레이어가 있는 하프스페이스에서 페라이트코아가 있는 와류탐침에 대한 연구

김태원, 변기량, 최재훈, 강유석, 황호정

중앙대학교 전자공학과

Tel : 02-820-5296, Fax : 02-825-1584, E-mail : twkim@semilab3.ee.cau.ac.kr

A Study on Eddy-Current Probe with Ferrite Cores over a Layered Half-Space

T.W. Kim, K.R. Byun, J.H. Choi, E.S. Kang and H.J. Hwang

Chung-Ang Univ.

Tel : 02-820-5296, Fax : 02-825-1584, E-mail : twkim@semilab3.ee.cau.ac.kr

Abstract

In this paper, a model of a Eddy-current probe coil with a ferrite core in the presence of a half-space with a layer is developed. The half-space with a layer is accounted for by computing the appropriate Green's function by using Bessel transforms. Upon introducing equivalent Amperian currents within a core to explain effect to a impedance change in the coil due to a (ferrite) core, we derive a volume integral equation, The integral equation is transformed via the method of moments into a vector-matrix equation, which is then solved using a linear equation solver. Through the above processing, we computed impedance value in a Eddy-current probe coil due to a conductivity change of layer.

1. 서론

Dodd 등의 연구[3, 4]는 코아가 없는 와류탐침코일의 분석과 디자인 그리고 최적화를 주로 다루었다. 그러나 최근의 많은 응용분야들은 그탐침코일에 의해 생성된 자계가 공간의 특정지역에 국한,한정되는 것을, 특히 높은 주파수를 원하는 경우가 많다. 이러한 이유로 페라이트(ferrite)같은 투자율이 높은 물질의 사용이 필요하게 되었다.

하프스페이스(half-space)위의 레이어(layer)는 시료(보통Eddy-current NonDestructive Evaluation에서 말하는 시료)를 대신한다. 코아, 코일, 레이어(layer) 그리고 하프스페이스로 이루어진 시스템은 축대칭이다.

여기서 제시될 모델이 불특정모양의 회전체에 적용될 수 있으나, 본 논문에서는 특히 실린더(cylindrical) 코아모양을 다루었다.Dodd와 그의 동료들에 의해 다루어진 연구[3, 4]와 본논문은 페라이트(ferrite)코아의 유무로 명확한 차이를 보인다. 우리는 단지 Green's 함수를 구해낼 때 까지만 그들의 접근법(analytical approach)[3, 4]을 따랐다. 그리고 페라이트 코아에서의 자화(magnetization)를 계산하기 위해서는 수치해석적(numerical) 접근법을 이용했다 코아에서의 자화를 구하고나면, 코일의 임피던스는 코일에 유도된 전압(V)을 인가한 전류(I)로 나누어서 구했다.

본논문은 페라이트코아를 등가의 Amperian 전류원으로 대체하며 시작된다. 그 Amperian 전류원은 여기코일의 인가된 전류와 함께 총 전류원이 된다.

전체 전자계는 전류원(코일과 코아)이 존재하는 영역을 적분구간으로 하는 적분식으로 표현된다. 그적분식 안의 수식(integrand)은 변수가 두 개인 벡타함수이다. 그 변수중 하나는 전류원이 존재하는 위치를 말하며, 다른 하나는 전자계가 계산되는 위치를 말한다[10]. 위에서 언급했듯이, Dodd와 그의 동료들이 계산한 벡타함수(Green's 함수)가 여기에 등장한다[3, 4].

Amperian 전류원밀도(source current density)는 그위치에 존재하는 전자계에 따라 달라지기 때문에 미리 알 수는 없다. 따라서 미지수가 적분기호 안과 밖에 나타나는 적분방정식까지 구하게 된다-(페라이트코아의 자화와 직접적 관계가 있는 미지수가 Amperian 전류원밀도인 적분방정식),second kind Fredholm integral equation[10].

이적분방정식은 Moment법을 이용하여 행렬방정식으로 변환된다. 이 Amperian 전류와 인가된 전류를 가지고 시료를 포함한 공간의 임의의 위치에서의 전자계를 간단한 적분으로 계산해 낼 수 있다.

2. 모델 설명과 유도

정현파적 안정상태에서, Maxwell방정식에 Green의 벡터 등가법을 적용하여 자속밀도(magnetic flux density) B에 대한 체적 적분 방정식을 유도한다.

$$B(r,z)=B^{i}(r,z)+2\pi\nabla\times[a_{\phi}\int\int_{core}(1-\frac{\mu_0}{\mu})B(r',z')\cdot\nabla'\times G_{11}(r,z,r',z')r'dr'dz'] \quad (1)$$

여기서 우변의 첫 번째 항은 코일에 인가된 전류로 인한 입사자계(incident field)이다. 그리고 두 번째 항은 페라이트코아에 유도된 자화(magnetization),M,로 인한 자계(field)이다.

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=B(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu}) \quad (2)$$

여기서 μ는 페라이트의 투자율(permeability)이다. (1)식의 적분에서 소스(source)가 되는 항은 Amperian전류밀도 이다. (1)식의 Green함수에 있는 밑첨자는 공간을 우리가 나눈 영역을 나타낸다. 영역1은 레이어(layer)위에 있는 하프스페이스를 나타내고, 영역2는 레이어 그리고 영역3은 위에서 말한 영역의 나머지 영역을 나타낸다. 그 첫 번째 밑첨자는 우리가 계산하려 하는 전자계가 계산되는 위치를 나타내고, 두 번째 첨자는 그계가 존재하기 위한 소스(source)가 되는 위치를 나타낸다[6]. 여기서 G_{11}은 다음과 같다.

$$G_{11}(r,z,r',z')=\int_0^{\infty}[Ke^{-[a_0z+(2a_1-a_0)z']}-e^{-a_0(z+z')}+e^{-a_0(z-z')}]\frac{J_1(r'l)}{4\pi a_0}J_1(rl)ldl$$

$$K=\frac{2a_0(a_1-a_2)e^{-2a_1d}+2a_0(a_2+a_1)}{(a_1-a_2)(a_0-a_1)e^{-2a_1d}+(a_0+a_1)(a_2+a_1)}$$

일단 식(1)을 수치계산적(numerical) 식, 벡터행렬방정식, 으로 변환하기 위해 코아(core)를 규칙적인 격자로 분할한다. 이분할에 기초해서 구하고자 하는 미지의 자계(field)를 펄스(pulse)함수로 전개한다.

$$B(r,z)=\sum_{j=1}^{N_c}B_jP_j(r,z) \quad (3)$$

또는 성분으로 나타내면

$$B_r(r,z)=\sum_{j=1}^{N_c}b_j^{(r)}(\frac{r}{r_b})P_j(r,z) \quad (4a)$$

$$B_z(r,z)=\sum_{j=1}^{N_c}b_j^{(z)}P_j(r,z) \quad (4b)$$

여기서 $b_j^{(r)}$, $b_j^{(z)}$는 각각 r, z 성분에 대한 전개계수(expansion coefficients)들이다. N_c는 격자에 포함되는 셀(cell)들의 수이다. r_b는 r방향으로의 코아의 최대 크기를 나타낸다. 그리고 $P_j(r,z)$는 j번째 펄스함수(pulse function)이다, 이 펄스함수는 다음과 같이 정의된다.

$$P_j(r,z)=\begin{cases}1 & ,j\text{번째 셀}(cell)\text{에서}\\ 0 & ,\text{나머지 셀에서}\end{cases} \quad (5)$$

Galerkin법(Galerkin variant of the method of moment)을 적용하여 식(1)을 다음과 같은 벡터행렬방정식으로 변환한다.

$$\begin{bmatrix}A^{(rr)}-G^{(rr)} & -G^{(rz)}\\ -G^{(zr)} & A^{(zz)}-G^{(zz)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b^{(r)}\\ b^{(z)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F^{(r)}\\ F^{(z)}\end{bmatrix}$$

전체 행렬은 $2N_c\times 2N_c$ 이다. 전개계수 b_r, b_z에 대한 위의 행렬방정식이 풀어지면 그결과는 코아에서의 자속밀도를 알기위한 식(4)에 대입되어진다. 그리고 이것을 가지고 우리가 구하고자 하는 코아가 있을 때의 코일에서의 임피던스를 알 수있다.

위의 행렬의 성분에 해당하는 식은 다음과 같다.

$$F^{z}=\frac{n_cI\mu_0}{2a_0l^2}\int_0^{\infty}(e^{-a_0z^{+}}-e^{-a_0z^{-}})[\frac{A}{2a_1-a_0}\cdot(e^{-(2a_1-a_0)z_2}-e^{-(2a_1-a_0)z_1})-\frac{1}{a_0}(e^{-a_0z_2}-e^{-a_0z_1}+e^{a_0z_2}-e^{a_0z_1})]\cdot\mathfrak{I}(r_2l,r_1l)\beta_1(r^{+}l,r^{-}l)dl \quad (6)$$

$$F^{r}=\frac{n_cI\mu_0}{2a_0r_bl^4}\int_0^{\infty}(e^{-a_0z^{-}}-e^{-a_0z^{+}})[\frac{A}{2a_1-a_0}\cdot(e^{-(2a_1-a_0)z_1}-e^{-(2a_1-a_0)z_2})+\frac{1}{a_0}(e^{-a_0z_2}+e^{a_0z_2})]\cdot\mathfrak{I}(r_2l,r_1l)\beta_2(r^{+}l,r^{-}l)dl \quad (7)$$

$$G^{rr}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_0 l^5 r_b^2}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha_0 z^+}-e^{-\alpha_0 z^-}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{\alpha_0^2}\left(e^{\alpha_0 z_j^+}-e^{\alpha_0 z_j^-}-e^{-\alpha_0 z_j^+}+e^{-\alpha_0 z_j^-}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{A}{(2\alpha_1-\alpha_0)^2}\left(e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^+}-e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^-}\right)\right]$$

$$\cdot\beta_2(r^+ l, r^- l)\beta_2(r^+ l, r^- l)dl \qquad (8)$$

$$G^{zz}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_0 l^2}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha_0 z^+}-e^{-\alpha_0 z^-}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{A}{\alpha_0(2\alpha_1-\alpha_0)}\left(e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^+}-e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^-}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha_0^2}\left(e^{-\alpha_0 z_j^+}-e^{-\alpha_0 z_j^-}+e^{\alpha_0 z_j^+}-e^{\alpha_0 z_j^-}\right)\right]$$

$$\cdot\beta_1(r^+ l, r^- l)\beta_1(r^+ l, r^- l)dl \qquad (9)$$

$$G^{zr}$$

$$= \frac{1}{2\alpha_0 r_b l^3}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha_0 z^+}-e^{-\alpha_0 z^-}\right)$$

$$\cdot\left[\frac{A}{\alpha_0(2\alpha_1-\alpha_0)}\left(e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^+}-e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^-}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_0^3}\left(e^{\alpha_0 z_j^+}-e^{\alpha_0 z_j}-e^{-\alpha_0 z_j^+}+e^{-\alpha_0 z_j^-}\right)\right]$$

$$\cdot\beta_2(r_j^+ l, r_j^- l)\beta_1(r^+ l, r^- l)dl \qquad (10)$$

$$G^{rz}$$

$$= \frac{1}{2r_b\alpha_0 l^4}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)\int_0^{\infty}\left(e^{-\alpha_0 z^-}-e^{-\alpha_0 z^+}\right)$$

$$\cdot\left[-\frac{A}{2\alpha_1-\alpha_0}\left(e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^+}-e^{-(2\alpha_1-\alpha_0)z_j^-}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha_0}\left(e^{\alpha_0 z_j^+}-e^{\alpha_0 z_j^-}+e^{-\alpha_0 z_j^+}-e^{-\alpha_0 z_j^-}\right)\right.$$

$$\cdot\beta_2(r^+ l, r^- l)\beta_1(r_j^+ l, r_j^- l)dl \qquad (11)$$

여기서

$$A = \frac{2\alpha_0(\alpha_1-\alpha_2)e^{-2\alpha_1 d}+2\alpha_0(\alpha_2+\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_0-\alpha_1)e^{-2\alpha_1 d}+(\alpha_0+\alpha_1)(\alpha_2+\alpha_1)}$$

d : 레이어(layer)의 두께

$$\alpha_0=(l^2-k_0^2)^{1/2}, \quad \alpha_1=(l^2-k_1^2)^{1/2}$$

$$\alpha_2=(l^2-k_2^2)^{1/2}$$

3.임피던스계산

코일의 임피던스는 인가된 전류에 대한 유도된 전압(V)의 비율이라고 정의된다. (r', z')에 위치한 한번 감은 코일에 유도된 전압(voltage)는 다음과 같다.

$$V(r', z') = -\oint E\cdot dl = j\omega 2\pi r' A(r', z') \qquad (12)$$

이식은 다음과 같은 기본적인 관계에서 나온다.

$$E = -j\omega A \qquad (13)$$

코일은 단위면적당 n_c번씩 고르고 빽빽하게 감겨있을 때 그코일은 사각형 $r_1\le r\le r_2, z_1\le z\le z_2$을 점유한다. 여기에 유도된 전압(V)는 다음과 같다.

$$V = j\omega 2\pi n_c\int_{r_1}^{r_2}\int_{z_1}^{z_2} rA(r,z)drdz \qquad (14)$$

여기서 코일은 영역1에 있고, 거기에서의 벡터포텔션을 가지고 다음과 같은 식이 유도된다.

$$A(r,z) = 2\pi\mu_0\int\int_{coil} G_{11}(r,z,r',z')J(r',z')r'dr'dz'$$

$$+2\pi\int\int_{core}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)B(r',z')\cdot\nabla'$$

$$\times G_{11}(r,z,r',z')r'dr'dz' \qquad (15)$$

여기서 유도된 전압(V)은 다음과 같다.

$$V = j\omega(2\pi)^2 n_c^2 I\mu_0\int_{r_1}^{r_2} rdr\int_{z_1}^{z_2} dz\int_{r_1}^{r_2} r'dr'\int_{z_1}^{z_2} dz'$$

$$G_{11}(r,z,r',z')$$

$$+j\omega(2\pi)^2 n_c\int_{r_1}^{r_2} rdr\int_{z_1}^{z_2} dz\int\int_{core}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu}\right)$$

$$\cdot[B(r',z')\nabla'\times G_{11}(r,z,r',z')]r'dr'dz' \qquad (16)$$

식(16) 우변의 첫 번째 항은 코아가 없을 때에 코일에 유도된 기전력(EMF)이고, 두 번째 항은 코아에 유도된 자화(magnetization)로 인해 부가적으로 코일에 유도된 전압이다. 따라서 최종적인 임피던스는 식(16)을 인가한 전류 I 로 나눈 값이다.

4.결론

본연구에서는 페라이트코아를 가진 와류탐침모델을 개발하였다. 현재 많은 비파괴응용분야에서, 코아가 있는 와류탐침의 디자인과 특성파악에 정량적이고 또한 조직적인 기초를 제공한다.

본논문에서는 레이어(layer), 즉 시료로 인한 탐침코일에서의 임피던스변화를 보여주고 있다. 이는 시료의 특성, 특히 도전율(conductivity)을 파악하는데 있어서 필수적인 과정으로 Forward법으로 널리 알려져 있다. 본연구에서 개발한 모델을 가지고 코아내에서의 자속

밀도(magnetic flux density)뿐만아니라 레이어(시료)에 유도된 와류(eddy-current)도 계산해 낼 수 있다.
그림1에서 보면 도전율의 증가에 따라 임피던스의 실수부분은, 유도된 와류의 증가로 인해 시료에서의 손실이 증가하나 어느 한계이상이 되면 표피효과로 인한 와류가 유도되는 깊이가 감소되어 손실이 감소됨을 알 수있다. 임피던스의 허수부분의 계속적인 감소는 유도된 와류로 인한 자속의 감소로 인한 것 이다.
본 연구 결과를 기존의 논문, 서적[2]과 비교해서 우리가 개발한 모델의 타당성을 확인했다.

주파수	10 Hz	100 Hz	1,000Hz	10,000Hz	100,000 Hz	1,000,000 Hz
임피던스	0.0039	0.3664	6.7331	45.5634	128.0139	270.0904
	j0.5749	j5.6496	j45.4345	j365.0327	j3255.8172	j32132.0680

표1, 인가전류 주파수변화에 따른 와류탐침코일에서 임피던스변화

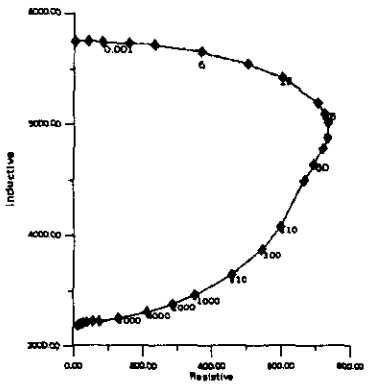

그림 1 시료(layer)의 도전율(conductivity) 변화에따른 임피던스 변화

참고문헌

[1] "Nondestructive Testing Handbook", Vol. 4(Electromagnetic testing) edit. Paul McIntire ASNT (1986)

[2] "Introduction to Electromagnetic Nondestructive Test Methods" Hugo L. Libby, wiley-interscience, (1971)

[3] C.V. Dodd and W.E. Deeds, "Analytical solutions to eddy-current probe-coil problems", J. Appl. Phys., Vol. 39, pp. 2829-2838, (1968)

[4] J.W. Luquire, W.E, Deeds, and C.V. Dodd, "Alternating current distribution between planar conductors." J.Appl.Phys.,Vol.41,pp.3983-3991,(1970)

[5] R. F. Harrington, "Field Computation by Moment Methods" NewYork, Macmillan, (1968)

[6] "Time-Harmonic Electromagnetic fields", R. F. Harrington, McGraw-Hill, (1961)

[7] John A. Tegopoulos, Andrzej Krawczyk "Numerical Modelling of Eddy Currents" (1993)

[8] "Eddy Currents in Linear Conducting Media" J.A. Tegopoulos, E.E. Kriezis (1985)

[9] "Electromagnetics", John D. Kraus, (1991)

[10] "Mathematical Methods for Physicists" George Arfken, Academic Press, (1985)

[11] M. Abramowitz and I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical functions" (1970)

[12] "Impedance of coils over layered metals with continuously variable conductivity and permeability; Theory and experiment", Erol Uzal, John C. Moulder, Sreeparna Mitra, and James H. Rose, J. Appl. Phys. Vol. 74(3), (1993)

[13] J. C. Moulder, E. Uzal, and J. H. Rose, Rev. Sci. Instrum, Vol. 63, pp. 3455, (1992)

[14] W. R. Smythe, "Static and Dynamic Electricity" 3rd ed. (Pergamon, New York, 1968)