한국전산구조공학회
1998년도 봄학술발표회 논문집

무요소절점법을 이용한 균열진전해석 알고리즘 개발

A Crack Propagation Analysis Algorithm Using Meshless Particle Method

이 상 호* 이 진 우** 윤 영 철***
Lee, Sang-Ho Lee, Jin-Woo Yoon, Young-Cheol

Abstract

A new algorithm using meshless particle method for the analysis of crack propagation problems is presented. The meshless particle method requires only a set of nodes and the description of boundaries in its formulation. The method is particulary useful for crack propagation problems due to the absence of any predefined element connectivity. Formulation procedures for the construction of displacement and shape functions are described. A numerical integration scheme and a strategy for the consideration of crack propagation are also described. Numerical examples show that the proposed method is very convenient and efficient in modeling crack problems and can guarantee the accuracy of solution in crack propagation analysis.

1. 서론

균열의 거동을 예측하고 그로 인한 물리적 영향을 파악하고자 하는 연구는 파괴역학이론을 바탕으로 발전해 왔다. 이러한 연구들은 초기에는 이론적 접근방법에 의존하였으나, 강력한 수치해석방법의 사용이 보편화된 이후부터는 복잡한 해를 보다 손쉽게 구하기 위하여 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치해석기법에 주로 의존하고 있다.

유한요소법이나 경계요소법은 요소개념을 사용하는 수치해석 방법이므로 수치해를 구하기 위해서는 해석대상모델을 유한개의 요소로 분할하여 해석을 수행해야 한다. 이때 요소모형의 제작과정에서 요소와 요소, 요소와 절점들 사이에는 어떤 규칙이 만족되어야만 한다. 이러한 제약성은 균열문제의 해석에 있어 균열선단에 발생하는 특이성(singularity)이나 균열 주변에서 발생하는 응력집중현상을 보다 정확히 규명하기 위해 세밀한 요소망을 구성하는데 어려움을 가중시킨다. 특히 균열의 전파문제와 같이 해석대상체 내의 불연속 구간이 계속적으로 변화하는 경우에는 균열이 성장함에 따라 계속적으로 해석모형을 수정해주어야 하므로 균열진전과정해석을 위해서는 전처리과정에 엄청난 시간과 노력이 요구된다.

균열성장 해석에 있어 기존 유한요소법에 의한 해석방법을 살펴보면 Malluck과 King[1]은 초기균열에서 유한요소의 경계를 따라 균열의 성장을 해석하는 Nodal Release Method를 제안하였고, Swenson과 Ingraffea[2]는 균열선단부분에 국부적으로 세밀한 요소망을 사용해 균열성장을 예측하려고 하였다. Schlangen과 Mier[3]는 스프링 모형으로 균열성장을 해석을 시도하였고, Al-Ostaz와 Jasiuk[4]는 항복한계에 다다른 요소를 제거하여 균열성장을 해석하려 하였다.

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 조교수
** 서영기술단 구조3팀
*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

그러나 이러한 방법들은 아주 세밀한 요소망을 필요로 하며, 요소를 재구성함에 따라 정확성을 보장할 수 없고, 복잡한 균열형상을 지닌 경우 해석상의 어려움을 야기시키며, 부분적인 균열전파과정만을 예측할 수 있는 단점을 지니고 있다.

이러한 단점을 극복하고 균열진전과정을 보다 효율적이고 정확히 예측하기 위하여 본 논문에서는 요소를 사용하지 않고 절점들만을 사용하여 해석을 수행할 수 있는 무요소절점법[5]을 이용하여 균열문제를 효과적으로 해석할 수 있는 해석기법을 제안하고, 균열의 진전에 따른 연속적인 해석을 요소망의 재구성 없이 효율적으로 수행할 수 있는 균열진전해석 알고리즘을 제안한다.

2. 무요소절점법을 이용한 균열해석

2.1 무요소해석이론의 근사해 도출방법

무요소절점법에서 변위장 u_i는 이동최소제곱보간에 의해 다음과 같이 근사변위함수 $u_i^h(x)$로 나타낼 수 있다.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)\, a_i(x) \equiv p^T(x)\, a(x) \tag{1}$$

여기서, $p(x)$는 m개의 항을 갖는 다항식을 나타내는 벡터이며, 이에 대응하는 계수값 $a_i(x)$ 역시 좌표계 x의 함수로서 이동최소제곱보간에 의한 변위 $u_i^h(x)$를 결정해 주는 미지계수 값이다.

임의의 점 x에서의 미지계수값 $a_i(x)$는 x를 기준으로 하는 일정한 영향영역내의 절점들 x_I의 변위 오차에 대한 가중잔여치를 최소화시켜 구할 수 있다. 이 때 가중잔여치는

$$J = \sum_{I=1}^{n_{m}} w(x - x_I)\, [\, p^T(x_I)\; a_i(x) - u_{Ii}\,]^2 \tag{2}$$

여기서, u_{Ii}는 $x = x_I$에서의 i성분 절점변위이고 $w(x - x_I)$는 기준점으로부터 떨어진 x_I에서의 가중치이다. 또한 n_{sm}은 x를 중심으로 일정거리내(영향영역)에 포함되는 절점들의 개수를 의미한다. 식(2)를 최소화시켜 미지계수 $a_i(x)$를 구하면

$$a_i(x) = A^{-1}(x)\, C(x)\, u_i \tag{3}$$

여기서,

$$A(x) = \sum_{I=1}^{n_m} w(x - x_I)\, p(x)\, p^T(x_I) \tag{4}$$

$$C(x) = [\, w(x - x_I)\, p(x_1), \cdots\cdots, w(x - x_{ns})\, p(x_{ns})\,] \tag{5}$$

근사변위함수 u_i^h는 식 (3)을 식 (1)에 대입하여 구할 수 있다.

$$u_i^h(x) = \sum_{I}^{n_m} \sum_{J}^{m} p_J(x)\,(A^{-1}(x)\, C(x))_{JI}\, u_{Ii} = \sum_{I=1}^{n_m} \phi_I(x)\, u_{Ii} \quad x \in \Omega_{MP} \tag{6}$$

여기서 Ω_{MF}는 기준점 x를 중심으로 형상함수를 도출하기 위해 고려하는 일정한 크기의 영향영역이다.

따라서 기준점 x를 중심으로 영향영역내에 위치하는 임의의 I번째 절점의 형상함수 $\phi_I(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_I(x) = \sum_{J}^{m} p_J(x)\,(A^{-1}(x)\, C(x))_{JI} \tag{7}$$

2.2 가중함수와 영향영역의 선택

무요소절점법을 이용한 정식화과정에서 중요한 요소의 하나는 가중함수(weight function)를 결정하는 일이다. 가중함수 $w_I(x) \equiv w(x - x_I)$는 기준점 x를 중심으로 영향영역내에 포함된 임의의 절점 x_I가 갖게 되는 거리에 따른 가중치를 결정해 주는 함수로서 x_I가 x에 가까울수록 그 가중치는 상대적으로 커지고 반대로 x_I가 멀어질수록 작아지며, x_I가 영향영역 밖에 위치할 경

우는 가중함수의 값은 0이 되고 기준점 $\mathbf{x}$에서는 가중치가 최대값 1이 되는 특성을 갖는 compact form의 함수이다.

2차원 해석의 경우 기준점에 대한 영향영역은 주로 원형이나 사각형 영역을 사용한다. 일반적으로 사용되는 가중함수는 exponential 형태의 Gaussian 가중함수와 quartic 또는 cubic spline 형태의 가중함수이다. 그림 1은 원형형태의 영향영역을 사용하여 해석대상체내의 기준점들을 따라 이동하며 형상함수를 구성하는 개념을 나타낸 그림이다. 원래 형태의 영향영역 사용할 때 이에 따른 exponential 가중함수는 다음과 같은 Gaussian 함수를 사용하였다.

$$\text{Gaussian:} \qquad w(d_I) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-(d_I/c)^2) - \exp(-(d_{mI}/c)^2)}{1-\exp(-(d_{mI}/c)^2)} & d_I \le d_{mI} \\ 0 & d_I > d_{mI} \end{cases} \tag{8}$$

여기서, c는 상대적 가중치를 조절하는 상수이고 $d_I = \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_I \|$이며, d_{mI}는 $\mathbf{x}_I$의 영향영역의 크기이다.

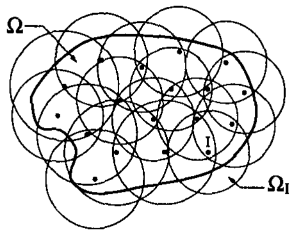

그림 1 원형의 영향영역

2.3 무요소절점법의 수치적분방법

계방정식의 구성에 필요한 강성도 행렬과 외력 벡터를 계산하기 위해서는 전체영역 Ω에 대한 적분을 실시해야 하는데 무요소절점법에서는 유한요소법과 같이 전체영역을 명확하게 요소로 구분 짓는 것이 아니기 때문에 다른 방법으로 부영역을 설정해서 수치적분을 수행해야 한다.

본 연구에서는 해석대상체의 전영역과 일치하는 cell 구조를 구성하여 수치적분에 사용하였다. 이 때 cell 구조를 형성하기 위해 사용되는 절점들은 원칙적으로 무요소절점법에 사용되는 자유도를 지닌 절점들과는 무관하나 경우에 따라서는 유한요소법에서와 같이 자유도를 지닌 절점들을 이용하여 cell 구조를 형성할 수도 있다.

무요소절점법에서는 cell 구조를 사용하여 해석대상영역을 분할함에 있어 유한요소법과는 달리 cell과 cell 구성절점들 사이의 연속성을 만족시킬 필요가 없으므로 임의의 세부 분할이 가능한 장점을 지니고 있다. 본 연구에서는 해의 정도를 향상시키기 위하여 수치적분시 각 cell에서 고차의 quadrature rule을 사용하였다.

유한요소법에 있어서는 균열이 요소내로 파고 들어갈 수 없으며 균열경계를 따라 요소가 배치된다. 무요소절점법에서는 균열경계를 따라 자유도를 지닌 절점이 배치되는 것은 유한요소법과 같으나 수치적분을 위해 구성한 cell 구조의 내부로 균열이 진전되어도 상관없으며 적절한 방법으로 불연속성을 고려하여 형상함수와 변위함수를 도출하면 해의 높은 정확도를 유지할 수 있다.

2.4 균열에 의한 불연속성을 고려한 영향영역의 설정

무요소절점법을 이용한 해석에서 가중함수 뿐 아니라 근사함수와 그 도함수도 일치된 연속성을 지녀야 한다. 해석대상체내에 균열과 같은 불연속 구간이 존재하게 되면 근사함수를 구성하는데 영향을 끼치게 되어 해의 정확도를 떨어뜨릴 수 있다.

무요소절점법을 이용한 근사변위함수의 도출에 있어 균열과 같은 불연속 문제를 가장 손쉽게

다룰 수 있는 방법은 가시한계론(visibility criterion)이다. 이 방법은 단순히 영향영역을 어떤 절점에서 파악할 수 있는 영역으로 간주하여 영향영역이 불연속 경계면과 접하는 모든 경계를 비가시권으로 구분한다. 그림 2에서 J절점을 중심으로 보면 영향영역내의 검게 칠한 부분은 균열과 같은 불연속면으로 인해 비가시권으로 분류되어 고려대상 영역에서 제외된다. I절점을 중심으로 볼 때에는 폐구간 CAB가 비가시권으로 분류된다. 이와같이 비가시권을 제외한 나머지 영향영역을 유효한 영향영역으로 삼아 근사함수를 도출하는 방법은 절단면 부근에서의 형상함수를 불연속하게 만드는 단점이 있으나 해의 정도를 손쉽게 유지할 수 있는 방법이다.

또 구멍이 있는 부재와 같이 볼록한 경계면 주위의 절점에서도 형상함수가 불연속이 될 수 있다. 불연속의 길이와 크기는 볼록한 경계근처에 절점을 얼마나 세밀하게 배치하느냐에 달려있다. 즉, 절점사이의 간격이 0에 가까이 질수록 불연속성이 0에 가까워진다.

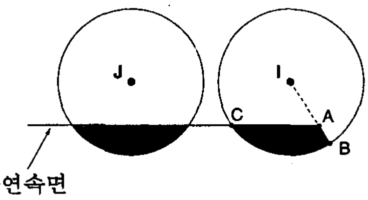

그림 2 균열에 의한 불연속성을 고려한 유효영향영역의 설정

3. 균열진전해석 알고리즘

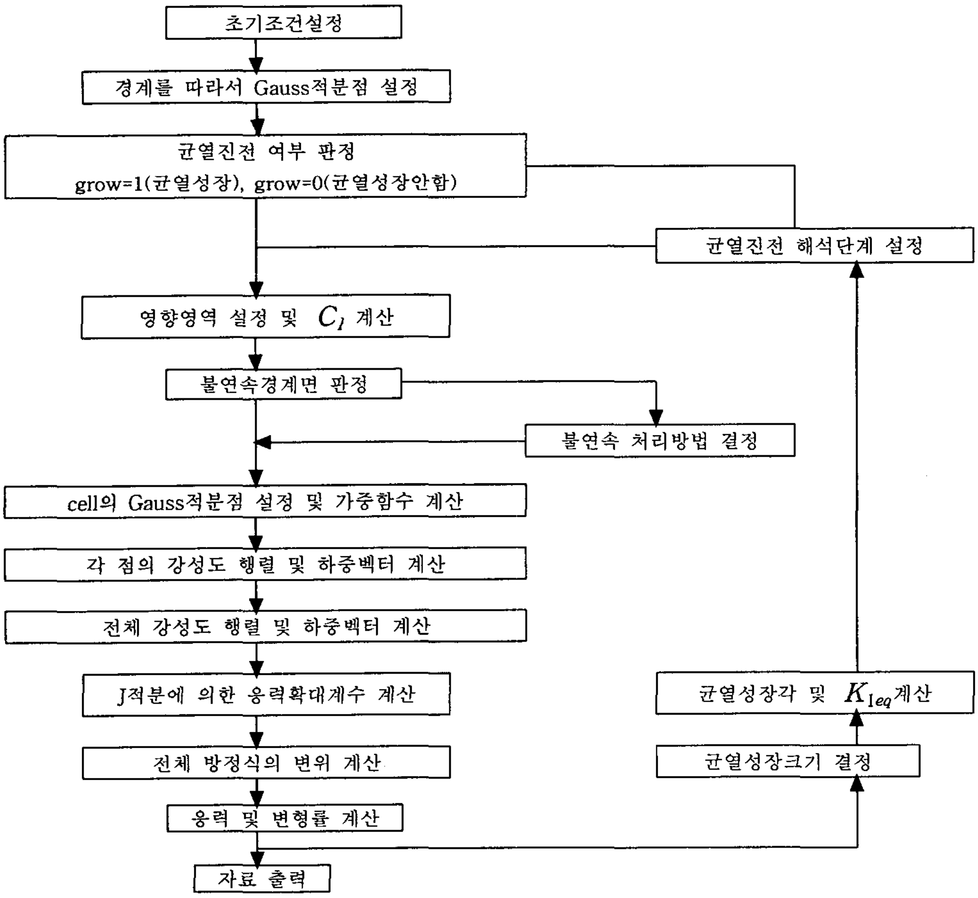

그림 3 무요소절점법을 이용한 균열진전해석 알고리즘의 흐름도

본 연구에서는 무요소절점법의 기본 이론들을 바탕으로 하여 균열의 진전에 따른 구조 부재의 점진적 파괴발달 양상의 거동규명을 위한 새로운 알고리즘을 개발하여 프로그램화하였다. 해석 프로그램은 선형탄성파괴역학이론을 바탕으로 개발하였으며 해석 알고리즘의 흐름도는 그림 3과 같다.

균열선단 주변에서의 변위와 응력장을 결정하기 위해서는 응력확대계수(stress intensity factor, K)가 계산되어야 한다. 응력확대계수를 산정하는 방법에는 여러 가지가 있으나 본 연구에서는 영역적분을 이용한 J적분방법[6]을 사용하였다.

균열의 성장방향을 예측하기 위해서는 균열은 최대후프응력($\sigma_{\theta\theta}$)의 직각방향으로 진전한다는 가정을 사용한 최대주응력 한계론을 사용하였다. 혼합모드의 경우 최대후프응력의 방향(전단응력이 없어지는 방향) θ는 다음과 같은 식으로부터 구할 수 있다.

$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\ \left[\frac{1}{2}K_{\rm I}\sin\theta+\frac{1}{2}K_{\rm II}(3\cos\theta-1)\right]=0 \tag{9}$$

균열선단주변에서의 해의 정도를 높이기 위해 별모양의 절점군을 만들어 균열선단에 위치시켰다. 이 절점군은 균열이 성장함에 따라 좌표변환에 의해 자동으로 새로운 균열선단에 위치하도록 하였으며 균열성장에 따라 변화하는 불연속 경계면에 새로운 절점들을 추가하여 균열을 묘사함으로써 일련의 균열진전과정해석을 자동으로 수행할 수 있도록 하였다.

4. 수치적 검증

4.1 모드 I 균열문제

본 연구에서 제안한 알고리즘을 바탕으로 개발된 프로그램의 정확성과 실용성을 검증하기 위하여 유한판에 인장응력이 작용하는 모드 I 상태 균열문제의 응력확대계수를 산정하여 보았다. 해석대상 구조체와 응력확대계수 산정을 위한 J적분 영역은 그림 4와 같으며 무요소절점법을 사용할 때의 절점배치모형은 그림 5와 같다. 이때, 균열선단에서의 수치해의 정도를 향상시키기 위해 균열선단주위에 별모양의 절점군을 추가로 배치하였다.

균열이 진전함에 따른 응력확대계수의 변화를 이론해와 비교하기 위하여 해석단계별로 균열을 0.5cm씩 성장시켜가며 별모양 절점군을 사용한 경우와(case b) 사용하지 않은 경우(case a)의 정규화된 응력확대계수 값을 step 1의 이론해를 기준으로 표 1에 나타내었다. 앞장에서 설명한 균열진전단계별 자동화 해석과정을 이용하여 균열의 성장에 따른 인위적인 해석모형의 수정없이 전 해석단계를 한 번에 수행하였다. 표 1에서 보는 바와 같이 균열선단주변에 추가의 절점들만을 배치함으로써 손쉽게 수치해의 에러를 19%(case a의 경우)에서 3.6%(case b의 경우)로 감소시킬 수 있었으며, 일련의 자동화과정 후의 해석결과의 정확도는 안정적임을 알 수 있었다. 본 예제에서 균열선단 주위의 절점수를 더욱 증가시킬 경우 수치에러를 1%이내로도 줄일 수 있음을 확인하였다.

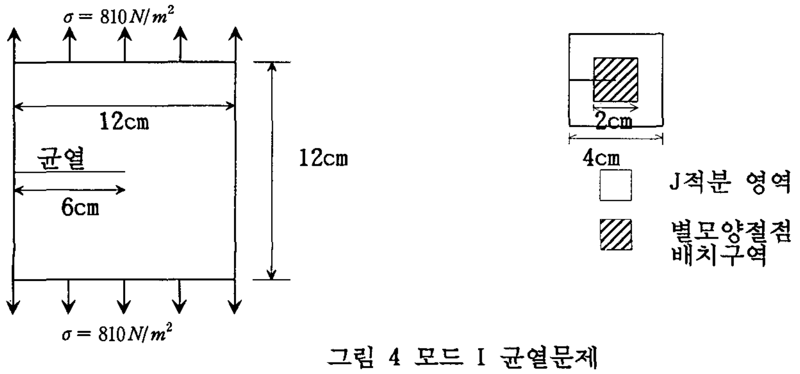

그림 4 모드 I 균열문제

그림 5 무요소절점법을 이용한 모델링

표 1 모드 I 균열문제의 정규화된 응력확대계수 비교

해석단계 (0.5cm/step)	K_e(엄밀해)	K_I(본 연구)			
		Case a	error(%)	Case b	error(%)
Step 1	1.000	0.8402	19.0	0.9649	3.6
Step 2	1.040	0.8725	19.2	1.0040	3.6
Step 3	1.080	0.9082	18.9	1.0420	3.6
Step 4	1.118	0.9392	19.0	1.0778	3.7
Step 5	1.154	0.9695	19.0	1.1125	3.7

4.2 유한판의 복합모드 균열문제

그림 6과 같이 하단이 고정되고 상단에 전단응력 τ를 받는 모드 I, 모드 II의 복합모드상태의 균열문제를 대상으로 균열의 진전해석을 실시하였다. 이때 산정된 응력확대계수의 정확도를 비교해 보기 위하여 K_I 과 K_{II}를 모드 II의 이론해 K_{II}를 기준값 1로 하여 정규화된 값으로 표 2에 나타내었다. 20개의 절점을 추가로 균열선단 주변에 별모양으로 배치한 경우에 수치해의 오차는 약 4.5%를 나타내었다. 그림 7은 균열진전해석과정상의 한 step에서의 Mises 유효응력을 나타낸 것이다.

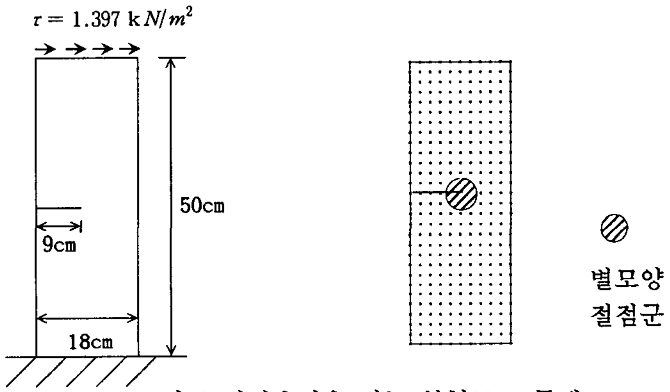

그림 6 전단응력을 받는 복합모드 문제

표 2 복합모드의 정규화된 응력확대계수비교

	엄밀해	본 연구	오차(%)
K_I	7.473	7.147	4.5
K_{II}	1.000*	0.954	4.6

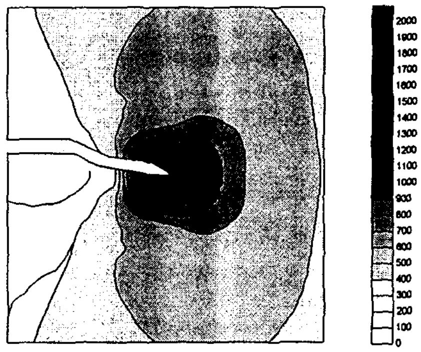

그림 7 균열진전에 의한 Mises 유효응력분포

5. 결론

본 연구에서는 균열진전해석에 있어 기존의 수치해석방법을 사용할 때에 발생하는 균열진전에 따른 요소망 재구성의 어려움을 극복하고 균열선단주변의 수치해의 정확도를 손쉽게 향상시킬수 있도록 하기 위하여 무요소절점법이론을 이용한 균열진전해석 알고리즘과 프로그램을 개발하였다. 개발된 프로그램의 정확성과 실용성을 검증하기 위하여 모드 I 상태와 혼합모드상태의 균열진전문제에 적용해 본 결과 본 연구에서 제안한 방법은 일련의 균열진전과정을 자동으로 해석할 수 있었으며 절점추가방법에 의해 얻어진 수치해의 정확도는 정도면에서 충분히 신뢰할 수 있는 것으로 판단되었다.

감사의 글

본 연구는 한국표준과학연구원 방재기술연구센터의 1997년 기관교육사업 위탁연구로서의 지원을 받아 이루어졌으며 이에 감사의 뜻을 표합니다.

참고문헌

1. Malluck, J.F. and King, W.W., "Fast fracture simulated by conventional finite elements: A comparison of two energy-release algorithms," Crack Arrest Methodology and Applications., *ASTM STP*, Vol. 711, 1980, pp. 38-53.
2. Swenson, D.V. and Ingraffea, A.R., "Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: Theory and applications," *Computational Mechanics.*, Vol. 3, 1988, pp. 381-397.
3. Schlangen, E. and Mier, J.G.M., "Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites", *Cement & Concrete Composites.*, Vol. 14, 1992, pp. 105-118.
4. Al-Ostaz, A. and Jasiuk.I, "Damage initiation and propagation in an elastic brittle material with randomly distributed holes", In 1995 Winter Annual Meeting., *ASME*, 1995.
5. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, Vol. 37, 1994, pp. 229-256.
6. Moran, B. and Shi, C.F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum energy balance", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, No.6, 1987, pp. 615-641.