

전산 구조 공학의 연구동향

Computational Structural Engineering - Recent Developments and Applications

최 창 근*
Choi, Chang-Koon

유 원 진**
Yu, Won-Jin

ABSTRACT

Computational structural engineering is the base on which most of the achievements of engineering and physics are built. Since most of the theory underlying physical phenomena is involved differential equations for which closed forms of solution are seldom possible, the numerical approximation is necessary for a quantitative solution. Some areas where progress and research on computational mechanics are currently active are discussed. In the first part of this paper the development of the improved non-conforming finite elements for the analysis of plates and shells is described. Recent developments in the adaptive analysis for the structural and the wind problem and meshless method are also discussed in the second part.

1. 서론

전산 구조공학은 복잡한 물리적, 공학적 현상을 이해하고 분석하는 도구로서 대단히 중요한 역할을 수행하고 있다. 실제 물리현상을 기술하는 이론들은 해석해 또는 정확해를 알 수 없는 복잡한 미분방정식 형태로 이루어져 있다. 따라서 수치적 근사화를 이용하여 그 미분방정식의 해를 구하는 유한요소법, 유한차분법, 경계요소법, 무요소법등이 개발되게 되었다. 최초로 수치적 근사해법을 도입한 Richardson은 1910년 유한차분법을 이용한 해석방법을 제안하였고 제 1차 세계대전 중에는 Southwell이 이 방법에 Relaxation Method를 도입하여 여러 가지 실제적인 문제를 성공적으로 해결한 바 있다. 그러나 이러한 계산역학의 발전에 결정적인 계기를 제공한 것은 전자계산기의 출현이라고 할 수 있다. 전자계산기의 성능은 현재도 비약적으로 발전하고 있으며 계산역학의 발전에 배경이 되고 있다. 사실 유한요소법등의 수치적 해석법은 전자계산기의 출현이전에 제안되었지만 실제 공학문제로의 본격적인 응용은 고성능 전자계산기의 출현이후에야 가능했던 것 들이다.

본 논문에서는 수치해석의 대표적인 방법인 유한요소법에서 사용 되는 요소의 개발에 대하여 평판 및 쉘요소를 중심으로 살펴보고 무요소방법의 연구동향에 대하여 기술한다. 변절점요소와 요소 세분화기법에 기초한 적응적 방법의 개요와 고체 및 유체로의 적용성을 검토한다

2. 요소개발

2.1 평판/셸 요소의 개발 단계

셸구조는 막(Membrane)거동과 휨(Bending) 거동을 동시에 고려할 수 있는 구조적 효율성 때문에 여러 분야의 공학적 구조(셸지붕, 얇은 아치댐, 항공기 구조물, 자동차 구조물, 연료탱크, 냉각탑, 파이프 설비 등)에 많이 사용되고 있다.

* 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

이러한 쉘구조의 정확한 유한요소해석을 위한 접근방법은 크게 평면 쉘요소, 쉘이론을 바탕으로 한 곡면 쉘요소, 감절점(Degenerated) 쉘요소 등으로 나눌 수 있는데 평면 쉘요소는 임의의 곡면을 형상화 하는데 제한이 많고 요소내의 면내거동과 휨거동사이의 결합효과(coupling effect)가 없으며 요소의 경계부분에서 휨모멘트의 불연속성이 발생하는 단점이 있다. 한편, 쉘 이론을 바탕으로 하는 곡면 쉘요소는 위와 같은 단점을 피하기 위해 사용되어 왔으나 대부분 정식화 과정이 매우 복잡하고 임의의 요소형상을 다룰 수 있는 일반적인 쉘 구조에 적용이 어렵고 Kirchhoff-Love 쉘이론을 사용할 경우 요소의 경계에서 C^1 연속성을 만족시키기 어려운 단점을 지니고 있다.

위의 두가지 쉘요소들의 단점을 보완하기 위해 감절점 쉘요소가 Ahmad 에 의해서 개발 되었다. 감절점 쉘요소의 개념은 두께방향 전단변형을 허용하는 쉘이론의 기본가정과 유한요소의 등매개변수 개념을 바탕으로 한다. 따라서 감절점 쉘요소는 특정한 쉘이론의 추가 없이 임의의 쉘 형상에 대한 유한요소 모델에 적용할 수 있다.

낮은 차수의 변위형상함수를 가정하는 감절점 쉘요소는 대체로 두꺼운 쉘 구조물에 대해서는 그 해석결과가 좋은 거동을 보여주는 반면, 정상적분(normal integration)에 의해 구한 결과는 쉘구조물의 두께가 얇아짐에 따라 정확도에 매우 느리게 수렴하는 변형구속(Locking)이 발생한다. 얇은 쉘에 있어서는 두 가지 종류의 변형구속이 존재한다. 그 하나는 전단 변형구속(Shear Locking) 으로 얇은 쉘에 대해서 가정된 변위장에 의해 구성되는 두께방향의 전단 변형에너지(Transverse Shear Strain Energy)의 과도한 효과에 기인한 것이고 두번째는 막 변형구속(Membrane Locking)으로 곡면 쉘에 대한 막 변형률에너지(Membrane Strain Energy)의 과도한 효과에 기인한다.

이와 같은 변형구속현상은 해의 정확도에 결정적인 영향을 미치므로 이 문제를 해결하기 위해 최근까지 많은 연구들이 진행되고 있다. 예를 들면, 강성행렬계산시 적분차수를 일률적 혹은 선택적으로 줄여 계산하는 감차 적분방법(Hughes 1978, Pawsey 1971, Pugh 1978, Zienkiewicz 1971), 직선변위와 회전변위가 각각 다른 형상함수를 갖는 Heterosis 요소, 감차적분을 이용하여 구성된 강성행렬에 가상의 제로에너지 모드(Spurious Zero Energy Mode)가 발생하지 않도록 안정화 행렬을 추가하는 방법, 선택된 지점에서 Kirchhoff 이론을 만족하는 Discrete Kirchhoff 요소를 사용하는 방법, 막변형률과 전단변형률을 새롭게 가정하는 방법, 요소내에서 발생하는 과도한 막 변형에너지와 전단 변형에너지의 발생을 비적합 변위형(Non-conforming Mode)을 추가하여 원 변형상태를 회복하는 방법(Choi 1984, Choi 1975), 가정된 변위의 미분에 의해 결정되는 전단변형도를 별도로 가정한 전단변형도로 대체하는 대체 전단변형도 방법(substitute shear strain method) (Hinton 1986, Huang 1986) 등이 연구되어 왔다.

각각의 해결방법은 나름대로의 장단점을 가지고 있는데, 감차 적분방법의 경우는 강성행렬의 차수(Rank)가 감소하여 가상의 제로에너지 모드가 발생하는 단점이 있고, Heterosis 요소는 요소의 비틀림에 대한 거동이 나쁘고, 안정화 행렬은 안정화 계수의 선택에 주의가 필요하고, Discrete Kirchhoff 요소는 두꺼운 쉘의 경우에는 적용이 어렵고, 변형률을 새로 정의하는 방법은 정식화가 비교적 복잡하다.

본 논문에서는 비적합변위형을 추가하는 방법에 위에서 언급한 여러가지 방법을 추가적으로 적용하여 보다 정확하고 안정된 해를 얻을 수 있는 무결점 평판/쉘요소(Defect-free Plate/Shell Element)을 소개하고자 한다.

2.2 비적합 변위형

비적합변위형의 추가는 실제보다 과도하게 평가된 전단강성을 제거할 수 있고 기존의 감절점 쉘요소가 가지지 못하는 거동을 나타낼 수 있어서 보다 정확한 해석을 가능하게 한다. 비적합변위형이 추가된 변위장은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$[U] = \sum N_j U_j + \sum \bar{N}_j \bar{U}_j \quad (1)$$

여기서 \bar{N}_j 는 추가 된 비적합변위형이고 \bar{U}_j 는 이로써 추가 된 미지수로써 절점의 실제적인 변위에는 나타나지 않는다. 변형률은 다음과 같이 적합변위형부분과 비적합변위형 부분으로 분리된 형태로 나타나고

$$[\varepsilon] = [B \quad \bar{B}] \begin{bmatrix} U \\ \bar{U} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이에 따른 강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \bar{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$K_{cc} = \int_V B^T D B dv, K_{cn} = \int_V B^T D \bar{B} dv, K_{nn} = \int_V \bar{B}^T D \bar{B} dv$$

여기서 c 는 적합변위형, n 은 비적합변위를 나타낸다. 수식(3)은 다음과 같이 정리된 형식으로 나타낼 수 있다.

$$K'U = R, \quad K' = K_{cc} - K_{cn}K_{nn}^{-1}K_{cn}^T \quad (4)$$

여러 연구자에 의해 위와 같은 방법이 실제문제에 적용, 개선되었고 비정규체는 (Irregular Meshes) 에서 더욱 효과가 있음을 알 수 있었다(Choi 1988, Choi 1989, Taylor 1976). 그림 2 에서는 8 절점 감절점 쉘요소에 추가되는 비적합변위형의 한 예를 나타낸 것이고 각각은 다음과 같은 형상함수로 나타낼 수 있다.

$$\bar{N}_1 = \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2), \quad \bar{N}_4 = \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \quad (5)$$

식(5)에서 형상함수는 각 절점에서 0의 값을 갖고 불필요한 거동제한을 피하도록 선택하였다. 이 식에서 처음 두항은 수직방향 변위의 제한을 없애는 역할을 하고 나중 두항은 비틀에 대한 유연성을 제공하며 다섯째항은 Bubble 변위를 나타낸다.

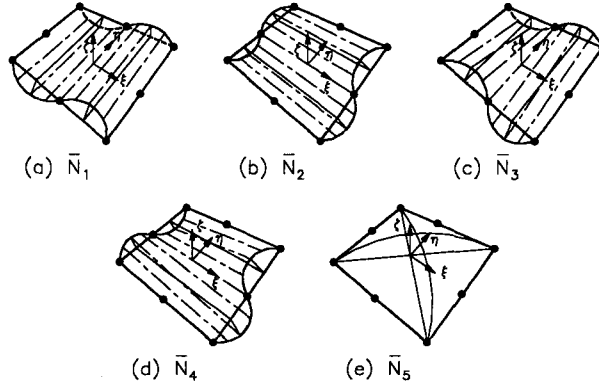


그림 2. 비적합 변위형

이를 이용하여 평판과 쉘에 대한 변위장을 구성해 보면 각각 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} z\theta_{xi} \\ z\theta_{yxi} \\ w_i \end{bmatrix} + \sum \bar{N}_i \begin{bmatrix} z\bar{\theta}_{xi} \\ z\bar{\theta}_{yxi} \\ \bar{w}_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum N_i \frac{t}{2} \zeta \phi_i \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \sum \bar{N}_j \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 θ_{xi} 과 θ_{yi} 는 각각 굽힘에 대한 xz 와 yz 평면에서의 회전을 나타내고 ϕ_i 는 절점 i 에서의 방향코사인을 나타내고, α_i 과 β_i 는 절점회전을 나타낸다.

비적합 변위모드의 추가는 필연적으로 계산의 증가를 가져오게 되므로 가급적이면 추가되는 비적합 변위모드의 수를 최소화 하는 것이 바람직하다. 이 기법이 Kirchhoff의 가정에 의한 평판/셸 요소에 처음 적용되었을 때에서 회전변위(α, β)에는 적용하지 않고 이동변위(u, v, w)에만 적용했었다 (Choi 1973). 왜냐하면 회전변위는 이동변위(u, v, w)의 미분으로 계산하기 때문이다. Kirchhoff의 가정에 의한 8 절점요소의 변위에 비적합변위를 추가하는 경우에도 이동변위 u, v, w 중 u 와 v 는 원래의 변위가 2 차곡선으로 가정되기 때문에 w 에 비해 상대적으로 비적합변위의 추가의 필요성이 적다고 할 수 있다. 따라서 8 절점 등대개변수 요소의 단 한가지 변위(w)에만 비적합변위를 추가하여도 3 개의 변위 모두에 추가한 것과 큰 차이가 없는 개선효과를 얻을 수 있다.(Choi 1984)

2.3 비적합변위형과 다른 방법과의 결합

강절점요소에서 비적합변위형을 사용한 해의 개선연구와 더불어 감차적분에 대한 연구도 같이 진행되었는데 두 가지 방법을 동시에 사용하여 전단변형구속을 피하는 방법이 연구되었다(Choi 1986, Choi 1988, Choi 1989). 이것은 식(3)에서 각 부행렬들의 적분시 감차적분을 하는 방법으로 간단히 구현할 수 있다. 여기서 모든 비적합변위형을 가지고 감차적분을 하면 강성행렬이 특이행렬이 되서 해를 구할 수 없게 되므로 각 부행렬마다 다른 차수로 적분(예를들면, 식 (3)에서 K_{cc} 와 K_{cm} 은 2×2 적분을 하고 K_{mm} 은 3×3 적분한다.)하는 방법이 제안되었다. 이 방법으로 제로에너지모드의 발생과 전단변형구속현상을 동시에 피할 수 있었다. 또한 감차적분시 특이행렬을 유발하는 변위장을 제외한 부분만을 가지고 감차적분을 적용한 NC8-A 요소($\bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$)와 NC8-B 요소(\bar{N}_3)가 개발되었다(Choi 1984).

전단변형구속과 가상제로에너지모드현상을 동시에 피하는 또 다른 방법으로 비적합변위형을 강성행렬의 전단거동 관련부분에만 적용시키는 방법이 제안 되었다. 여기서는 전단거동에 해당하는 강성행렬의 구성시 감차적분을 하지 않으므로 해서 발생하는 가상 제로에너지모드를 피할 수 있었다. 이와같은 다양한 요소구성방법에 대하여 표 1 과 표 2 에서 요약, 정리하였다.

강절점 셸 요소를 구성함에 있어서, 여러 방법들을 동시에 사용함으로써 거동을 보다 향상시키려는 노력이 계속적으로 진행되어왔다(Choi and Yoo 1991). 전체강성행렬은 횡방향 전단강성과 면내강성 —막거동과 휨거동의 조합된 효과—으로 분리할 수 있다. 그러면, 전단변형도장은 전단구속을 제거하기 위하여 표본적분점에서의 값으로부터 보간될 수 있다. 매우 얇은 평판/셸에 대하여 대체전단변형도장을 사용할 때의 표본적분점의 위치는 횡방향 전단변형도가 평균적으로 0 이 되는 위치로부터 결정할 수 있다. 횡방향 전단강성행렬에 감차적분을 사용할 경우, 9 절점 Lagrangian 요소는 전단구속현상이 나타나지 않지만 8 절점 serendipity 요소를 사용하면 전단구속 현상을 피할 수 없게 된다. 그러나 대체전단변형도장을 이용하면 이러한 현상을 막을 수 있다.(Huang and Hinton 1986). 면내 강성의 경우는 면내구속을 피하기 위하여 감차적분(2×2 Gauss 적분)을 수행한다. 추가적으로 비적합변위모드를 사용하여 셸요소의 전체적인 거동을 향상시킬 수 있다. 면내강성을 구성할 때는 일반적으로 2×2 적분을 사용하지만 전단강성을 구성함에 있어서는 2×3 적분 혹은 3×2 적분을 사용한다 (표 2).

추가되는 비적합변위모드의 개수에 따라서 두개의 새로운 요소를 개발할 수 있다. 즉, NC8-DC 와 NC8-CC 를 개발할 수 있다. NC8-DC 요소는 5 개의 비적합 변위모드 ($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3, \bar{N}_4, \bar{N}_5$)를 자유도(u, v, w)에 적용한 요소이고, NC8-CC 요소는 3 개의 비적합 변위모드 ($\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$)를 자유도(u, v, w)에 적용한 요소이다. 여기서 요소명의 끝에 있는 “C”는 “Combined use of improvement schemes”을 의미한다. 위와 같이 개발된 2 개의 셸요소는 선형/비선형문제에 적용해 본 결과 어떠한 결점도 없이 좋은 결과를 보이는 것으로 판단된다. (Choi and Yoo 1991).

평판요소에서도 비적합 변위모드와 선택적 감차적분 및 대체전단변형도장의 조합을 통하여 최상의 거동을 보이는 요소를 찾으려는 노력이 진행되었다. 그 결과로 가상제로 에너지 모드를 보이지 않고 모든 조각시험을 통과하는 새로운 평판요소 NC8-Ca 와 NC8-Cb 가 개발되었다. (표 1)

표 1 8 절점 Mindlin 평판요소

참고문헌	요소명칭	형상함수		적분방법						요소당 자유도 (원래/농축후)	영(0)고유치의 수	
				K _{CC}		K _{CN}		K _{NN}				
		w	θ_x, θ_y	B	S	B	S	B	S		전체	여분
Pugh et al. (1978)	QSR	8-node	8-node	R	R	-	-	-	-	24/24	4	1*
Hughes et al. (1978)	QLS	9-node	9-node	N	R	-	-	-	-	27/27	4	1
Hughes and Cohen(1978)	QHS	8-node	9-node	N	R	-	-	-	-	26/26	3	0
Choi(1986)	NC8-4.1	8-node + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_4$	8-node	R	R	R	R	N	N	28/24	3	0
	NC8-4.2	8-node + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	R	R	R	N	N	29/24	3	0
Donea and Lamain (1987)	Q8	8-node	8-node [†]	N	N	-	-	-	-	24/24	3	0
Choi and Kim (1988)	NC8-A	8-node + $\bar{N}_3 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	R	R	R	R	R	27/24	7	4
	NC8-B	8-node + \bar{N}_5	8-node	R	R	R	R	R	R	25/24	5	2
Choi and Kim (1989)	NC8-AS	8-node + $\bar{N}_3 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	N	-	N	-	N	27/24	3	0
	NC8-BS	8-node + \bar{N}_5	8-node	R	N	-	N	-	N	25/24	3	0
	NC8-CS	8-node + $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$	8-node	R	N	-	N	-	N	27/24	3	0
	NC8-DS	8-node + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	N	-	N	-	N	29/24	3	0
Kim and Choi (1992)	NC-QH	8-node	8-node + $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$	N	R	N	R	N	R	30/24	3	0
Choi and Park (1998)	NC8-Ca	8-node	8-node* + \bar{N}_1, \bar{N}_2	N	R	N	R	N	R	28/24	3	0
	NC8-Cb	8-node	8-node* + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_4$	N	R	N	R	N	R	32/24	3	0

* : Assumed shear strains

N : Normal Integration (3×3 scheme)

R : Reduced Integration (2×2 scheme)

표 2 8 절점 Mindlin 쉘요소

참고문헌	요소명칭	형상함수		강성행렬	적분방법						요소당 자유도 (원래/농축 후)	영(0)고유치의 수		
		u, v, w	α, β		적합형상함수 $N_1 \sim N_8$	비적합형상함수						전체	여분	
						N_5	N_1, N_2	N_3, N_4	u, v, w, α, β	\bar{u}				\bar{v}
Zienkiewicz (1971)	QSR	8-node	8-node	I	R	-	-	-	-	-	40/40	8	2*	
Parisch (1979)	QLR	9-node	9-node	I	R	-	-	-	-	-	45/45	13	5+2*	
				S	R	-	-	-	-	-				
	QLS	9-node	9-node	I	N	-	-	-	-	-	45/45	9	2+1*	
				S	R	-	-	-	-	-				
QLN	9-node	9-node	I	N	-	-	-	-	-	45/45	6	0		
			S	N	-	-	-	-	-					
Choi and Yoo(1991)	NC8-DC	8-node $+ \bar{N}_1 \sim \bar{N}_5$	8-node	I	R	R	R	R	N	N	55/40	7	1*	
				S	M	N	N	M	N	N				
	NC8-CC	8-node $+ \bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_5$	8-node	I	R	R	R	R	N	-	49/40	7	1*	
				S	M	N	N	M	N	-				

I : In-plane

R : Reduced Integration (2x2)

M : Modified Integration (2x3/3x2)

S : Shear

N : Normal Integration (3x3)

* : Not Communicable in a mesh of two or more elements

2.4 비적합 변이요소

조밀한 체눈과 거친체눈 사이의 연결부분에 쓰여지는 변이요소에 비적합변위장을 추가하여 적합조건을 만족시킬 수 있다. 즉, 그림 3 에서와 같은 두 요소를 연결하려면 c 점에 추가적인 절점이 필요하고 이를 위해서 두 요소사이에 변이요소를 추가하여 적합조건을 만족시키게 되며 이 변이요소의 형상함수는 그림 4 와 같이 구성된다. 위와 같은 변절점을 가지는 변이요소의 3 차원으로의 확장의 필요성때문에 변절점 입체요소가 또한 개발되었다.

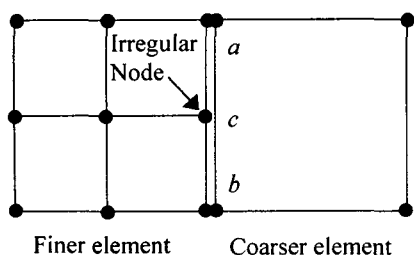


그림 3 국지적 체눈 세분화

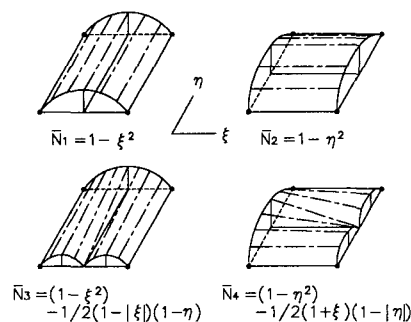


그림 4 변이요소에서의 비적합변위형

2.5 면에 수직인 회전 자유도

회전자유도(drilling degree of freedom)의 필요성이 평평한 요소(flat element)들의 조합으로써 쉘구조를 모델링할 경우에 대두된다. 일반적인 유한요소해석에 있어서 각각의 절점에는 3 개의 이동변위와 3 개의 회전변위를 가지게 된다. 만일 회전자유도를 가지고 있지 않은 평평한 쉘요소(flat shell element)가 일반적인 6 개의 자유도를 가지는 요소에 연결될 경우, 연결 절점의 회전자유도에 의해 강성행렬은 특이행렬이 된다. 이러한 문제점은 회전자유도를 도입함으로써 깔끔히 해결될 수 있다.

회전자유도를 갖는 평면응력요소(plane stress element)를 구성하는 기법은 많은 연구자들이 제안해 왔다. (Cook 1986, Ibrahimbegovic et al. 1990, MacNeal and Harder 1988, Yunus 1988, Choi and Lee 1995) 이러한 요소들에 대한 회전자유도는 포물선 형상을 보인다. 이러한 포물선 형상이 변위를 보간하는데 적용될 경우, 요소변(element side)의 변형은 절점의 회전변위만을 가지고는 완전히 표현될 수 없다. 왜냐하면 요소변의 변형은 추가적인 변위모드를 고려해야 보다 정확히 표현될 수 있기 때문이다. 다양한 비적합모드의 추가를 통해 접선방향의 비적합모드를 갖는 경우가 회전자유도를 갖는 요소의 거동을 항상시킴을 확인하게 되었다. (Choi 1995) 또한 대체전단변형도장을 이용한 변절점 평판요소(Choi and Park 1992)와 변절점 막요소(CLM 이라 명명, Choi and Lee 1995)를 합친 회전자유도를 갖는 변절점변이 평면쉘요소(variable node flat shell element)가 개발되었다. (Choi and Lee 1996)

2.6 입체 요소

복잡한 3 차원 구조물을 해석하는 목적으로 가장 널리 사용되는 요소는 절점 육면체 요소, 사면체 및 삼각기둥형태의 요소들이다. 특히 트러스, 보, 평판, 쉘으로 모형화하기 힘든 대부분의 구조공학 문제들은 입체요소를 이용하여 구조해석을 수행하게 된다. 그림 5 은 교량의 슈부분을 모델링하여 해석한 그림이다. 그림 5(a)는 Shoe 를 1/4 로 모델링 한 예이다. 그림 5(b)는 Shoe 의 변형을 Contour 로 나타낸 그림이다. 그러나 3 차원 연속체 문제를 유한요소법에 의해 모델화할 때 국부영역의 정확성을 보장하기 위해 세분화할 때 불규칙 절점의 처리문제나 회전자유도를 가지는 쉘, 보, 요소와의 연결부분의 처리가 곤란하다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위하여 회전자유도를 제공하면서 적응적 해석에도 사용하도록 변절점을 가지는 입체요소가 개발되었다.(Lee 1995, Chung 1996)

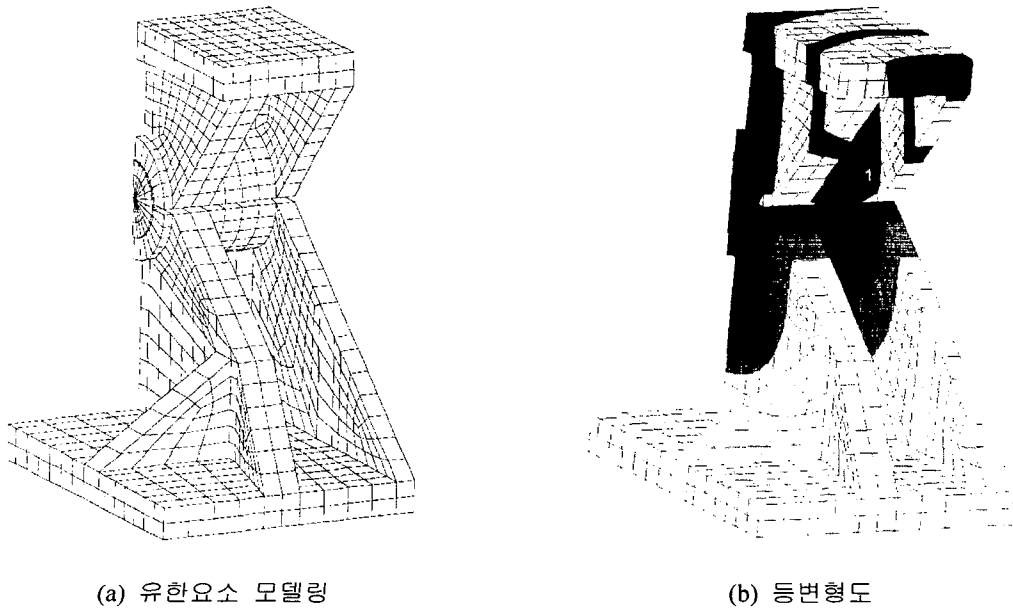


그림 5 슈의 유한요소 해석

2.7 무한요소

해석 대상 구조물이 반무한 지반, 해양, 대기중에 존재할 때 무한한 영역을 수치적으로 모델링하기 위해 무한요소가 필요하다. 초기의 연구로는 반무한체 위의 한 점에 작용하는 연직하중에 대한 이론해(Boussinesq 1878), Flamant의 평면 변형문제(Timoshenko 1970), 및 Stokes(1851)의 점성흐름 문제등이 있다. 무한요소의 현대적 개념은 Ungless(1973)와 Bettess(1977)가 정립하였고 Zienkiewicz에 의해 제안된 mapping 방법에 의해 탄성정력학 문제(Beer 1981, Bettess 1977)에 적용되었다. Cheung(Cheung 1985, 1986)은 finite strip 개념에 기초한 무한요소를 개발하였는데 무한체 내부의 구멍들에 대한 문제를 푸는데 유용하였다. Laplace 와 Helmholtz 방정식을 포함하는 3 차원 문제를 위한 무한요소가 개발되었으며 (Moriya 1984), 이후 전자기장등의 문제로의 확장이 계속되었다. Murdoch(1992)는 감소함수형태를 가진 무한요소를 발표하여 몇가지 수학적 문제의 해결에 성공하였다. 기반탄성동역학 문제로의 접근이 이후 계속 발전되어 왔으며(Chow 1981, Medina 1982, 김재민 1995), 지반의 변형문제(Marques 1984, 이성민 1996)등의 여러분야에 무한요소를 이용한 해석기법이 발전되었다.

3 적응적 해석기법

최근들어 유한요소해석 분야에서 각광을 받고 있는 연구분야는 적응적방법을 이용한 해석법이다. 이것은 유한요소체제를 보다 효율적으로 배치하거나(*h-type adaptive*) 형상함수의 차수를 조정하여(*p-type adaptive*) 보다 정확하고 신뢰할 수 있는 해를 얻는 방법을 말한다. 위의 두가지 방법을 적절히 조합하는(*hp-adaptive*) 방법이 가장 효과적인 방법이지만 이 경우 실제로 구현하기가 매우 복잡한 단점이 있어서 정밀해석을 필요로 하는 문제 이외에서는 효과가 떨어진다. 하지만 먼저 체논의 적응적 세분화를 시행하고 이를 바탕으로 형상함수의 차수를 전체영역에서 균등히 높이는 순차적인 방법을 사용하면 두 방법을 동시에 적용하는 방법과 거의 같은 효과를 얻을 수 있어서 실제적이라 할 수 있다. 2 절에서 언급한 비적합변이요소를 사용하여 체논을 국지적으로 세분화하는 적응적 해석방법은 체논을 균등하게 세분화하는 방법보다 수렴속도가 빠른것을 알 수 있다. 그림 6와 그림 7은 변이요소를 이용하여 적응적 해석을 한 결과를 보여준다.

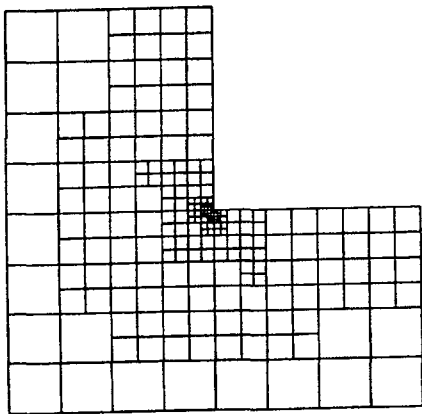


그림 6. 평판 변이요소를 이용한 L형평판의 적응적해석

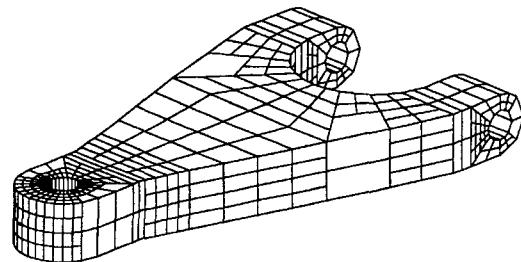


그림 7. 입체 변이요소를 이용한 조종간의 적응적 해석

4. 무요소 방법

최근들어 기존의 유한요소법이 가지는 한계를 극복하고자 하는 노력의 일환으로 무요소방법(Meshless Methods)이 활발히 연구되고 있다. 이 방법은 말 그대로 요소를 제거하고 단지 절점만을 가

지고 해석을 하는 방법을 말한다. 현재 여러학자들에 의해서 독립적인 연구가 수행되고 있는데 예를 들면 다음과 같다.

- diffuse element methods(Nayroles)
- element-free Galerkin(Belytschko),
- reproducing kernel particle method(Liu),
- hp-clouds(Oden),
- partition of unity finite element method(Babuska),
- finite point method(Zienkiewicz and Taylor)

등이 있다. 이 모든 방법은 접근방법만 다르고 결국은 유사한 수식으로 정식화가 되는데 Babuska 는 위의 모든 방법이 Partition of Unity 방법의 범주에 들어간다는 것을 수학적으로 보인바 있다. 형상함수의 정식화 과정을 간단히 설명을 하면 먼저 이동최소자승법(the moving least square technique) 을 이용하기 위하여 함수 $u(x)$ 를 다항식으로 다음과 같이 국지적으로 표현할 수 있다.

$$u_i^h(x, \bar{x}) = \mathbf{p}^T(\bar{x}) \mathbf{a}(x) \quad \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (8)$$

계수벡터 $\mathbf{a}(x)$ 를 구하기 위해 이동최소자승법을 적용하면,

$$E[\mathbf{a}(x)] = \sum_{i=1}^n w_i(x, a) [u_i - u_i^h(x, x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n w_i(x, a) [u_i - \mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(x)]^2 \quad (9)$$

이 되고 여기서 n 은 해당영역내에 있는 절점의 수이고 $w_i(x, a) = w(x - x_i, a)$ 는 양의 값을 갖는 가중치 함수(보통 2 차원에서 종모양 분포)이다.

$E(\mathbf{a})$ 이 최소값을 갖는 \mathbf{a} 를 구하면:

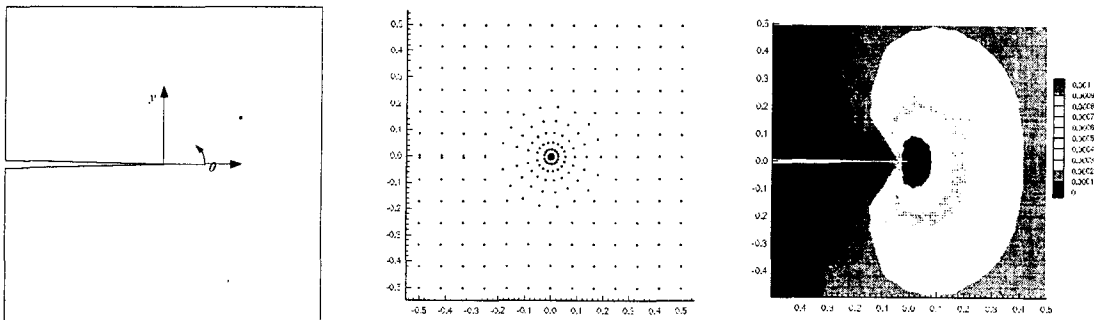
$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x, a) \mathbf{B}(x, a) \mathbf{u} \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(x, a) = \mathbf{p}^T(x_i) w_i(x, a) \mathbf{p}(x_i) \quad \mathbf{B}(x, a) = \mathbf{p}^T(x_i) w_i(x, a)$$

이 고 이를 식(8)에 대입하면 다음과 같이 유한요소법과 유사한 변위장이 구해지게 된다.

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u} = \sum_i^n \sum_j^m p_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{ji} u_i \equiv \sum_i^n \phi_i(x) u_i \quad (11)$$

그림 8은 무요소 방법을 이용하여 Crack이 있는 평판을 해석한 예를 보여주고 있다.(Chung, H.J. 1997)



(a) Crack의 반무한 평판

(b) 무요소 절점분포

(c) 에너지의 분포

그림 8 Crack 이 있는 반무한 평판해석 예

5. 바람에 대한 유한요소 해석

유한차분법으로부터 시작된 유체에 대한 수치해석은 근래에 들어 그 대상영역을 넓히고 있는 과정에 있다. 유체의 거동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식은 비선형항을 포함하고 있어서, 유체에 대한 수치해석은 구조물의 경우와 달리 최근에서야 비로서 공학적인 가치를 인정받기 시작하고 있다. 유체중에서도 토목, 건축 구조물에서 주요한 관심 대상인 바람은 Navier-Stokes 방정식을 비압축성 점성 유체의 경우로 가정한 경우와 같다. 연구의 주된 관심은 비선형이고 비대칭인 대류항의 존재로 해의 안정성이 보장되지 못하는 점에 기반한 해의 안정화 기법과 해석시간을 단축하려는 시간해석 기법의 개발 및 난류의 특성을 수치적으로 모델링하는 기법으로 나뉠 수 있다. 대류가 지배적인 문제에서 발생하는 절점간 해의 진동현상을 억제하기 위하여 다양한 상류화 기법들이 제시되어 왔다.(Heinrich 1977, Hughes 1979, Brooks 1982, Kondo 1991) 최소의 시간과 비용으로 비정상 문제를 풀기 위해 penalty 함수를 통해 기본변수를 줄이거나 (Hughes 1979), 시간해석법으로 양해법을 도입하면서도 해의 안정을 도모하기도 하며, 속도와 압력의 상호반복계산을 통하여 한 시간단계에서의 해를 찾는 기법들이 개발되기도 하였다. 일반 자연환경에서 발생하는 공기의 난류적 성질을 수치적으로 재현하기 위해 DNS, LES, $k-\epsilon$ 모델등 다양한 난류 모델이 개발되었다. (Ferziger 1993) 특히 바람을 해석할 때에는 그 거동에 적합한 요소의 크기를 선택해야 하며 특이점이 발생하는 부분들에서는 특히 요소의 크기가 작아야 한다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 적응적 방법이 모색되어 왔으며 (Sampaio 1993, Oden 1993) 본 논문에서는 사각 구조물 주변을 흐르는 공기를 적응적으로 해석한 결과를 그림 9에 도시하였다.(Choi 1998) 그림에서 바람은 좌측에서 우측으로 흐르며 와류가 발달한 상태에서 세분화된 요소와 속도 벡터 및 유선을 그린 것이다.

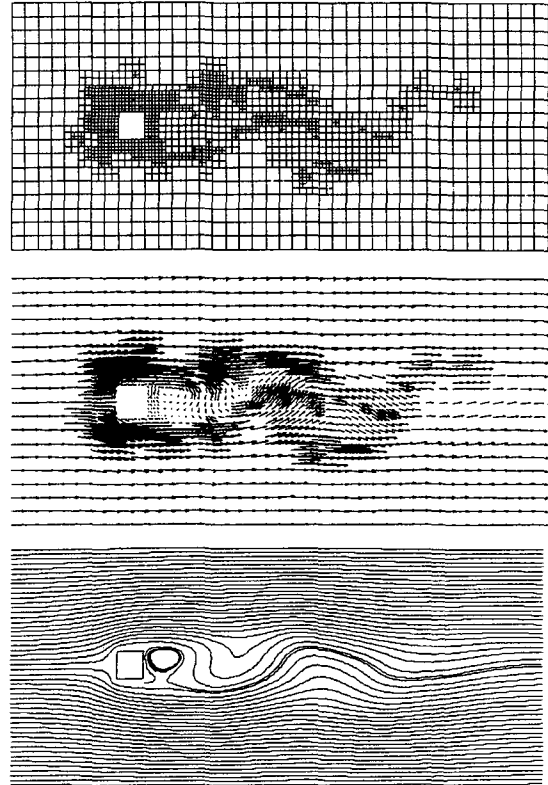


그림 9 사각구조물 주변의 바람흐름

참고문헌

1. 고광훈, 이승래 (1997), "다양한 변위감쇠특성을 고려할 수 있는 p-버전 정적무한요소", 한국지반공학회지 13 권, 101-109
2. 김재민, 윤정방 (1995), "다층반무한 지반에서의 지반-구조물 상호작용해석을 위한 동적무한요소", 대한토목학회 논문집, 15 권 1 호 51-62
3. 이성민, 장승필 (1996), "터널안정성해석시 무한요소 적용성 평가", 대한토목학회 논문집, 16 권 III-1 호 47-58
4. Ahmad, S., Irons, B. M. and Zienkiewicz, O. C. (1970), "Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 419-451.
5. Belytschko, T. and Krongauz, D. (1996), "Meshless method: an overview and recent developments", *Comput. Meth. Appl. Engrg.*, 139, 3-47.
6. Bicanic, N. and Hinton, E. (1979), "Spurious modes in two dimensional isoparametric elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 14, 1545-1557.

7. Boussinesq, J. (1878), "Equilibre d'elasticite d'un sol isotrop sans pesanteur, supportant deffrents poids", *Comptes Redus*, **86**, 1260
8. Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R., (1982) "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **32**, 199-259.
9. Cheung, Y. K. and Chao, Z. Y. (1985), "Dynamic Analysis of Prismatic Structures Embedded in Infinite Soil Medium", *Proc. 5th Int. Conf. On Num. Meth. In Geomechanics*, Nagoya, Japan, April
10. Cheung, Y. K. and at al. (1986), "Infinite Ring Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.* **23**, 385-396
11. Choi, C. K. and Schnobrich, W. C., (1973)"Use of Non-conforming Modes in Finite Element Analysis of Plates and Shells", Structural Research Series, No. 401, University of Illinois, Urbana
12. Choi, C. K. and Schnobrich, W. C. (1975), "Nonconforming finite element analysis of shells", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **101**, 447-464.
13. Choi, C. K. (1982), "General shell analysis by the nonconforming finite element", *Bull. Int. Ass. Shell and Spatial Struct.*, **80**, 5-16.
14. Choi, C. K. (1983), "A Conoidal Shell Analysis by Modified Isoparametric Element", *Comp. And Struct.*, **18**, 921-924
15. Choi, C. K. (1986), "Reduced integrated nonconforming plate element", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **112**, 370-385.
16. Choi, C. K. and Kim, S. H. (1988), "Reduced integration, nonconforming modes, and their coupling in thin plate elements", *Comp. Struct.*, **29**, 57-62.
17. Choi, C. K. and Kim, S. H. (1989), "Coupled use of reduced integration and non-conforming modes in quadratic Mindlin plate element", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 1909-1928.
18. Choi, C. K. and Park, Y. M. (1989), "Nonconforming transition plate bending elements with variable midsides nodes", *Comp. Struct.*, **32**, 295-304.
19. Choi, C. K. and Yoo, S. W. (1991), "Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element", *Comp. Struct.*, **40**, 785-794.
20. Choi, C. K. and Yoo, S. W. (1991), "Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element", *Comp. Struct.*, **39**, 557-569.
21. Choi, C. K. and Park, Y. M. (1992), "Transition plate bending elements for compatible mesh gradation", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **118**, 462-480.
22. Choi, C. K. and Park, Y. M. (1992), "An adaptive h-refinement using transition elements for plate bending problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **35**, 145-163.
23. Choi, C. K. and Lee, N. H. (1993), "Three dimensional transition solid elements for adaptive mesh gradation", *Struct. Eng. Mech.*, **1**, 61-74.
24. Choi, C. K. and Lee, W. H. (1996), "Versatile variable-node flat-shell element", *J. Eng. Mech. ASCE*, **122**(5), 432-441
25. Choi, C. K. and Park, Y. M. (1992), "Transition plate bending elements for compatible mesh gradation", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **118**, 462-480.
26. Choi, C. K. and Park, Y. M. (1992), "An adaptive h-refinement using transition elements for plate bending problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **35**, 145-163.
27. Choi, C. K. and Yoo, S. W. (1991), "Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element". *Comp. Struct.*, **39**, 557-569.
28. Choi, C. K. and Lee, W. H. (1995), "Transition membrane elements with drilling freedom for local mesh refinements", *Struct. Eng. Mech.*, **3**, 75-89.
29. Choi, C. K. and Yu, W. J. (1998), "Adative finite element wind analysis with mesh refinement and recovery". *Proceedings of COSEIK Symposium-Spring 1998*, Seoul, Korea
30. Chung, H. J. And Belytschko, T. (1997), "An error estimate in EFG method", *Comput. Mech.*, submitted.
31. Chung, K. Y. (1996)", 3D Variable Node³ Solid Elment with Rotational Degrees of Freedom", Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, KAIST, Korea
32. Cochet, J. F. and Dhatt, G. S. (1978), "Plasticity analysis by an non-conforming plane element", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 561-566.
33. Cook, R. D. (1972), "More on reduced integration and isoparametric elements", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **5**, 141-142.
34. Cook, R. D. (1974), "Improved two-dimensional finite element", *J. Struct. Div. ASCE*, 1851-1863.
35. Cook, R. D. (1975), "Avoidance of parasitic shear in plane element", *J. Struct. Div. ASCE*, 1239-1253.
36. Ferziger, J., (1993), "Simulation of complex turbulent flows : recent advances and prospects in wind engineering". *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, **46&47**, 195-212
37. Gupta, A. K. (1978), "A finite element for transition from a fine to a coarse grid", *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **12**, 35-45.
38. Heinrich, J.C., Huyakorn, P.S., and Zienkiewicz, O.C., (1977) "At Upwind Finite Element Scheme for Two Dimesional Convective Transport Equation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 31-143
39. Hinton, E. and Huang, H. C. (1986), "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields". *Comp. Struct.*, **23**, 409-431.
40. Huang, H. C. and Hinton, E. (1986), "A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear

- interpolation”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **22**, 73-92.
41. Hughes, T. J. R. and Cohen, M. (1978), “The heterosis finite element for plate bending”, *Comp. Struct.*, **9**, 445-450.
 42. Hughes T. J. R., Cohen, M and Haron, M. (1978), “Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates”, *Nuclear Eng. Desgn.*, **46**, 203-222.
 43. Hughes, T.J.R., Liu, W.K., and Brooks, A.L., (1979) “Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation”, *Journal of Computational Physics* **30**, 1-60.
 44. Hughes, T. J. R. and Tezduyar, T. E. (1981), “Finite elements based upon Mindlin plate bending theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element”, *J. Appl. Mech.*, **48**, 587-596.
 45. Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L. (1991), “A modified method of incompatible modes”, *Comm. Appl. Numer. Methods*, **7**, 187-194.
 46. Kebari, H. and Cassel, A. C. (1991), “Stabilization by non-conforming modes : 9-node membrane element with drilling freedom”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **31**, 1453-1468.
 47. Kim, S. H. and Choi, C. K. (1992), “Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34**, 197-208.
 48. Kondo, N., Tosaka, N., and Nishimura, T., (1991) “Third-Order Upwind Finite Element Formulations for Incompressible Viscous Flow Problem”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **93**, 169-187
 49. Lee, N.H. (1994), “Three-dimensional Adaptive Mesh Refinement Using Variable-node Solid Elements with Nonconforming Modes”, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, KAIST, Korea
 50. Marques, J. M. M. C., (1984), “Infinite Element in Quasi-Static Materially Nonlinear Problems”. *Computers and Structures*, **18**, 735-751
 51. Medina, F. and Penzien, J. (1982), “Infinite Elements for Elastodynamics”, **10**, 699-709
 52. Mindlin, R. D. (1951), “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates”. *J. Appl. Mech.*, **18**, 31-38.
 53. Moriya, K., (1984), “New Infinite Element for Finite Element Analysis of Three Dimensional Unbounded Field Problems”, *Bulletin of the JSME*, **27**, 2521-2529
 54. Murdoch, T., (1992), “Performance of Mapped Infinite Elements for exterior Wave Scattering Applications”, Comms, in *Applied Numerical Physics*, I&II, McGraw Hill, NewYork
 55. Oden, J.T., at el., (1993) “Progress on Adaptive hp-Finite Element Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations”, *Computational Mechanics*, **11**, 421-432
 56. Park, Y.M. and Choi, C.K. (1997), “The Patch Tests and Convergence for Nonconforming Mindlin Plate Bending Elements”, *7th ICCBE*, August, 1997, Seoul, Korea, 81-86
 57. Pawsey, S. F. and Clough, R. W. (1971), “Improved numerical integration of thick shell finite elements”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **3**, 575-586.
 58. Pugh, E. D. L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O. C. (1978), “A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **12**, 1059-1079.
 59. de Sampaio, P.A.B., Lyra, P.R.M, Morgan, K., and Weatherill, N.P., (1993) “Petrov-Galerkin solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in Primitive Variables with Adaptive Remeshing”, *Computer Methods in Applied Mecahnics and Engineering*, **106**, 143-178
 60. Stokes, G. G. (1851), “On the effect of international friction of flids on the motion of pendulums” , *Trans. Cambridge Phill. Sov.* Vol iv, pp 8-106
 61. Taylor, R. L., Beresford, P. J. and E. L. Wilson (1976), “A nonconforming element for stress analysis”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10**, 1211-1219.
 62. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., (1970), *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, McGraw Hill, 97-109
 63. Ungless, R. L. (1973), “An Infinite Element Method”, M A Sc Thesis, Univ. of British Columbia
 64. Chow, Y. K. (1981), “Static and Periodic Infinite Solid Elements”, *Numerical Methods in Engineering*, **17**, 503-526
 65. Zienkiewicz, O. C. (1992), “Computational mechanics today”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **34**, 9-33.
 66. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M. (1971), “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells”, *Int. J. Numer. Methods Eng.*,