

이항트리의 완전이진트리에 대한 임베딩

윤수민^{*†}, 최정[‡], 임형석[†]

[†] 전남대학교 진산통계학과

[‡] 기전여자대학 사무자동화과

Embedding Binomial Trees in Complete Binary Trees

Su-Min Youn^{*†}, Jung Choi[‡], Hyeong-Seok Lim[†]

[†] Dept. of Computer Science and Statistics, Chonnam National Univ.

[‡] Dept. of Office Automation, Kijeon Women's College

Abstract

Whether a given tree is a subgraph of the interconnection network topology is one of the important problem in parallel computing. Trees are used as the underlying structure for divide and conquer algorithms and provide the solution spaces for NP-complete problems. Complete binary trees are the basic structure among those trees. Binomial trees play an important role in broadcasting messages in parallel networks. If binomial trees can be efficiently embedded in complete binary trees, broadcasting algorithms can be efficiently performed on the interconnection networks. In this paper, we present average dilation 2 embedding of binomial trees in complete binary trees.

1. 서론

최근의 컴퓨터 시스템은 하드웨어 기술의 발달과 함께 단일 프로세서 중심의 처리구조에서 점차 여러 개의 프로세서를 상호 연결하여 처리하는 병렬처리 컴퓨터 구조로 발전해 가고 있다. 이러한 추세에 따라 다양한 형태의 병렬처리 컴퓨터 구조들이 개발되고 이들 구조에서 여러 가지 문제들을 풀기 위한 많은 병렬 알고리즘들이 설계되었다. 이러한 알고리즘들을 원래와는 다른 연결망 구조에서 실행시킬 수 있는지는 병렬 처리에서 중요한 문제중 하나이다. 이러한 방법 중에서 널리 쓰이는 것으로 임베딩이 있다[1, 2, 6, 7].

그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 $f = (\phi, \rho)$ 는 다음과 같이 정의한다. ϕ 는 G 의 정점 v 에서 H 의 정

점 $\phi(v)$ 로의 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e = (v, w)$ 에서 $\phi(v)$ 와 $\phi(w)$ 를 잇는 H 의 경로 $\rho(e)$ 로의 함수이다. 임베딩의 비용을 측정하는 척도로는 연장률(dilation), 밀집률(congestion), 확장률(expansion) 등이 있다. G 의 에지 e 의 연장률은 H 상에서의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, 임베딩 f 의 연장률은 G 의 모든 에지의 연장률 중 최대값이다. H 의 에지 e' 의 밀집률은 e' 를 포함하는 $\rho(e)$ 의 개수를 말한다. 임베딩 f 의 밀집률은 H 의 모든 에지의 밀집률의 최대값이다. 임베딩 f 의 확장률은 G 의 정점의 개수에 대한 H 의 정점의 개수의 비를 말한다.

이러한 임베딩 문제중 트리 구조를 임베딩하는 문제는 특별한 중요성을 띠고 있다. 트리는 자료구조 또는 분할정복(divide-and-conquer) 알고리즘의 기반이 되거나 NP-complete 문제의 solution space를 제공하는 구조로서 널리 이용되고 있기 때문이다.

트리 중에서 가장 기본적인 구조인 완전 이진 트리에 대한 임베딩 결과로는 하이퍼큐브에 연장률 2, 확장률 1 또는 연장률 1, 확장률 2로 임베딩할 수 있음이 알려져 있으며[3], 완전 이진 트리가 새퀴원형군 $G(N, 4)$ 의 부그래프임이 알려져 있다[4]. 방송 알고리즘의 기반이 되는 구조인 이항 트리는 새퀴원형군 $G(N, 4)$ 의 부그래프이고 하이퍼큐브의 부그래프임이 이미 알려져 있다[3, 5]. 그렇지만 완전 이진 트리와의 이항 트리 사이에 임베딩하는 효율적인 방법은 개발되어 있지 않다. 본 논문에서는 완전 이진 트리와 이항 트리 사이의 효율적인 임베딩 방법을 제시한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 두 트리의 정의 및 기본 성질과 완전 이진 트리를 이항 트리에 임베딩하는 방법을 보이고, 3장에서는 이항트리를 완전이진트리에 임베딩하는 방법을 제시하고, 4장에서 결론을 맺고 추후 연구 방향을 살펴본다.

2. 완전이진트리의 이항트리에 대한 임베딩

완전 이진 트리와 이항 트리의 정의를 먼저 알아보면 다음과 같다.

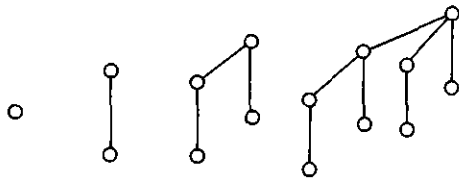
정의 1 높이가 k 인 완전 이진 트리 BT_k

공집합이거나 루트와 왼쪽 서브트리, 오른쪽 서브트리라고 부르는 두 개의 분리된 완전 이진 트리로 구성된 정점의 유한집합이다.

높이가 k 인 완전 이진 트리는 2^k-1 개의 정점을 갖는다($k \geq 0$).

정의 2 높이가 k 인 이항 트리 B_k

- (1) B_0 는 하나의 정점 r_0 로 구성되며 r_0 가 B_0 의 루트이다.
- (2) $k \geq 1$ 에 대해, $B_{(k-1)l}$ 과 $B_{(k-1)r}$ 은 서로 소인 B_{k-1} 이고 $B_{(k-1)l}$ 의 루트를 $B_{(k-1)r}$ 의 가장 왼쪽 자식 정점이 되도록 에지를 추가함으로써 얻어지는 트리이다.



(a) B_0 (b) B_1 (c) B_2 (d) B_3

<그림 1> 이항 트리의 예

이러한 이항 트리에 대해 다음 성질이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

- 성질 1** B_k ($k \geq 0$)의 정점의 개수는 2^k 이다.
- 성질 2** B_k ($k \geq 0$)의 각 정점에 한 개의 자식 노드를 추가한 트리는 B_{k+1} 이다.
- 성질 3** B_k ($k \geq 1$)에서 r_k 를 제거하면 B_0, B_1, \dots, B_{k-1} 이 각각 하나씩 존재하는 포리스트가 된다.

이항 트리를 이진 트리 형태로 변형한 트리는 완전

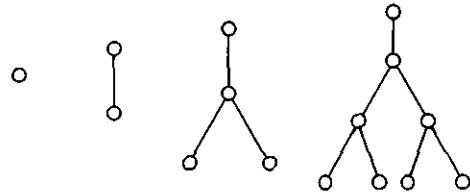
이진 트리를 부그래프로 가지고 있다. 이진 트리 형태로 변환된 이항 트리가 연장률 2로 이항 트리에 임베딩 가능하다면 완전 이진 트리가 이항 트리에 연장률 2로 임베딩 가능하다.

이항 트리를 이진 트리로 변형하는 방법은 다음과 같다. 임의의 노드(c)의 자식 노드들을 c_1, \dots, c_n 이라 하자. c 에서 가장 왼쪽 자식(c_1)을 제외한 나머지 자식 c_i ($i=2, \dots, n$)는 부모 노드(c)와의 에지를 제거하고 c_{i-1} 과 에지를 갖는다.

완전 이진 트리 BT_k 에 정점 하나가 추가된 트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 3 높이가 k 인 트리 T_k

- (1) T_0 는 공집합인 완전 이진 트리 BT_0 와 하나의 정점 r_0' 가 인접한 형태의 트리이므로 하나의 정점으로 구성된다.
- (2) $k \geq 1$ 에 대해, 완전 이진 트리 BT_k 의 루트 r_k 와 하나의 정점 r_k' 가 인접한 형태의 트리이고 r_k 가 T_k 의 루트이다.



(a) T_0 (b) T_1 (c) T_2 (d) T_3

<그림 2> 트리 T_k 의 예

- 성질 1** T_k ($k \geq 0$)의 정점의 개수는 2^k 이다.
- 성질 2** T_k ($k \geq 1$)의 서브트리인 BT_k 의 단말노드에 두 개의 자식 노드(left-child, right-child)를 추가한 트리는 T_{k+1} 이다.
- 성질 3** T_k ($k \geq 1$)에서 루트 r_k 에 대한 left-child에서 leaf까지의 leftmost path에 존재하는 에지와 r_k' 를 제거했을 때 T_0, T_1, \dots, T_{k-1} 이 각각 하나씩 존재하는 포리스트가 된다.

이항 트리를 이진 트리 형태로 변형한 트리는 완전 이진 트리를 부그래프로 가지고 있다.

정리 1 이항 트리 B_k 를 이진 트리 형태로 변형한 트리는 T_k 이다.

정리 2 다음 조건 (a)와 (b)를 만족하는 $T_k(k \geq 1)$ 의 이항 트리 B_k 에 대한 연장률 2인 임베딩이 존재한다.

- (a) T_k 의 부트리 BT_k 에 속하는 어떤 정점도 B_k 의 부트에 사상되지 않는다.
- (b) T_k 의 루트는 B_k 의 루트와 연결된 B_{k-1} 의 루트에 사상된다.

정리 1과 정리 2에 의해 완전 이진 트리는 이항 트리에 연장률 2로 임베딩 가능하다.

정리 3 완전 이진 트리 $BT_k(k \geq 1)$ 는 이항 트리 B_k 에 연장률 2로 임베딩 가능하다.

증명 완전 이진 트리 BT_k 는 T_k 의 부트리이고 정리 2에 의하면 T_k 는 B_k 에 연장률 2로 임베딩 가능하다. 그러므로 완전 이진 트리 BT_k 는 이항 트리 B_k 에 연장률 2로 임베딩 가능하다. □

3. 이항트리의 완전이진트리에 대한 임베딩

이항 트리의 완전 이진 트리에 대한 임베딩에서 연장률의 하한값은 다음과 같다.

소정리 1 이항 트리의 완전 이진 트리에 대한 임베딩에서 연장률의 하한값은 $O(\log \log N)$ 이다.

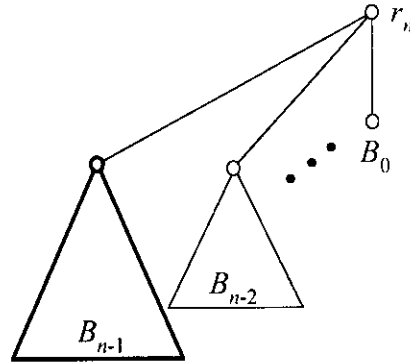
증명 이항 트리의 임의의 노드 v 를 완전 이진 트리의 한 노드 v' 에 사상했을 때 이항 트리에서 v 와 인접한 노드 중 완전 이진 트리에 k 이내의 경로로 사상할 수 있는 노드 수는 $3 \cdot 2^k$ 이다. 이항 트리에서 가장 큰 차수를 갖는 노드는 루트이고 루트의 디그리는 $\log N$ 이다. 따라서 이항 트리를 완전 이진 트리에 연장률 d 로 임베딩하려면 $\log_2 N \leq \sum_{k=1}^d 3 \cdot 2^k$ 을 만족해야 하므로 연장률의 하한값은 $O(\log \log N)$ 이 된다.

이항 트리와 트리 T_k 는 각각 성질 3을 만족하는 포리스트가 존재한다. 이러한 성질을 이용해 높이 k 인 이항 트리는 높이 k 인 완전 이진 트리에 연장률 k 로 임베딩됨을 보인다.

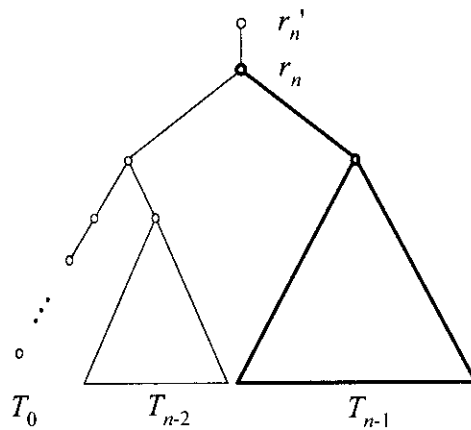
정리 다음 조건 (a)와 (b)를 만족하는 $B_k(k \geq 0)$ 의 T_k

에 대한 연장률 k 인 임베딩이 존재한다.

- (a) B_k 의 루트 r_k 는 T_k 의 루트와 인접한 r_k' 에 사상한다.
- (b) B_k 의 부트리 $B_i(0 \leq i \leq k-1)$ 의 루트들은 T_k 의 루트에서 시작되는 leftmost path에 존재하는 정점 중 r_k' 와 거리가 $k-i$ 인 정점에 사상한다.



(a) B_n



(b) T_n

<그림 3> B_n 의 T_n 에 대한 임베딩

증명 k 가 0인 경우와 k 가 1인 경우는 쉽게 임베딩되는 것을 알 수 있다. $k < n$ 인 경우 위 정리가 성립한다고 가정하고, $k = n$ 일 때 조건 (a)에 의해 B_n 의 루트 r_n 은 T_n 의 루트와 인접하는 r_n' 에 사상한다. B_n 과 T_n 은 각각 성질 3을 만족하는 루트에 인접한 서브트리들이 존재하고, 조건 (b)에 의해 B_n 의 서브트리 B_0, B_1, \dots, B_{n-1} 의 루트들은 T_n 의 서브트리 T_0, T_1, \dots, T_{n-1} 의 루

트들에 사상한다. 가정에 의해 B_i 의 T_i ($0 \leq i \leq n-1$)에 대한 연장률 i 인 임베딩이 존재한다(그림 3). B_n 에서 루트 r_n 과 서브트리 B_i 의 루트간에 존재하는 예지는 T_n 에서 r_n' 와 T_i 의 루트들간의 거리가 $n-i$ ($0 \leq i \leq n-1$)인 경로로 사상되므로 연장률 n 인 임베딩이 존재한다. \square

따름정리 1 B_k ($k \geq 0$)의 T_k 에 대한 임베딩에서 평균 연장률은 약 2가 된다.

증명 이항 트리의 완전 이진 트리에 대한 연장률 k 인 임베딩 결과를 적용하면 연장률이 1, 2, ..., k 인 예지가 각각 $2^{k-1}, 2^{k-2}, \dots, 2^0$ 개가 존재함을 알 수 있다. 연장률 i ($1 \leq i \leq k$)인 B_k 의 예지 개수를 T_k 의 예지 개수로 나누는 값을 식으로 표현하면 다음과 같고 따라서 평균 연장률은 약 2가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{\sum_{i=1}^k i \cdot 2^{k-i}}{2^k} = \frac{2^{k+1} - 2 - k}{2^k} \approx 2$$

이항 트리의 완전 이진 트리에 대한 연장률 k 인 임베딩은 연장률의 하한값 $O(\log \log N)$ 보다 크지만 평균 연장률은 약 2로 좋은 결과를 얻을 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 완전 이진 트리와 이항 트리 사이의 임베딩에서 이항트리의 완전 이진 트리에 대한 임베딩 방법을 제시하였다. 이항 트리와 완전 이진 트리는 각각 포리스트를 갖는 성질을 이용해 높이가 k 인 완전 이진 트리를 높이가 k 인 이항 트리에 연장률 k 로 임베딩 가능함을 보였다. 따라서 특정 연결망에서 두 트리가 제공하는 효율적 알고리즘을 수행하고자 할 때 완전 이진트리 구조를 포함하는 연결망에서 이항 트리가 제공하는 효율적인 알고리즘을 평균 연장률 2의 관계로 수행할 수 있다.

앞으로 완전 이진 트리와 이항 트리의 관계를 이용해 다른 상호 연결망과의 관계를 알아보고 완전 이진 트리와 이항 트리의 다른 연결망에 대한 임베딩 방법에 관한 연구가 필요하리라 생각된다.

참고문헌

- [1] S. B. Akers, and B. Krishnamurthy, "A group-theoretic model for symmetric interconnection networks," IEEE Trans. Comput., Vol. 38, pp. 555-566, 1989.
- [2] N. Bagherzadeh, M. Dowd, and N. Nassit, "Embedding an arbitrary binary tree into the star graph," IEEE trans. Comput. Vol.45, pp. 475-481, 1996.
- [3] S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg, "Efficient embedding of trees in hypercubes," SIAM J. Comput. Vol. 21, pp. 151-162, 1991.
- [4] H.-S. Lim, J.-H. Park, and K.-Y. Chwa, "Embedding Trees in Recursive Circulants," Discrete Applied Mathematics 69, pp. 83-99, 1996.
- [5] J. Q. Michael, Parallel Computing theory and practice, pp. 137-139, 1994.
- [6] A. Wagner, "Embedding arbitrary binary trees in a hypercube," J. Parallel and Distrib. Comput. 7, pp. 503-520, 1989.
- [7] A. Y. Wu, "Embedding of tree networks into hypercubes," J. Parallel and Distrib. Comput., Vol. 2, pp. 238-249, 1985.