옵션에 대한 수치해법상의 초기값 불연속성 문제에 관한 연구

김동석 · 변석준

한국과학기술원 테크노경영대학원
서울시 동대문구 청량리동 207-43

Abstract

옵션의 가격을 계산하기 위한 수치해법은 크게 격자모형, 유한차분법, 그리고 몬테카를로 시뮬레이션의 세 가지로 분류된다. 유한차분법은 옵션가격함수가 만족하는 편미분 방정식의 모든 편도함수를 유한차분식으로 근사하여 옵션을 평가하는 방법이다.

본 연구에서는 유한차분법을 이용하여 옵션을 평가할 때 발생하는 가격계산 오차의 가장 큰 원인이 옵션만기 손익구조(payoff)의 비선형성에 있음을 보인다. 특히, 옵션 시장에서 가장 거래가 많이 이루어지는 손익분기옵션(at the money option) 그리고 손익분기점에 가까운 옵션(around the money option)에서 가장 큰 오차가 발생함을 보인다. 또한 본 연구에서는 이러한 오차를 효율적으로 줄이기 위하여 행사가격 근처의 일부 구간에서만 구간점 사이의 간격을 변화시키는 수정된 유한차분법을 제시하고 오차의 크기와 계산의 효율성 측면에서 기존의 유한차분법과 비교 · 분석한다.

1. 서론

실무에서 옵션의 가격을 결정할 경우 일부 특수한 경우를 제외하고는 閉鎖形 解(closed form solution)를 구하기가 어렵다. 따라서 옵션의 가격을 계산하기 위하여 다양한 수치적 방법과 근사 방법이 개발되었다.

옵션의 가격을 계산하기 위한 수치적 방법은 크게 격자모형, 유한차분법, 그리고 몬테카를로 시뮬레이션의 세 가지로 분류된다. 격자모형에는 이항모형(binomial model)과 삼항모형(trinomial model)이 있다. 이항모형은 옵션가격을 결정짓는 기초자산의 가격변동이 이항분포를 따른다고 가정하여 옵션을 평가하는 방법이다. 이항모형은 Cox, Ross와 Rubinstein(1979) 그리고 Rendleman과 Bartter(1979)에 의하여 개발되었다. 삼항모형은 옵션가격을 결정짓는 기초자산이 두 개 이상인 경우에 사용하며 Boyle(1988)에 의하여 개발되었다. 몬테카를로 시뮬레이션은 기초자산 가격변동의 표본경로를 모의설정하고, 각 표본경로에 대한 옵션의 손익을 계산하여 옵션을 평가하는 방법이다. 이 방법은 Boyle(1977)에 의하여 처음으로 옵션가격결정문제에 사용되었다.

유한차분법은 옵션가격함수가 만족하는 편미분 방정식의 모든 편도함수를 유한차분식으로 근사하여 연립방정식을 구하고, 이 연립방정식을 옵션의 만기시점부터 현재시점까지 차례로 반복적으로 풀어서 옵션의 가격을 계산하는 방법이다. 유한차분법은 Brennan과 Schwartz(1977) 그리고 Schwartz(1977)에 의하여 처음으로 옵션가격결정문제에 사용되었다. Brennan과 Schwartz(1977)는 미국식 풋옵션의 가격결정에 그리고 Schwartz(1977)는 신주인수권(warrant)의 가격결정에 유한차분법을 사용하였다. 한편, Geske와 Shastri(1985)는 이항모형과 유한차분법을 해의 정확성과 계산의 효율성 측면에서 비교 · 검토한 뒤, 많은 수의 옵션가격을 동시에 계산할 필요가 있는 실무에서는 유한차분법이 더 우수하다는 결론을 얻었다.

그런데, 이와 같은 다양한 수치적 방법들이 실무에서 유용하게 적용되기 위해서는 각 수치적 방법의 문제점 및 가격계산 오차에 대한 원인분석이 선행되어야 할 것이다. 따라서 본 연구에서는 옵션가격결정문제에 유한차분법을 사용할 때 발생하는 문제점 및 가격계산 오차의 원인을 분석하고, 이러한 오차를 효율적으로 줄일 수 있는 수정된 유한차분법을 제시한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 다음 장에서는 옵션가격함수가 만족하는 편미분 방정식을 유도하고, 유한차분법을 이용하여 옵션을 평가하는 계산과정을 살펴본다. 제 3장에서는 이러한 계산과정에서 발생하는 문제점 및 가격계산 오차에 대한 원인을 분석한다. 특히, 옵션만기 손익구조의 비선형성이 유한차분법이 갖는 오차의 가장 큰 원인임을 보인다. 제 4장에서는 수정된 유한차분법을 제시하고 오차의 크기와 계산의 효율성 측면에서 기존의 유한차분법과 비교 · 분석한다. 마지막으로 제 5장에서는 본 연구의 요약 및 결론을 제시한다.

2. 유한차분법을 이용한 옵션평가

2.1 편미분방정식

유한차분법을 이용하여 옵션을 평가하기 위해서는 먼저 옵션가격함수가 만족하는 편미분 방정식과 그 경계조건을 구하여야 한다. 본 연구에서는 다음과 같은 옵션평가문제를 설정하였다.

완전시장(perfect market)과 연속거래(continuous trading)의 가정하에 주식에 대하여 발행된 옵션을 고려하자. 무위험 이자율은 r로 일정한 상수이고, 주가 S_t의 변화는 아래의 확률미분 방정식을 따른다고 가정하자.

$$dS = (\mu - \delta)Sdt + \sigma Sdw \tag{1}$$

여기서 μ 는 주가의 기대수익률, δ 는 연속적 배당률, σ 는 주가수익률의 표준편차, 그리고 dw 는 표준위너(Wiener)과정이다. 식 (1)은 주가의 변화가 기하적 브라운 운동 또는 로그노말 확산과정을 따름을 의미한다. 이러한 가정하에서 Black과 Scholes(1973) 그리고 Merton(1973)은 무위험 헷지포트폴리오(hedge portfolio)의 개념을 이용하여 옵션가격이 만족하는 다음과 같은 편미분 방정식을 유도하였다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(r-\delta)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (2)$$

여기서 $f(S,t)$ 는 옵션의 가격을 나타내며 주가와 시간의 함수이다. 이때 현재시점에서 $t=0$ 이고 옵션의 만기시점에서 $t=T$ 라고 하자.

주가의 변화가 식 (1)의 형태일 때 동일한 주식에 대하여 발행된 모든 파생금융상품은 편미분 방정식 (2)를 만족한다. 따라서 식 (2)는 미국식 및 유럽식 그리고 콜옵션 및 풋옵션에 모두 적용된다. 이때 특정한 옵션은 시간에 대해서는 특정한 초기조건(initial condition)을, 주가에 대해서는 특정한 경계조건(boundary condition)을 만족해야 한다. 예를 들어 행사가격이 K 인 유럽식 콜옵션의 경우, 시간에 대한 초기조건은 만기시점($t=T$)에서

$$f(S,T) = \max[S-K,\ 0] \qquad (3a)$$

가 되고, 주가에 대한 경계조건은 $S=0$ 과 $S=\infty$ 에서 각각

$$f(0,t) = 0 \qquad (3b)$$

$$\lim_{S\to\infty} f(S,t) = Se^{-\delta(T-t)}-Ke^{-r(T-t)} \qquad (3c)$$

가 된다. 본 연구에서는 Black-Scholes 공식에 대입하여 참값을 정확히 알 수 있는 유럽식 콜옵션을 중심으로 기존의 유한차분법과 본 논문에서 제시하는 수정된 유한차분법의 가격계산 오차를 비교·분석한다. 옵션평가문제에 사용된 기존의 유한차분법에는 Explicit 방법, Implicit 방법, Crank-Nicolson 방법의 세 가지가 있다. 다음 절에서는 이러한 세 가지 유한차분법을 이용하여 옵션을 평가하는 계산과정을 살펴본다.

2.2 유한차분법을 이용한 옵션평가

유한차분법은 수학 및 공학 분야에서 편미분 방정식을 풀기위한 목적으로 가장 많이 사용되는 수치해법중의 하나이다. 유한차분법은 옵션가격함수가 만족하는 편미분 방정식의 모든 편도함수를 유한차분식으로 근사하여 연립방정식을 구하고, 이 연립방정식을 옵션의 만기시점부터 현재시점까지 차례로 반복적으로 풀어서 옵션의 가격을 계산하는 방법이다. 편미분 방정식 (2)를 유한차분법으로 풀기 위해서는 먼저 주가와 시간의 2차원 평면공간을 여러개의 작은 영역으로 나누어야 한다. 즉, 주가에 대해서는 $S_{\min}$ 에서 $S_{\max}$ 까지를 간격이 ΔS 인 M 개의 소구간으로 나누고 시간에 대해서는 현재시점부터 만기시점까지를 간격이 Δt 인 N 개의 소구간으로 나눈다. 이때 (i,j) 구간점(node)에서의 옵션의 가격을 $f_{i,j}$ 로 표기하면

$$f_{i,j} = f(S_j,\ t_i) = f(S_{\min}+j\Delta S,\ i\Delta t)$$

단, $i=0,1,\cdots N \quad j=0,1,\cdots M$ 이 된다. 여기서 i 는 시간을, j 는 주가를 지정하는 첨자이다. 또한 만기시점($i=N$)에서의 옵션가격은 초기조건식 (3a)에 의하여

$$f_{N,j} = \max[S_{\min}+j\Delta S-K,\ 0] \qquad (4a)$$

으로 주어지고, 주가의 양쪽 끝점 $S=S_{\min}$ 과 $S=S_{\max}$ 에서의 옵션가격은 경계조건식 (3b)와 식 (3c)에 의하여 각각

$$f_{i,0} = 0 \qquad (4b)$$

$$f_{i,M} = S_{\max}e^{-\delta(N-i)\Delta t}-Ke^{-r(N-i)\Delta t} \qquad (4c)$$

으로 주어진다. 이제 만기시점과 주가의 양 끝점에서의 옵션가격이 주어졌으므로 편미분 방정식 (2)를 이용하여 평면공간 내부의 모든 구간점에서의 옵션가격을 구할 수 있다. 이를 위하여 먼저 편미분 방정식 (2)의 모든 편도함수(partial derivatives)를 유한차분식으로 근사하여 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t} \qquad (5a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{2\Delta S}((f_{i,j+1}-f_{i,j-1})\theta + (f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1})(1-\theta)) \qquad (5b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{1}{\Delta S^2}((f_{i,j+1}+f_{i,j-1}-2f_{i,j})\theta + (f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j})(1-\theta)) \qquad (5c)$$

$$f = f_{i,j}\theta+f_{i+1,j}(1-\theta) \qquad (5d)$$

여기서 θ 의 값에 따라서 세 가지의 유한차분법으로 분류된다. 즉,

(1) $\theta=0$ 이면 Explicit 방법
(2) $\theta=1$ 이면 Implicit 방법
(3) $\theta=\frac{1}{2}$ 이면 Crank-Nicolson 방법

이라고 부른다. 다음으로 식 (5a), 식 (5b), 식 (5c), 식 (5d)를 식 (2)에 대입하여 $i\Delta t$ 시점의 옵션가격은 좌변에 정리하고, 그리고 $(i+1)\Delta t$ 시점의 옵션가격은 우변에 정리하면, 미지수가 $M-1$ 이고 방정식이 $M-1$ 개인 선형 연립방정식을 얻는다.

$$a_jf_{i,j-1}+b_jf_{i,j}+c_jf_{i,j+1} = a_j^*f_{i+1,j-1}+b_j^*f_{i+1,j}+c_j^*f_{i+1,j+1} \qquad (6)$$

여기서

$$
\begin{aligned}
J &= (S_{\min}+j\Delta S)/\Delta S \\
a_j &= \left(\frac{1}{2}(r-\delta)J-\frac{1}{2}\sigma^2J^2\right)\theta \\
b_j &= \frac{1}{\Delta t}+(r+\sigma^2J^2)\theta \\
c_j &= \left(-\frac{1}{2}(r-\delta)J-\frac{1}{2}\sigma^2J^2\right)\theta \\
a_j^* &= \left(-\frac{1}{2}(r-\delta)J+\frac{1}{2}\sigma^2J^2\right)(1-\theta) \\
b_j^* &= \frac{1}{\Delta t}-(r+\sigma^2J^2)(1-\theta) \\
c_j^* &= \left(\frac{1}{2}(r-\delta)J+\frac{1}{2}\sigma^2J^2\right)(1-\theta)
\end{aligned}
$$

그런데, 주가의 양 끝점에서의 옵션가격 $f_{i,0}$ 와 $f_{i,M}$ 은 경계조건식 (4b)와 식 (4c)에서 주어졌으므로 식 (6)에서 첨자 j 에 1부터 $M-1$ 까지 대입하면 연립방정식을 만들 수 있다.

이 연립방정식을 옵션의 만기시점($i=N-1$)부터 현재시점($i=0$)까지 차례로 반복적으로 풀어서 현재시점의 옵션가격, $f_{0,0}$, $f_{0,1}$, …, $f_{0,M}$ 을 얻는다. 여기서 연립방정식의 계수는 3선 띠대각 행렬(tridiagonal matrix)이므로 Gauss-Jordan의 소거법으로 쉽게 구할 수가 있다.[1] 그런데 Explicit 방법의 경우 $\theta=0$ 이므로 식 (6)에서 $a_j=c_j=0$ 이 된다. 따라서 연립방정식의 계수는 대각행렬(diagonal matrix)이 되기 때문에 연립방정식을 풀 필요가 없다.

3. 옵션만기 손익구조의 비선형성

유한차분법을 이용하여 옵션을 평가할 때 발생하는 가격계산 오차의 원인은 다음과 같이 4가지로 분류된다.

(원인 1) 편미분 방정식 (2)를 근사할 때 발생하는 오차. 즉, 식 (2)와 식 (6)의 차이로부터 발생하는 오차.

(원인 2) 만기시점에서 초기조건식 (3a)를 근사할 때 발생하는 오차. 즉, 식 (3a)와 식 (4a)의 차이로부터 발생하는 오차.

(원인 3) $S=S_{\min}$ 에서 경계조건식 (3b)를 근사할 때 발생하는 오차. 즉, 식 (3b)와 식 (4b)의 차이로부터 발생하는 오차.

(원인 4) $S=S_{\max}$ 에서 경계조건식 (3c)를 근사할 때 발생하는 오차. 즉, 식 (3c)와 식 (4c)의 차이로부터 발생하는 오차.

그런데, 만기시점에서 옵션의 가치는 정해져 있으므로 (원인 2)로 인한 오차는 없게 된다. 또한 $S_{\min}=0$ 으로 정해주면 (원인 3)으로 인한 오차도 없게 된다. 그러나 $S_{\max}=\infty$ 로 정해주는 것은 불가능하므로 (원인 4)로 인한 오차가 발생하게 된다. 하지만 이 때에도 $S_{\max}$ 를 충분히 큰 수로 정하여 주면 (원인 4)로 인한 오차도 없어지게 된다. 따라서 가격계산 오차의 가장 큰 원인은 (원인 1)로부터 발생한다. 특히, 옵션 만기 손익구조의 비선형성은 (원인 1)로부터 발생하는 오차를 더욱 크게 만든다.

유한차분법의 가격계산 오차, 즉, Black-Scholes 공식으로 구한 옵션가격의 참값과 유한차분법으로 구한 옵션가격의 근사값의 차이를 살펴보면 유한차분법의 근사값은 주가의 양 끝점에서는 아주 잘 일치하고 있으나, 행사가격점에 가까워질수록 오차가 자꾸 커지는 것을 알 수 있다. 즉, 옵션 시장에서 가장 거래가 많이 이루어지는 손익분기옵션(at the money option) 그리고 손익분기점에 가까운 옵션(around the money option)에서 가장 큰 오차가 발생한다. 이와 같이 손익분기옵션에서 가장 큰 오차가 발생하는 이유는 옵션 만기 손익구조가 비선형적이라는 사실이 기존의 유한차분법이 갖는 특정한 가정조건에 적합하지 않기 때문이다. 즉, 기존의 유한차분법은 초기값함수가 연속적으로 미분가능(continuously differentiable)함을 가정하고 있다. 다시 말해서, 초기값함수가 연속적으로 미분가능하면 (원인 1)로 인한 오차는 무시할 정도의 작은 오차가 된다. 그런데 옵션평가문제의 경우, 옵션 만기 손익구조의 비선형성으로 인하여 유한차분법의 초기값함수는 행사가격점에서 미분 불가능하게 되고 따라서 초기값함수의 도함수는 행사가격점에서 불연속성(discontinuity)을 갖는다. 특히, 이러한 문제점은 행사가격점 근처의 영역에서 (원인 1)로 인한 오차를 크게 만드는 요인이 되고 결국 손익분기옵션에서 가장 큰 오차가 발생하게 된다.[2]

이와 같은 문제점은 수학 분야에서 초기값 불연속성 문제로 알려져 있다. 그러나 재무이론 분야에서 사용된 기존의 유한차분법은 이러한 문제점을 전혀 고려하지 못하였다. 따라서, 본 연구의 다음 장에서는 초기값 불연속성 문제로 인하여 발생되는 가격계산 오차를 효율적으로 줄일 수 있는 수정된 유한차분법을 제시하고 오차의 크기와 계산의 효율성 측면에서 기존의 유한차분법과 비교・분석한다.

4. 수정된 유한차분법

오차를 줄이는 가장 간단한 방법은 구간점 사이의 간격을 줄이는 방법이다. 즉, ΔS 와 Δt 를 작게 하여 구간점을 많이 만들면 (원인 1)로 인한 오차가 줄어들어 더욱 정확한 해를 구할 수 있다. 그러나 이 방법은 방정식의 개수가 구간이 작아질수록 급증하고 행렬의 크기가 너무 커져서 컴퓨터의 용량을 많이 차지하고 계산시간이 오래 걸리는 단점이 있기 때문에 최근의 발달된 컴퓨터 계산 능력으로도 감당할 수 없을 정도의 부담이 된다. 따라서 계산상의 부담을 최소화하는 동시에 오차를 적정한 수준으로 낮추는 방법이 필요하며, 이를 위하여 본 연구에서는 행사가격 근처의 일부 구간에서만 구간점 사이의 간격을 세분화시키는 수정된 유한차분법을 제시한다. 이 방법은 행사가격을 중심으로 서로 반대쪽에 있는 두 구간점 $j=m$ 과 $j=l$ 을 택하고, 이 두 구간점 사이의 모든 구간 간격을 반으로 세분화하여 새로운 구간점을 만드는 방법이다. 이때 행사가격 근처에 있는 구간점 $j=m+1$, …, $l-1$ 에서는 세분화된 구간점을 이용하여 편도함수를 근사할 수 있으므로 더욱 정확한 해

1) 본 연구에서는 Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery(1992)의 tridag() 함수를 사용하였다.

2) 옵션평가문제에서 발생하는 이러한 문제점을 지적한 연구로는 Omberg(1988)의 연구가 있다.

를 구하게 된다.

그런데, 두 구간점 $j=m$과 $j=l$의 경우, 양쪽의 구간 간격이 서로 다른 사실을 주의해야 한다. 따라서, $j=m$에서의 편도함수를 근사하기 위하여 $j=m-1$, m, $m+2$인 3점에서의 $f_{i,j}$값을 이용하면 식 (7)을 얻는다.

$$a_m f_{i,m-1} + b_m f_{i,m} + c_m f_{i,m+2} = h_m \qquad (7)$$

여기서

$h_m = a^*_m f_{i+1,m-1} + b^*_m f_{i+1,m} + c^*_m f_{i+1,m+2}$ 이다.

또한 $j=l$에서의 편도함수를 근사하기 위하여 $j=l-2$, l, $l+1$인 3점에서의 $f_{i,j}$값을 이용하면 식 (8)을 얻는다.

$$a_l f_{i,l-2} + b_l f_{i,l} + c_l f_{i,l+1} = h_l \qquad (8)$$

여기서

$h_l = a^*_l f_{i+1,l-2} + b^*_l f_{i+1,l} + c^*_l f_{i+1,l+1}$ 이다.

이와 같은 방법으로 평면공간 내부의 모든 구간점에서 편미분 방정식 (2)를 근사하면 새로운 연립방정식을 만들 수 있다. 이때 식 (7)은 연립방정식의 m번째 식이 되고, 식 (8)은 l번째 식이 된다. 그러나 이 연립방정식의 계수 행렬은 3선 띠대각 행렬이 아니기 때문에 풀기가 쉽지 않다. 계수 행렬식을 3선 띠대각 행렬로 만들기 위해서는 식 (7)에서는 $f_{i,m+2}$를, 그리고 식 (8)에서는 $f_{i,l-2}$를 소거하여야 한다. 먼저 $f_{i,m+2}$를 소거하기 위하여 계수 행렬식의 (m)번째 식에 c_{m+1}을 곱하고 ($m+1$)번째 식에 $-c_m$을 곱하여 두 식을 더한다.

또한 (l)번째 식에 a_{l-1}을 곱하고 ($l-1$)번째 식에 $-a_l$을 곱하여 두 식을 더하면 $f_{i,l-2}$가 소거 된다. 이상의 식을 이용하여 (m)번째 식과 (l)번째 식을 대신하면 3선 띠대각 행렬이 된다.

손익분기옵션(at the money) 또는 이익옵션(in the money)의 경우, 단지 2개의 구간점만 추가하여도 기존의 유한차분법보다 훨씬 정확한 해를 구할 수 있다. 그 이유는 행사가격 근처에 만들어진 두 구간점이 (원인 1)로 인한 오차를 크게 감소시켰기 때문이다.

한편, 본 장에서 제시한 수정된 유한차분법을 더욱 효율적으로 만들기 위해서 향후 연구 방향으로 다음과 같은 계산 방법을 생각해 볼 수 있다. 즉, 행사가격과 가장 가까운 구간점에서는 그 간격을 2^{-4}배로, 그리고 행사가격 점에서 멀어질수록 구간점 사이의 간격을 2^{-3}배, 2^{-2}배, 2^{-1}배로 정하고, 나머지 구간에서는 동일한 간격으로 취한다. 그런데 세분화된 구간점을 만기시점부터 현재시점까지 계속적으로 적용할 필요는 없으므로 만기시점 근처에서만 그 간격을 세분화하고 현재시점까지 반복적으로 계산하면서 구간점 사이의 간격을 2배씩 증가시키면 필요한 계산시간을 최소화 할 수 있다.

5. 결론

유한차분법은 다양한 파생금융상품의 평가에 유용하게 적용되어 왔다. 본 연구에서는 유한차분법을 이용하여 옵션을 평가할 때 발생하는 문제점 및 가격계산오차에 대한 원인을 분석하였다. 특히, 옵션만기 손익구조의 비선형성이 유한차분법이 갖는 오차의 가장 큰 원인임을 보였다. 또한 이러한 문제점을 해결하기 위하여 행사가격 근처의 일부 구간에서만 구간점 사이의 간격을 세분화시키는 수정된 유한차분법을 제시하고 오차의 크기와 계산의 효율성 측면에서 기존의 유한차분법과 비교 · 분석하였다.

옵션의 가치평가에 있어서 기존의 유한차분법과 본 연구에서 제시한 수정된 유한차분법을 비교 · 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 손익분기옵션(at the money) 또는 이익옵션(in the money)의 경우 기존의 유한차분법으로 평가하면 큰 오차가 생기나, 본 논문에서 제시한 수정된 유한차분법으로 평가하면 오차를 크게 줄일 수 있다. 그러나 손실옵션(deep out of the money)의 경우에는 기존의 Crank-Nicolson 방법이 더 효율적이었다.

6. 참고문헌

[1] Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," Journal of Political Economy 81, 637-659.

[2] Boyle, P. P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach," Journal of Financial Economics, 4, 323-338.

[3] Boyle, P. P., 1988, "A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables," Journal of Financial and Quantitative Analysis, 23, 1-12.

[4] Brennan, M. J. and E. S. Schwartz, 1977, "The Valuation of American Put Options," Journal of Finance 32, 449-462.

[5] Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach," Journal of Financial Economics, 7, 229-264.

[6] Geske, R. and K. Shastri, 1985, "Valuation by Approximation: A Comparison of Alternative Valuation Techniques," Journal of Financial and Quantitative Analysis 20, 45-72.

[7] Merton, R. C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing," Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-183.

[8] Omberg, E., 1988, "Efficient Discrete Time Jump Process Models in Option Pricing," Journal of Financial and Quantitative Analysis 23, 161-174.

[9] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, 1992, Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press.

[10] Rendleman, R. and B. Bartter, 1979, "Two State Option Pricing," Journal of Finance, 34, 1092-1110.

[11] Schwartz, E. S., 1977, "The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach," Journal of Financial Economics 4, 79-94.

[12] Wilmott, P., J. Dewynne, and S. Howison, 1993, Option Pricing : Mathematical Models and Computation, Oxford Financial Press, Oxford, UK.