_i Q_i \phi_{(i+10)}^A] \sin \xi \\ R_{(i+1)}^{Ai} &= [T_i \Delta_{(i+10)} - t_i T_i \Delta_{(i0)} - Q_i \phi_{(i+10)}^A - q_i Q_i \phi_{(i0)}^A] \sin \xi \end{aligned} \quad (\text{식10})$$

위와 같이 각 지점(i)의 모멘트와 반력을 산정한 후, 각 지점의 평형방정식을 적용하면 처짐각(ϕ, ϕ^A)과 처짐(Δ)을 결정할 수 있다.



[그림5] 지점의 모멘트 평형



[그림6] 지점의 수직력 평형

[그림5]는 각 지점(거더)부의 모멘트 평형방정식을 나타내고 있다. 거더의 처짐이 구속된 경우에는 지점(i)의 평형방정식을 구성하면 아래와 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$[K]\{\phi_{(i0)}\} = \{-M_{(i0)}^F\} \quad (\text{식11})$$

거더의 처짐만 발생한 경우에는 각 지점에 두 개의 미지수가 발생하므로, 모멘트 평형식과 수직력의 평형식을 모두 이용해야 하며, 그에 따라 아래와 같이 Δ 와 ϕ 에 대한 관계식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [Q^A] & [K] \\ [T] & [Q^0] \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \{\Delta_{(i)}\} \\ \{\phi_{(i)}^A\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{-R_{(i)}^r\} \end{pmatrix} \quad (\text{식12})$$

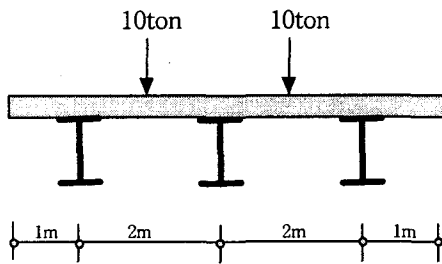
먼저 (식11)를 이용하여 거더의 처짐이 구속된 경우 하중에 의한 지점부의 처짐각을 결정하고 (식9)에 재대입하므로써 지점부 모멘트와 반력($R_{(i)}^r$)을 계산하고, (식12)와 (식10)를 이용해 거더의 처짐효과에 의한 지점부 모멘트와 반력을 계산하여 중첩하므로써 최종적인 바닥판의 지점부 모멘트를 결정할 수 있다.

내부지점을 갖는 연속교의 경우에는 각 내부지점에서의 적합조건을 이용하여 지점 반력을 계산할 수 있으며, 지점반력과 외부하중을 동시에 단순교에 작용시킴으로써 해석이 가능하다.

3. 프로그램 검증

이상과 같이 조화해석법과 처짐각법의 원리를 이용하여 판형교 해석 프로그램(ASGB)을 작성하였다. 프로그램을 검증하기 위해서 3거더교의 바닥판 모멘트와 거더 모멘트등에 대해서 범용유한요소해석 프로그램인 LUSAS와 비교하여 보았다. 바닥판은 8절점 shell요소를 사용하였으며, 거더는 3차원 thick beam을 사용하여 모델링 하였다.

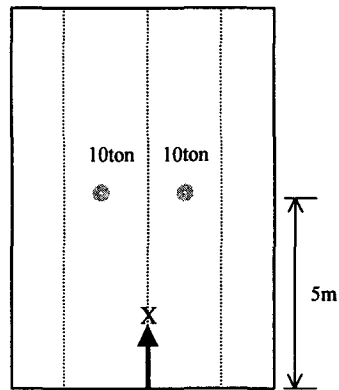
3.1 룬하중 재하시



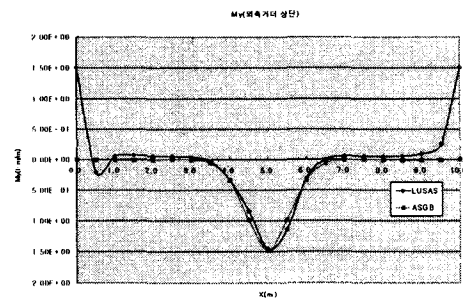
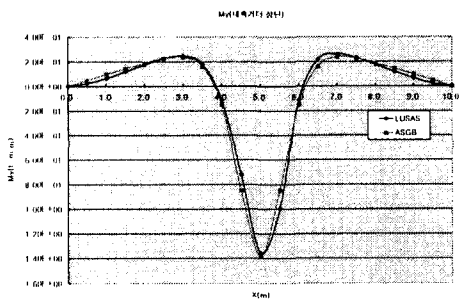
$$I_x = 2.0833e-2m^4, J = 4.43137e-3m^4$$

$$L = 10m, \text{ 단순교}$$

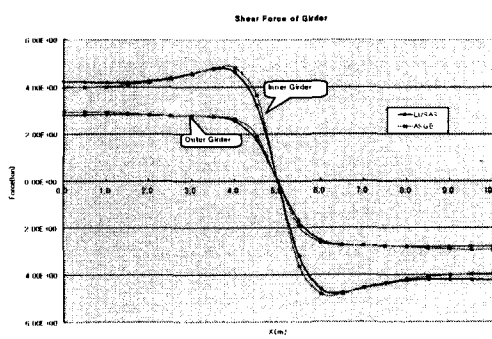
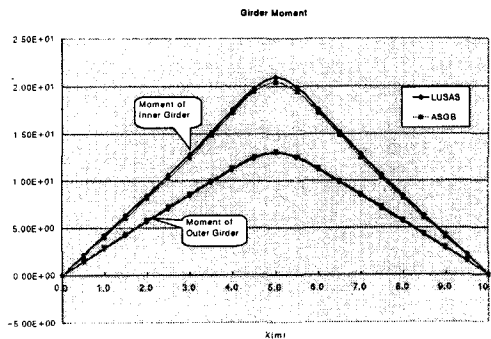
[그림7] 3거더교 단면형상



[그림8] 하중 재하위치



[그림9] 내·외측 거더상단 바닥판의 횡방향 모멘트

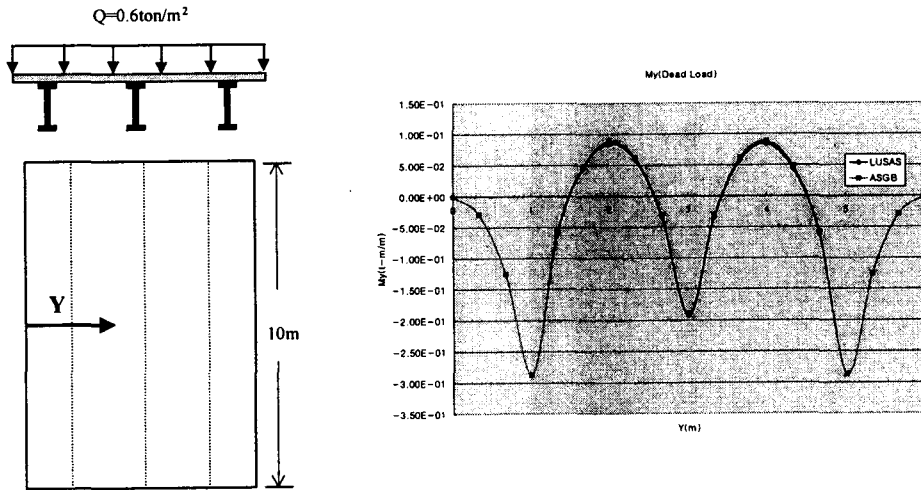


[그림10] 내·외측 거더의 모멘트와 전단력

FEM 해석치와의 비교결과, 바닥판의 지점부에 작용하는 모멘트는 하중위치에서 오차가 5%정도로 큰 차이가 없었지만, 교량의 양지점의 영향이 미치는 범위에서는 FEM해석에서의 응력집중등의 영향으로 오차가 조금 커지는 경향을 보인다. 그러나 절대값이 10^2 정도로 하중위치에 비해서 그 값이 상당히 작으므로 합리적인 바닥판의 휨 거동 해석에는 무리가 없을 것으로 판단된다. 또한 거더의 모멘트나 전단력도 [그림10]와 같이 FEM과 거의 유사한 결과를 나타내고 있다.

3.2 사하중 재하시

콘크리트 바닥판의 단위중량을 $2.4t/m^3$ 으로 가정하여, 바닥판의 사하중 $0.6t/m^2$ 를 재하했을 때의 바닥판 모멘트 횡방향 분포를 FEM해석치와 비교해 보았으며, 모든 위치에서 10%미만의 차이를 보여주고 있다.



4. 결론

본 연구에서는 바닥판 거더부에 작용하는 부모멘트에 대한 매개변수분석을 통한 합리적인 바닥판의 설계를 위해서, 거더의 상대처짐을 고려할 수 있는 바닥판 해석법을 개발하였으며, 유한요소해석법과 비교를 통하여 프로그램의 타당성을 검증하였다. 따라서, 본 연구를 통하여 개발된 프로그램을 이용하면 단시간 내에 바닥판의 거더부 모멘트와 거더의 응답형태를 해석할 수 있다. 이 연구결과는 바닥판의 거동에 영향을 미치는 여러 가지 변수들에 대한 분석에 사용될 수 있으며, 이를 바탕으로 경제성과 내구성이 향상된 합리적인 바닥판의 설계방법을 개발할 수 있을 것이다.

감사의 글 : 본연구는 1996년도 건설교통부 국책과제 '상부철근이 부분제거된 판형교 바닥판의 개발' 1차년도 연구를 바탕으로 작성되었으며 연구비 지원에 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

5. 참고문헌

1. Westergaard, H. M., "Computation of Stresses in Bridge Slabs due to Wheel Loads", Public Roads. (Mar.), pp1-23., 1930
2. Cao, L., "Analysis and Design of Slab-on-Girder Highway Bridge Decks", Ph.D.Thesis, Department of Civil, Envir. and Archi. Engineering, University of Colorado, 1996
3. Cao, L., P. B. Shing, "Behavior of RC Bridge Decks with Flexible Girders", J. Struct. Engrg., ASCE, 122(1), pp 11-19., 1996
4. Newmark, N.M., "A Distribution Procedure for the Analysis of Slabs Continuous Over Flexible Beams", Bulletin No. 304, Univ. of Illinois Eng. Experiment Station, Urbana., 1938
5. Bakht B., Jaeger L.G., "Bridge Analysis by Microcomputer", McGraw-Hill, 1989