

p -Version 유한요소해석에 의한 탄소성 평판의 극한하중 산정

A Limit Load of Elastic-Plastic Plates by p -Version Finite Element Analysis

박진환*
Park, Jin-Hwan

정우성**
Jung, Woo-Sung

우광성***
Woo, Kwang-Sung

ABSTRACT

Although a structural analysis based on the linear elastic theory yields good results for deformations and stresses produced by working loads, it fails to assess the real load-carrying of the plates on the verge of yielding. In case of a limit analysis of plates, the yield line theory is widely used on the basis of the upper bound theorem and theoretically it overestimates the strength of the plate. There is, therefore, a general need for analytical methods of predicting the inelastic behavior and load-carrying capacities of plate subjected to arbitrary loadings and boundary conditions. The p -version of finite element method has been presented for determining the accurate limit load of plates. The numerical results by p -version model compares with the results obtained by the h -version software ADINA, as well as with the available analytical solutions in literatures.

1. 서론

평판구조물의 해석 및 설계는 통상 Kirchhoff의 고전적 평판이론 또는 전단변형을 고려할 수 있는 Mindlin 평판이론에 근거를 두고 선형탄성해석에 의존하고 있다. 그러나, 비정형 평판(irregular plate)인 사각(skewness)을 갖는 평판, 개구부(opening)를 갖는 평판, 요형모서리(reentrant corner)를 갖는 손상평판, 노치(notch)나 균열을 갖는 평판 등에는 기하학적 요인에 의해 응력특이(stress singularity)가 발생된다. 이러한 응력특이가 발생하는 응력특이점의 인접 영역은 쉽게 항복에 도달하여 구조시스템을 탄소성거동으로 변환시키게 된다. 또한, 설계하중보다 과도한 하중, 특히 율하중과 같은 집중하중이 발생하는 점에서도 소성영역(plastic zone)이 발생됨을 알 수 있고 연성재료인 경우에는 초기항복 발생후에도 응력의 재분배(stress redistribution)현상에 의한 내하력의 증가를 기대할 수 있다.

탄소성 거동을 하는 평판은 재료적 비선형(material nonlinearity)에 기인하여 두 가지점에서 선형탄성거동과 차이점을 갖게 된다. 첫째는, 항복점이후 하중-변위곡선이 비선형이 되므로 선형탄성해석과 달리 상대적으로 큰 처짐을 유발하게 된다. 둘째는, 높은 수준의 하중이 재하되었을 때 평판은 더 이상 탄성거동을 하지 않게되며 초기 항복점을 중심으로 소성영역의 전파가 발생되어 마침내 항복선(yield line)을 형성하게 된다. 다시 말하면, 파괴시의 극한하중(limit load) 또는 극한내하력(ultimate load capacity)의 정확한 해석이 가능해야만 보다 신뢰성이 있는 소성설계(plastic design)를 수행할 수 있는 것이다.

* 영남대학교 토목공학과 대학원

** 한국수자원공사 수자원 연구소 구조재료팀 연구원

***영남대학교 토목공학과 교수

현재까지의 극한해석(limit analysis)은 사각형 평판에 등분포하중이 작용할 경우 하한계정리(lower bound theorem)와 상한계정리(upper bound theorem)에 대한 이론이 제시되어 왔다. 그러나, 평판구조물의 설계시 하한계정리에 의하면 다소 과다설계가 우려되며, 상한계정리를 사용할 경우 평판의 강도를 과대평가 하여 다소 위험설계가 될 소지가 있다. 또한, 초기항복에서 붕괴(collapse)가 발생할 동안의 처짐값 예측이 사실상 불가능한 단점을 갖고 있다. 그리고, 평판 주변의 다양한 경계조건, 임의의 기하형상, 복잡한 하중의 작용시에는 항복선이론(yield line theory)에 기초를 둔 극한해석의 이론값이 존재하지 않기 때문에 유한요소법과 같은 수치해석법이 대안으로 제시되고 있다. 1960년대 Belytschko, Hodge, Ang 등에 의해 유한요소법을 이용한 평판구조물의 극한내하력 산정이 최초로 수행되었다. 그 후 많은 연구자들은 전단변형효과를 고려한 평판요소의 개발과 기하학적 비선형성을 고려한 요소를 개발하였다. 그러나, 이러한 대부분의 연구는 h-version 유한요소법에 기초를 두고 있어 응력특이가 발생하는 문제의 경우 그 특이점을 중심으로 많은 요소를 분포시키는 등 요소의 배치라든지 요소의 선택 등에 주의하여야 하고, 특정 수렴값을 얻기 위해서는 많은 자유도와 해석시간을 요구하고 있다. 이러한 자유도나 해석시간의 문제는 비선형문제일 경우 더욱 중요한 과제로 대두된다.

따라서, 본 연구에서는 응력특이 문제에 상대적으로 적합한 p-version 유한요소법을 이용하여 평판구조의 탄소성 해석을 하였다. 지금까지의 연구결과에 따르면 p-version 유한요소법은 탄성한도내의 많은 문제에 적용되어 그 우수성이 잘 알려져 있지만 탄소성 분야에서는 아직 연구가 시작 단계라 할 수 있다. 현재까지 조사된 바에 의하면 Holtzer, Woo가 p-version 유한요소법을 이용하여 재료비선형을 고려한 평면응력 문제와 평면변형문제를 해석한 것과 Surana에 의한 적층을 갖는 평판 및 셸구조의 기하학적 비선형해석이 가장 최근에 수행된 연구로 조사되었다. 따라서, 본 연구는 탄소성 평판해석 분야에 p-version 유한요소법의 적용성 및 효율성을 입증하는데 목적을 두었다.

2. 항복선이론을 기초로 한 평판의 극한해석

2.1 하한계 이론(Lower-Bound Theory)

본 연구에서 해석된 단순지지의 경계에 등분포하중을 받는 정방형 평판의 하한계 이론에 의한 극한하중을 유도하면 다음과 같다. 즉, 그림 1과 같이 정방형 평판을 단위 폭을 갖는 이상화된 2개의 단순지지 격자 모델로 나타낼 수 있다. 이 때 평판의 중앙점에서부터의 모멘트 분포는 식(1)와 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} M_x &= M_o \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right] \\ M_y &= M_o \left[1 - \left(\frac{2y}{a} \right)^2 \right] \\ M_{xy} &= -\frac{M_o}{2} \left(\frac{2x}{a} \right) \left(\frac{2y}{a} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

한편, 모멘트에 대한 평형방정식은 식(2)와 같이 정의 된다.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (2)$$

식(1)를 식(2)에 대입하면 식(3)과 같은 극한하중을 얻을 수 있다.

$$q^L = 20 \frac{M_o}{a^2} \quad (3)$$

또한, 등분포하중을 받는 단순지지 장방형 평판의 경우도 유사한 방법에 의해 유도할 수 있다.

$$q^L = \frac{8M_o}{b^2} \left(1 + r \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right) \quad (4)$$

여기서, γ 는 사용된 항복규준에 따라 결정되는 상수이며, Tresca와 von Mises 항복규정에서 $\gamma = 1/2$ 이다. 만약, $a=b$ 이면 정방형 평판이 되어 식(3)과 같게 된다.

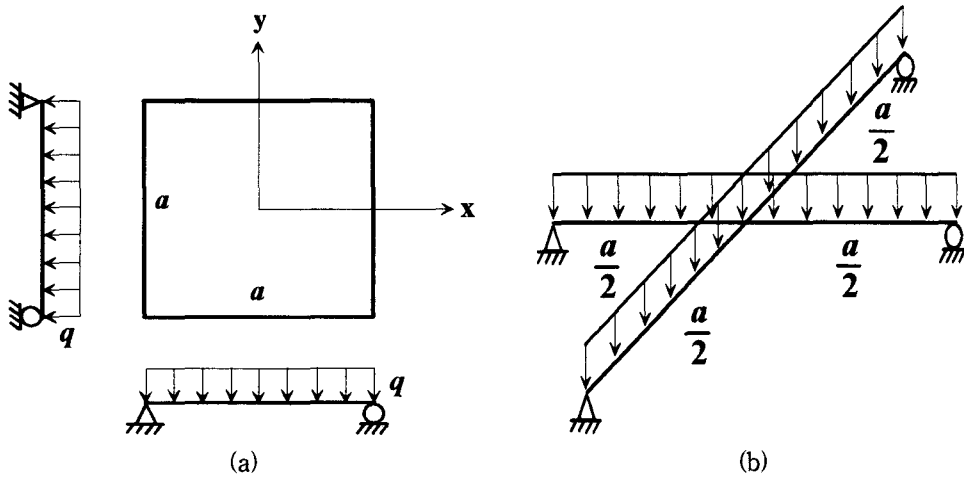


그림 1 (a) 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판 (b) 이상화된 격자모델

2.2 상한계 이론(Upper-Bound Theory)

등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 상한계이론에 의한 극한하중을 구해 보도록 하자. 기본 개념은 1차원에서 소성현지에 대응되는 2차원 평판에서의 항복선(yield line)이 그림 2와 같이 형성되었을 때 4개의 평판조각은 각각 강체거동(rigid body rotation)을 유발시킨다. 중앙점에서의 최대처짐을 Δ 라 하고 4개의 조각이 회전된 각을 θ_i 라 하면, 강체거동중 회전에 의해 발생되는 선속도 $\dot{\Delta}$ 는 그림 2와 같이 평판을 피라미드 형상의 변형이 유발된다(그림 2). 다시 말하면, 평판은 단순지지점에 대하여 각속도 $\dot{\theta}_i$ 로 강제회전에 의해 움직이는 네 개의 삼각형들로 나누어진다. 예를 들면, $\triangle ABE$ 는 단순지지점에 대해 각속도 $\dot{\theta}_1$ 로 회전한다.

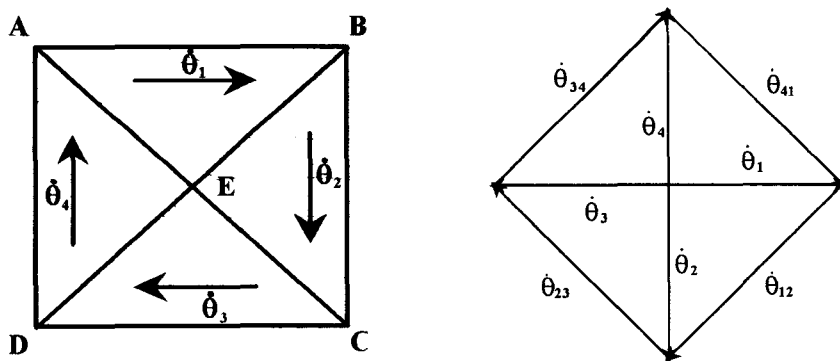


그림 2 정방형 평판의 붕괴기구

그러므로, EA , EB , EC , 그리고 ED 는 각속도 불연속의 선들이며 그것은 소성힌지선(plastic hinge line) 또는 항복선이라고 명칭된다. 항복선에서 단위길이당 에너지분산률 D 는 관련되는 각속도의 소성모멘트의 곱에 의하여 계산된다. 예를 들면, EB 선에서 $D = M_o \dot{\theta}_{12}$. 여기서, $\dot{\theta}_{12}$ 는 $\triangle EAB$ 와 $\triangle EBC$ 의 경계

에서의 회전각에 의한 각속도이다. 관련된 각속도를 평가하기 위해서는 각속도벡터의 분해를 사용할 수 있다. 따라서, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 = 2\dot{\Delta}/a$ 그리고 $\dot{\theta}_{12} = \dot{\theta}_{23} = \dot{\theta}_{34} = \dot{\theta}_{41} = \sqrt{2}\dot{\theta}_1 = 2\sqrt{2}\dot{\Delta}/a$. 이제 외적 일률을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{W}_E = \frac{1}{3} qa^2 \dot{\Delta} \quad (5)$$

수치적으로, 이것은 피라미드의 체적에 의해 곱해진 하중강도 q 와 같다. 항복선 AE , BE , CE , 그리고 DE 를 따른 내적 일률은 다음과 같다.

$$\dot{W}_I = 4M_o(2\sqrt{2}\dot{\Delta}/a) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a \right) = 8M_o \dot{\Delta} \quad (6)$$

그러므로, 상한계 이론에 의한 극한하중은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$q^U = 24 \frac{M_o}{a^2} \quad (7)$$

3. 유한요소 정식화

평판의 단면은 휨모멘트가 소성모멘트 M_o 에 도달할 때를 기준으로 소성의 한계를 정의한다. 여기서, 항복함수 \hat{F} 는 휨모멘트 함수 $\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 와 전단력 함수 $\hat{\sigma}_s = [Q_x, Q_y]^T$ 의 합으로 표현되거나 항복기준을 휨에 대해 고려하므로 전단력의 영향은 무시한다. 또한, 항복함수 \hat{F} 는 일-경화재료(work-hardening material)를 고려할 경우 경화변수 \hat{H} 의 함수이기도 하다. 항복이 어떤 점에서 일어나는 동안, 추가적인 재하(reloading) 또는 제하(unloading)가 없다면 응력함수는 항복면에 존재하기 때문에 항복함수는 아래 식과 같다.

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = 0 \quad (8)$$

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} F(\sigma_f, H) dz \quad (9)$$

여기서, 식(8)를 두께에 대해 식(9)과 같이 적분하게 되면 평면응력에서 $\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ 로 표현되는 응력함수는 평판문제에서 휨응력과 대응되는 $\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T$ 와 같은 모멘트함수로 치환되고, 일축응력시의 항복응력인 σ_o 도 $M_o = \sigma_o h^2/4$ 로 바꿀 수 있다. 한편, 증분소성이론(incremental theory of plasticity)에 의한 증분응력-변형률 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} d\hat{\sigma}_f \\ d\hat{\sigma}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{D}_{ep}]_f & 0 \\ 0 & \hat{D}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\hat{\epsilon}_f \\ d\hat{\epsilon}_s \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, \hat{D}_{ep} 는 휨에 대한 탄소성상태의 재료상수이다.

$$[\hat{D}_{ep}]_f = \hat{D}_f - \frac{\hat{a}_D \hat{a}_D^T}{\hat{A} + \hat{a}_D^T \hat{a}} \quad (11)$$

$$\hat{a} = \left[\frac{\partial \hat{F}}{\partial M_x}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_y}, \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_{xy}} \right]^T \quad (12)$$

여기서, \hat{a} 는 소성류벡터(flow vector)를 나타낸다.

$$\hat{d}_D = \hat{D}_f \hat{a} \quad (13)$$

$$\hat{A} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{H}} d\hat{H} \quad (14)$$

여기서, λ 는 비례상수이다. 그리고

$$\hat{D}_f = \int_{-t/2}^{t/2} D_f' z dz \quad (15)$$

또한

$$\hat{D}_s = \int_{-t/2}^{t/2} D_s' dz \quad (16)$$

4. 수치해석 예제

4.1 등분포하중을 받는 사각형 평판 해석

본 연구에서는 평판의 탄소성상태의 거동을 비교·분석하기 위하여 평판을 단순지지의 경우와 사변고정된 경우에 대하여 해석하였다. 항복조건으로는 Tresca의 항복규정을 사용하였으며, p-version 해석값은 1개의 요소만을 사용하여 수렴성을 조사한 후 수렴구간에 있는 최소의 차수인 5차 형상함수로 고정하였다. 한편, h-version 소프트웨어인 ADINA의 경우는 3절점 삼각형 평판요소 196개를 사용하여 해석하였다. 해석대상인 평판은 2축 대칭상태이므로 대칭성을 고려하여 1/4만을 모델링하였다

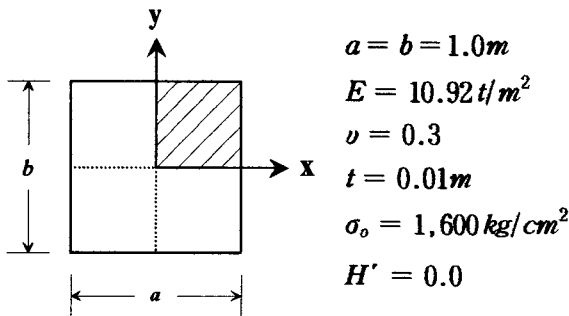


그림 3 정방형 평판의 기하적 및 재료적 제원

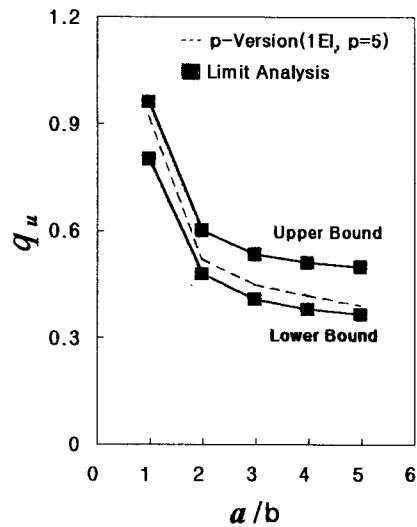


그림 4 단순지지 사각형 평판의 변장비에 따른 극한하중

<단순지지인 경우>

그림 4는 평판의 변장비에 따른 극한하중(limit load) 또는 극한내하력(ultimate load-carrying capacity)을 극한해석에 이룬값과 비교한 결과 Chen과 Han이 제시한 상·하한계의 사이의 값으로 해석되었다. 정방형 평판의 경우는 상한계의 해석값에 근접하며 변장비가 커짐에 따라 하한계의 해석값에 가까운 것으로 해석되었다. 또한, 변장비에 따른 극한하중을 도시한 그림 4에 의하면, 변장비가 2배로 증가할 때의 극한하중은

급격히 감소하지만, 그 이후에서는 변장비의 증가에 따라 완만하게 줄어드는 것을 알 수 있었다. 해석 결과로부터 초기항복(initial yield) 이후에서 항복선이 형성되는 최종항복(final yield)까지 극한하중이 장방형일 때 약 25%에서, 정방형 평판일 때 약 42%까지 차이를 보임을 알 수 있으므로, 초기항복이후에도 붕괴시까지는 상당한 여유력을 확보하고 있는 것으로 평가되었다.

또한, 그림 5과 그림 6에는 단순지지된 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐 곡선과 중앙점에서 단순지지점의 위치변화에 따른 휨모멘트 M_{yy} 의 분포를 나타내었다. 그림 6의 $M_{yy}(P_1)$ 와 $M_{yy}(P_2)$ 는 각각 초기항복하중과 붕괴시의 극한하중이 작용할 때 y 축에 대한 모멘트를 나타낸다. 그림의 결과로부터 제안된 p-version 모델은 처짐에서는 30%, 휨모멘트에서는 1.7%로의 상대오차로 ADINA의 해석결과와 잘 일치하는 것을 볼 수 있으며, 극한해석 결과는 상·하한계 이론에 의해 극한값이 이원화되는 반면 유한요소해석은 비교적 정확한 유일해(unique solution)를 갖게 되어 설계시 과다 또는 과소 설계되는 오류를 피할 수 있다.

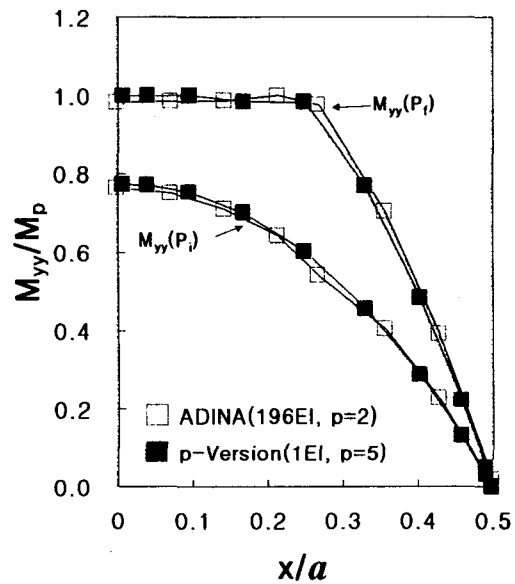
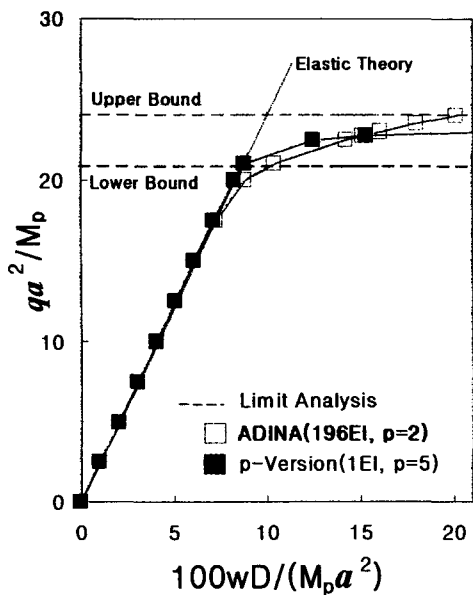


그림 5 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선

그림 6 등분포하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 휨모멘트 M_{yy} 의 분포

<사변고정의 경우>

등분포하중을 받는 사변고정 평판의 경우 수렴성조사 후 4개의 요소를 사용하여 해석하였으며 ADINA의 경우는 196개의 2차 삼각형요소를 사용하였다. 그림 7에는 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐 곡선을, 그림 8에는 중앙점에서 고정단까지 위치가 변화함에 따른 휨모멘트 M_{yy} 를 도시하였다. 처짐값에서는 3.2%의 상대오차로 ADINA와 거의 일치된 해석결과를 확인할 수 있었다. 휨모멘트 M_{yy} 의 해석결과는 초기항복 하중일 때는 1.3%의 상대오차로 거의 동일한 해석결과를 나타내었으나 붕괴시의 최종항복 하중에서는 두 해석 결과에 다소간의 편차를 보여 주고 있다. 그 이유는 단순지지의 경우 모멘트의 분포가 중앙점에서 최대가 되며 지점부에서 영(zero)이 되는 단순한 경향을 보여 주는 반면, 고정지지의 경우는 지점부의 부모멘트와 중앙부의 정모멘트가 동시에 소성을 이루는 까닭에 이 중간에서의 변화가 복잡한 것에 기인한다고 판단된다.

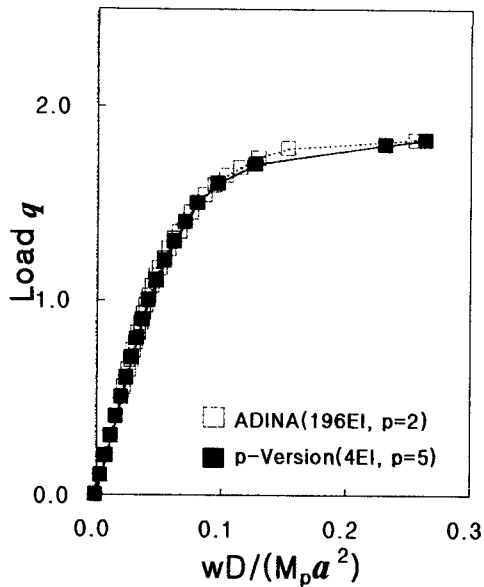
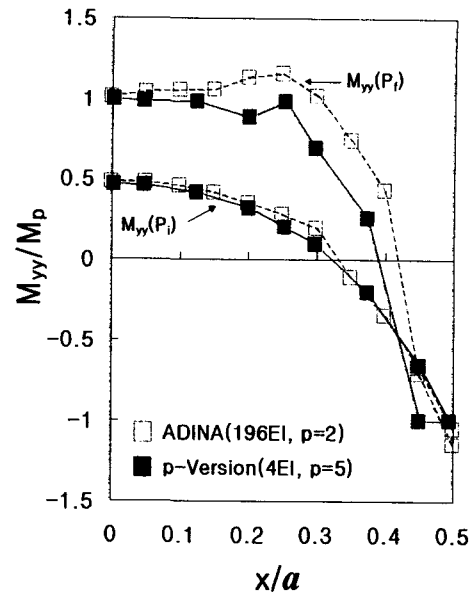


그림 7 등분포 하중을 받는 고정지지 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선



4.2 집중하중을 받는 사각형 평판해석

집중하중을 받는 사각형 평판 해석의 경우에는 탄성-완전소성 재료인 강재 SWS 400를 해석대상으로 하여 기하형상 및 재료특성에 관한 제원은 $a = b = 1m$, $E = 2.1 \times 10^6 kg/cm^2$, $\nu = 0.3$, $t = 2cm$, $\sigma_o = 2,400 kg/cm^2$ 로 가정하였다

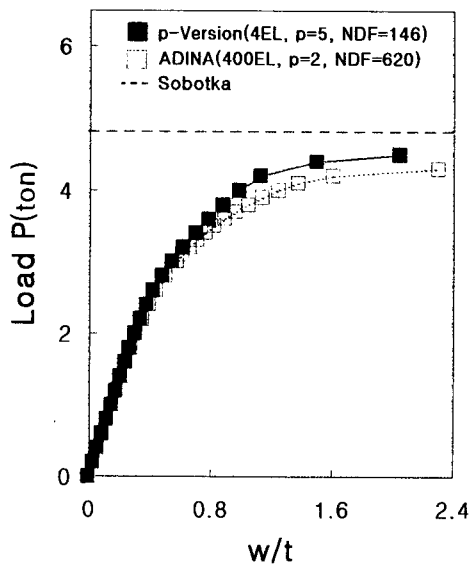


그림 9 집중하중을 받는 단순지지 평판의 하중-최대처짐 곡선

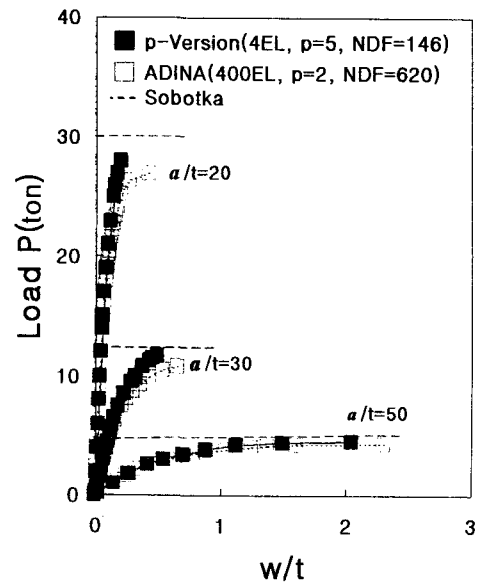


그림 10 단순지지 집중하중시의 두께비에 따른 정방형 평판의 하중-최대처짐 곡선

해석시의 항복규정으로 Tresca의 항복규정을 가정하였다. p-version의 해석값은 수렴성을 검토한 후 수렴구간에 있는 최소의 차수인 5차 형상함수를 사용하였으며, 해석대상인 평판은 2축 대칭상태이므로 4개의 요소로 1/4만을 모델링을 하였다. 그리고, 상용 소프트웨어인 ADINA를 사용하여 2차 삼각형요소 400개로 해석한 결과를 비교하였다. 집중하중을 받는 단순지지된 평판의 중앙점에서의 하중-최대처짐곡선을 그림 9에 나타내었는데 Sobotka에 의한 극한해석치와 ADINA의 해석결과와 비교하였다. 결과에서 보듯이 h-version 및 p-version의 해석결과는 초기항복시의 극한하중은 동일하나 붕괴기구가 형성될 때의 최종항복시 극한하중은 p-version 해석결과가 ADINA에 비해 Sobotka의 이론값에 더 근접하는 것을 알 수 있었다. 한편, 수렴성조사후에 채택된 h-version 모델은 400개 요소에 자유도수가 620인 반면, 본 연구에서 제안하고 있는 p-version 모델은 4개 요소($p=5$)에 자유도수는 불과 146이므로 훨씬 경제적이라 할 수 있다. 그림 10에서는 집중하중을 받는 단순지지 정방형 평판의 두께의 변화에 따른 중앙점의 최대처짐을 ADINA의 해석결과와 Sobotka의 극한해석 결과와 비교하였다. 모든 경우에 있어서 ADINA의 해석결과보다는 p-version의 해석결과가 적은 요소수와 자유도에서 Sobotka의 극한해석결과에 근접한 결과를 나타내었다.

5. 결론

본 연구에서는 평판의 탄소성 해석분야에 p-version 유한요소법의 적용 효율성의 입증과 평판의 초기항복후의 거동 및 극한내하력의 정확한 해석을 통해 평판구조물의 설계시 보다 정확하며 경제적인 설계를 가능케 하는데 있다. 한편, 탄성-완전소성재료로 가정하여 구조해석을 수행하였으며 개발된 프로그램의 검증을 위해 해석결과를 상·하한계이론을 기초로 한 극한해석의 이론값과 h-version 소프트웨어인 ADINA 해석결과의 비교·분석에서 p-version은 적은 요소와 자유도에서도 정확한 결과를 예측할 수 있는 것으로 나타났다. 또한, 탄성구간에서 입증된 p-version 유한요소모델의 여러 장점들 즉, 우월한 수렴성, 모델링의 단순성, 계산상의 효율성 등이 평판의 탄소성해석에서도 입증되었다.

6. 참고문헌

1. A. H. S. Ang and A. Lopez, "Discrete Model Analysis of Elastic-Plastic Plates", *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 94, NO. EM1, pp. 271-293, 1968.
2. P. G. Hodge and T. Belytschko, "Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates", *Appl. Mech. Div., Trans. ASME*, NO. 68-WA/APM-21, pp. 796-802, 1968.
3. A. Pica, R. O. Wood and E. Hinton, "Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Plate Behavior Using A Mindlin Formulation", *Comp. & Struc.*, 1980.
4. D.R.J. Owen, E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, 1980.
5. W. F. Chen and D. J. Han, *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, 1988.
6. J. G. Teng and J. M. Rotter, "Elastic-Plastic Large Deflection Analysis of Axisymmetric Shells", *Comp. & Struc.*, Vol. 31, No. 2, pp. 211-233, 1989.
7. Z. Sobotka, *Theory of Plasticity and Limit Design of Plates*, Elsevier Science Publishing Co. Inc, 1989.
8. J. H. Liu and K. S. Surana, "Piecewise hierarchical p-version curved shell element for geometrically nonlinear behavior of laminated composite plates and shells", *Comp. & Struc.*, Vol 55, No. 1, pp. 47-66, 1995.
9. S. M. Holzer, "The p-Version of the Finite element Method in Incremental Elasto-Plastic Analysis", *Numer. Meth. Eng.*, Vol. 39, pp. 1859-1878, 1996.
10. 정 우성, 홍 중현, 우 광성, "증분소성이론에 의한 p-Version 탄소성 유한요소해석", *한국전산구조공학회 논문집*, 제 10권, 제 4호, pp. 217-228, 1997.