다중포트 통신에서의 재귀원형군에 대한 최적 방송

최 정*†, 이 형 옥‡, 임 형 석‡
† 기전여자대학 사무자동화과
‡ 전남대학교 전산통계학과

Optimal Broadcasting in Recursive Circulants under Multi-port Communication

Jung Choi*†, Hyeong-Ok Lee‡, Hyeong-Seok Lim‡
† Dept. of Office Automation, Kijeon Women's College
‡ Dept. of Computer Science and Statistics, Chonnam National Univ.

Abstract

In this paper, we consider the problem of optimal broadcasting in recursive circulants under multi-port communication model. Recursive circulant $G(N, d)$ that is defined to be a circulant graph with N vertices and jumps of powers of d is a useful interconnection network from the viewpoint of network metrices. Our model assumes that a processor can transmit a message to α neighboring processors simultaneously where α is two or three. For the broadcasting problem, we introduce 3-trees and 4-trees. And then we show that 3-trees and 4-trees are minimum broadcast trees in 2-port model and 3-port model. Using the above results, we show that recursive circulants $G(2^m, 2)$ have optimum broadcasting time in 2-port model and 3-port model.

1. 서론

대규모 계산수행을 필요로 하는 문제가 증가하면서 여러개의 프로세서를 상호연결하여 처리하는 병렬처리 컴퓨터 구조에 대한 관심이 높아지고 있다. 대규모 계산수행을 필요로 하는 문제들의 대부분은 동시에 처리될 수 있는 더 작은 문제들로 분할될 수 있다. 분할된 문제들은 병렬처리 컴퓨터의 각 프로세서에서 병렬적으로 수행된다. 방송은 이러한 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업이다. 방송은 한 정점에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 정점들에게 보내는 과정을 말한다.

본 논문에서는 재귀원형군에서의 방송문제를 다룬다. [6]에서 제안한 재귀원형군은 여러 가지 망척도면에서 좋은 성질을 가지고 있다[6,9]. 재귀원형군 $G(N, d)$, $d \ge 2$는 $V=\{0, 1, \dots, N-1\}$을 노드집합으로 가지고, $E=\{(v,w) \mid \exists\ i,\ v+d^i \equiv w (\mathrm{mod}\ N),\ 0 \le i \le \lceil \log_d N \rceil -1\}$을 에지집합으로 가지는 그래프이다. 본 논문에서는 재귀원형군 중에서 $G(2^m, 2)$만을 다루기로 한다.

방송전략이 효과적인가는 기반하는 통신모델에 달려 있다. 특히 프로세서가 통신링크를 어떻게 사용할 수 있는가는 중요한 문제이다. 동시에 사용가능한 통신링크의 수에 따라서 단일포트(single-port) 모델과 다중포트(multi-port) 모델로 나눌 수 있다. 단일포트 모델[2,8]에서는 한 프로세서가 단위 시간에 인접한 하나의 프로세서에게 메시지 한 개를 전송할 수 있다. 그러나 하드웨어 기술이 발전함에 따라 도입되는 다중포트 모델[1,4,7]에서는 한 프로세서가 단위 시간에 인접한 여러 개의 프로세서에게 메시지 하나를 동시에 전송할 수 있다.

그래프 G의 정점 v에서 방송시간은 $b(v)$로 표시하고, 이는 정점 v에서 시작한 방송을 완료하는데 필요한 최소 단위시간을 말한다. N개의 정점을 가지고, 루트가 v이며 $b(v)=\lceil \log_2 N \rceil$인 트리는 단일포트 통신모델에서 최소방송트리(minimum broadcast tree)이다[3]. 이를 다중포트 모델로 확장하여 N개의 정점을 가지고, 루트가 v이며 $b(v)=\lceil \log_{\alpha+1} N \rceil$인 트리를 α-포트 통신모델에서 최소방송트리로 정의한다.

단일포트 통신모델에서 재귀원형군 $G(2^m, 4)$가 최소방송시간을 가짐을 [6]에서 보였다. 그러나 다중포트 모델에서 재귀원형군의 최소시간 방송에 대한 결과는 아직 밝혀져 있지 않다. 본 논문에서는 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 2-포트와 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 3-트리와 4-트리를 제시하고 각각이 2-포트와 3-포트 통신모델에서 최소방송트리임을 보인다. 3장에서는 2-포트 통신모델에서 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 최소시간에 방송할

수 있음을 보이고 4장에서는 3-포트 통신모델에서 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 최소시간에 방송할 수 있음을 보인다. 마지막으로 4장에서 결론을 맺고 추후 연구방향을 살펴본다.

2. 2-포트와 3-포트 통신모델에서 최소 방송트리

단일포트 모델에서는 각 단위시간동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두배씩 증가하므로 $b(v) \geq \lceil \log_2 N \rceil$이 되며, 2^k개의 정점을 가진 최소방송트리는 이항트리 B_k이다. 이항트리를 스패닝트리로 갖는 노드-대칭적인 연결망은 단일포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다. 다중포트 모델에서 한 프로세서가 인접한 두 개의 프로세서에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다고 제약조건을 가했을 때, 각 단위시간동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 세배씩 증가하므로 $b(v) \geq \lceil \log_3 N \rceil$이다. 또한 한 프로세서가 인접한 세 개의 프로세서에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다고 제약조건을 가했을 때, 각 단위시간동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 네배씩 증가하므로 $b(v) \geq \lceil \log_4 N \rceil$이다. 2-포트 통신모델의 최소방송트리인 3-트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 1 k-레벨 3-트리, TT_k

(1) TT_0는 하나의 정점 r_0로 구성되며 r_0가 TT_0의 루트이다.

(2) $TT_k, (k \geq 1)$는 3개의 3-트리 TT^1_{k-1}, TT^2_{k-1}, TT^3_{k-1}와 그들의 3개의 루트 r^1_{k-1}, r^2_{k-1}, r^3_{k-1}에 대해 r^1_{k-1}과 r^2_{k-1} 그리고 r^2_{k-1}와 r^3_{k-1} 사이에 에지가 존재하는 트리이며 r^2_{k-1}이 TT_k의 루트 r_k이다.

3-트리가 2-포트 통신모델에서 최소방송트리임을 정리 1에서 보인다.

정리 1 3-트리는 2-포트 통신모델에서 최소방송트리이다.

증명 2-포트 통신모델에서는 한 정점이 주어진 시간에 인접한 두 개의 정점에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다. 처음에는 k-레벨 3-트리 TT_k의 루트 r_k가 메시지를 가지고 있다. 단위시간동안 r_k는 두 개의 부트리 TT^1_{k-1}과 TT^3_{k-1}의 루트 r^1_{k-1}과 r^3_{k-1}에게 메시지를 보낸다. 1 단위시간 후에는 3개의 정점 $r_k(=r^2_{k-1})$, r^1_{k-1}, r^3_{k-1}이 메시지를 가지고 있으며 이들은 TT^2_{k-1}, TT^1_{k-1}, TT^3_{k-1}의 루트들이다. 루트가 메시지를 가지고 있는 세 개의 TT_{k-1}에서 위와 같은 과정을 동시에 적용하면 아홉 개의 TT_{k-2}의 루트가 메시지를 가지게 된다. 이와 같은 과정을 k번 반복하면 3^k개의 TT_0, 즉 모든 정점들이 메시지를 갖게 된다. 2-포트 통신모델에서 TT_k의 모든 정점에 메시지를 보내는데 걸리는 시간은 k이다. 그러므로 3-트리는 2-포트 통신모델에서 최소방송트리이다. □

3-포트 통신모델의 최소방송트리인 4-트리는 다음과 같이 정의한다.

정의 2 k-레벨 4-트리, QT_k

(1) QT_0는 하나의 정점 r_0로 구성되며 r_0가 QT_0의 루트이다.

(2) $QT_k, (k \geq 1)$는 4개의 4-트리 QT^1_{k-1}, QT^2_{k-1}, QT^3_{k-1}, QT^4_{k-1}와 그들의 4개의 루트 r^1_{k-1}, r^2_{k-1}, r^3_{k-1}, r^4_{k-1}에 대해 r^1_{k-1}과 r^2_{k-1}, r^2_{k-1}와 r^3_{k-1} 그리고 r^2_{k-1}와 r^4_{k-1} 사이에 에지가 존재하는 트리이며 r^2_{k-1}이 QT_k의 루트 r_k이다.

4-트리가 3-포트 통신모델에서 최소방송트리임을 정리 2에서 보인다.

정리 2 4-트리는 3-포트 통신모델에서 최소방송트리이다.

증명 3-포트 통신모델에서는 한 정점이 주어진 시간에 인접한 세 개의 정점에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다. 처음에는 k-레벨 4-트리 QT_k의 루트 r_k가 메시지를 가지고 있다. 단위시간동안 r_k는 세 개의 부트리 QT^1_{k-1}, QT^3_{k-1}, QT^4_{k-1}의 루트 r^1_{k-1}, r^3_{k-1}, r^4_{k-1}에게 메시지를 보낸다. 1 단위시간 후에는 4개의 정점 $r_k(=r^2_{k-1})$, r^1_{k-1}, r^3_{k-1}, r^4_{k-1}가 메시지를 가지고 있으며 이들은 QT^2_{k-1}, QT^1_{k-1}, QT^3_{k-1}, QT^4_{k-1}의 루트들이다. 루트가 메시지를 가지고 있는 네 개의 QT_{k-1}에서 위와 같은 과정을 동시에 적용하면 16개의 QT_{k-2}의 루트가 메시지를 가지게 된다. 이와 같은 과정을 k번 반복하면 4^k개의 QT_0, 즉 모든 정점들이 메시지를 갖게 된다. 3-포트 통신모델에서 QT_k의 모든 정점에 메시지를 보내는데 걸리는 시간은 k이다. 그러므로 4-트리는 3-포트 통신모델에서 최소방송트리이다. □

정리 1에 의하여 3-트리를 스패닝트리로 갖는 노드-대칭적인 연결망은 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다. 마찬가지로 정리 2에 의하면 4-트리를 스패닝트리로 갖는 노드-대칭적인 연결망은 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다.

3. 2-포트 통신모델에서 $G(2^m, 2)$의 최적 방송

이절에서는 정리 1을 이용하여 $G(2^m, 2)$가 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보인다. 이를 위

해 TT_k가 $G(N, 2)$의 부그래프임을 먼저 보인다. 임의의 그래프 G가 재귀원형군의 부그래프임을 보이는 방법으로 d-에지 번호매김이 [5]에서 제시되었다. 그래프 G에 대한 d-에지 번호매김이란 G의 정점에 1에서 정점의 개수까지의 서로 다른 정수를 부여하는데, 인접한 정점에 할당된 두 정수의 차가 d의 거듭제곱이 되게 하는 것이다. 재귀원형군과 d-에지 번호매김의 정의로부터 정점수가 N이하이고 d-에지번호매김이 가능한 그래프는 재귀원형군 $G(N, d)$의 부그래프임을 알 수 있다.

정리 3 3-트리는 2-에지 번호매김이 가능하다[10].

정리 3에 의하여, 3-트리는 재귀원형군 $G(N, 2)$의 부그래프임을 알 수 있다. 이제 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보인다. 먼저 k-레벨 3-트리 TT_k에서 단말노드를 i개 이상 제거한 트리를 TT^*_k로 정의한다($1 \le i \le 2 \cdot 3^{k-1}-1$).

소정리 1 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1}를 스패닝 트리로 갖는다($3^k<2^m<3^{k+1}$).

증명 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1} ($3^k<2^m<3^{k+1}$)이 2-에지 번호매김이 가능함을 보여서 재귀원형군 $G(2^m, 2)$의 스패닝 부그래프 임을 보인다. 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1}은 TT_k를 부트리로 가지고 있고 TT_k의 각 정점에 i, $0 \le i \le 2$개의 정점을 추가한 트리이다. TT_k의 각 정점에 많아야 두개 추가된 정점(L노드, R노드)중 L노드는 L노드그룹에 속하고 R노드는 R노드그룹에 속한다. TT_k는 정리 1에 의해 2-에지 번호매김이 가능하다. TT^*_{k+1}중에서 TT_k에 속하지 않은 정점들을 포함하여 2-에지 번호매김이 되도록 부트리 TT_k의 번호매김을 재조정 한다.

L노드그룹에는 1부터 |L노드그룹|개의 정수를 사용하고, TT_k에는 |L노드그룹|+1부터 3^k개의 정수를 사용하며, R노드그룹에는 3^k+|L노드그룹|+1부터 |R노드그룹|개의 정수를 사용하여 번호매김하고자 한다. TT_k는 모든 정점들에 같은 수를 더했으므로 2-에지 번호매김에는 변함이 없다. TT_k의 정점수는 3^k이고 L노드그룹과 R노드그룹의 각각의 정점수는 3^k개 이하이다. 그러므로 L노드그룹과 TT_k 사이에는 $2 \cdot$|L노드그룹|개의 연속된 정수를 사용하고 TT_k와 R노드그룹 사이에는 $2 \cdot$|R노드그룹|개의 연속된 정수를 사용하여 2의 거듭제곱 차이가 되도록 일대일 대응할 수 있다[5]. 즉 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1}은 2-에지번호매김이 가능하고, d-에지번호매김과 재귀원형군의 정의에 의해 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1}은 재귀원형군 $G(2^m, 2)$의 스패닝 부그래프이다. □

정리 4 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다.

증명 소정리 1에 의해 $G(2^m, 2)$는 정점수가 2^m인 임의의 TT^*_{k+1} ($3^k<2^m<3^{k+1}$)을 스패닝 트리로 가지고 있으므로 2-포트 통신모델에서 $G(2^m, 2)$의 방송시간은 TT_{k+1}의 방송시간과 같다. 즉 $b(v) = \lceil \log_3 2^m \rceil = k+1$이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 노드-대칭적인 연결망이므로 임의의 정점에서 시작한 방송도 k+1시간에 완료할 수 있다. 그러므로 $G(2^m, 2)$는 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다. □

4. 3-포트 통신모델에서 $G(2^m, 2)$의 최적 방송

이절에서는 정리 2를 이용하여 $G(2^m, 2)$가 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보인다. 이를 위해 QT_k가 $G(N, 2)$의 부그래프임을 먼저 보인다. 소정리 2를 이용하여 4-트리가 2-에지 번호매김됨을 정리 5에서 보인다.

소정리 2 n이 4^k인 경우, 1과 n사이의 정수와 $2n$+1과 $3n$사이의 정수에 대해, 두 수가 2의 거듭제곱차이가 되도록 일대일 대응할 수 있다.

증명 정수 1은 $2 \cdot 4^k+1$과 대응되며, 두 수의 차이는 $2 \cdot 4^k$이다. 마찬가지로 2, 3, ... , 4^k은 $2 \cdot 4^k+2$, $2 \cdot 4^k+3$, ... , $3 \cdot 4^k$과 각각 대응되며 각각 대응된 두 수의 차이는 $2 \cdot 4^k$이다. 즉 각각 대응된 두 수는 2의 거듭제곱 차이가 된다.□

정리 5 4-트리는 2-에지 번호매김이 가능하다.

증명 4-트리는 비단말노드 각각에 세 개의 단말노드가 연결되어 있다. 비단말노드를 부모노드라 하고 세 개의 단말노드를 L노드, M노드 그리고 R노드라 하자. 부모노드와 L노드, 부모노드와 M노드 그리고 부모노드와 R노드 사이에만 에지가 있다는 것은 당연하다. k-레벨 4-트리 QT_k는 크기가 각각 4^{k-1}씩인 부모노드그룹, L노드그룹, M노드그룹, R노드그룹으로 구성된다.

L노드그룹에는 정수 {1, 2, ... , 4^{k-1}}를 사용하고 부모노드그룹에는 정수 {$4^{k-1}+1$, $4^{k-1}+2$, ... , $2 \cdot 4^{k-1}$}를 사용하며 M노드그룹에는 정수 {$2 \cdot 4^{k-1}+1$, $2 \cdot 4^{k-1}+2$, ... , $3 \cdot 4^{k-1}$}를 사용하고 R노드그룹에는 정수 {$3 \cdot 4^{k-1}+1$, $3 \cdot 4^{k-1}+2$, ... , 4^k}를 사용하여 다음과 같이 2-에지 번호매김한다.

1과 n사이의 정수와 n+1과 $2n$사이의 정수에 대해, 두 수가 2의 거듭제곱차이가 되도록 일대일 대응할 수 있음은 [5]에서 밝혀졌다. 그러므로 부모노드그룹과 L

노드그룹, 부모노드그룹과 M노드그룹은 각각 2의 거듭제곱 차이가 되도록 일대일 대응할 수 있다. n이 4^k인 경우, 1과 n사이의 정수와 $2n$+1과 $3n$사이의 정수에 대해, 두 수가 2의 거듭제곱차이가 되도록 일대일 대응할 수 있음은 소정리 2에서 보였다. 그러므로 부모노드그룹과 R노드그룹은 2의 거듭제곱차이가 되도록 일대일 대응할 수 있다. 이와같은 대응은 k=1에서부터 연속적으로 적용함으로써 4-트리의 2-에지 번호매김을 얻을 수 있다. □

정리 5에 의하여 4-트리가 재귀원형군 $G(N, 2)$의 부그래프임을 알 수 있다. 이제 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보인다.

소정리 3 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 k-레벨 4-트리 QT_k을 스패닝 트리로 갖는다($k=m/2$).

증명 QT_k가 2-에지 번호매김이 가능함은 정리 2에서 보였다. 즉 QT_k는 재귀원형군 $G(N, 2)$의 부그래프이다. $k=m/2$인 k-레벨 4-트리 QT_k의 정점수는 2^m이다. 즉 $k=m/2$인 경우 QT_k는 $G(2^m, 2)$의 스패닝 부그래프이다. □

정리 6 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다.

증명 소정리 3에 의해 $G(2^m, 2)$는 정점수가 2^m인 임의의 QT_k ($k=m/2$)를 스패닝 트리로 가지고 있으므로 3-포트 통신모델에서 $G(2^m, 2)$의 방송시간은 QT_k의 방송시간과 같다. 즉 $b(v) = \lceil \log_4 2^m \rceil = k$이다. 재귀원형군 $G(2^m, 2)$는 노드-대칭적인 연결망이므로 임의의 정점에서 시작한 방송도 k시간에 완료할 수 있다. 그러므로 $G(2^m, 2)$는 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 갖는다. □

5. 결론

방송은 한 정점에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 정점들에게 보내는 과정을 말한다. 방송은 다양한 응용분야에서 가장 기본이 되는 작업이다. 방송전략이 효과적인가는 기반하는 통신모델에 달려있다. 특히 프로세서가 통신링크를 어떻게 사용할 수 있는가는 중요한 문제이다. 동시에 사용가능한 통신링크의 수에 따라서 단일포트 모델과 다중포트 모델로 나눌 수 있다.

본 논문에서는 다중포트 모델에서 한 프로세서가 인접한 두 개의 프로세서에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다고 제약조건을 가했을 때, 제시한 3-트리가 최소방송트리임을 보였고, 이를 이용하여 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 2-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보였다. 또한 한 프로세서가 인접한 세 개의 프로세서에게 동시에 메시지를 전송할 수 있다고 제약조건을 가했을 때, 제시한 4-트리가 최소방송트리임을 보였고, 이를 이용하여 재귀원형군 $G(2^m, 2)$가 3-포트 통신모델에서 최소방송시간을 가짐을 보였다.

앞으로 재귀원형군 $G(2^m, 2)$뿐만 아니라 더 넓은 범주의 재귀원형군 $G(N, d)$의 다중포트 모델에서 최소시간 방송에 대한 연구가 필요하리라 생각된다.

참고문헌

[1] J. Bruck, C.-T. Ho, S. Kipnis and D. Weathersby, "Efficient algorithms for all-to-all communications in multi-port message passing systems," *Sixth Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures*, Cape May, New Jersey, pp. 298-309, Jun, 1994.

[2] A. M. Farley, "Minimal broadcasting networks," *J. Networks*, vol. 9, pp. 313-332, 1979.

[3] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi and A. L. Liestman, "A survey of gossiping and broadcasting in communication networks," *Networks*, vol. 18, pp. 319-349, 1988.

[4] C.-T. Ho and M.-Y. Kao, "Optimal broadcast in all-port wormhole-routed hypercubes," *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, vol. 6, no. 2, pp. 200-204, Feb., 1995.

[5] H.-S. Lim, J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Embedding trees in recursive circulants," *Discrete Applied Mathematics*, 69, pp. 83-99, 1996.

[6] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants : A new topology for multicomputer networks," *Proc. Int. Symp. Parallel Architectures, Algorithms and Networks* ISPAN'94, Kanazawa, Japan, pp. 73-80, 1994.

[7] Y. Saad and M. Schultz, "Data communication in hypercubes," Research Report 428, Department of Computer Science, Yale University, 1985.

[8] P. Scheuermann and G. Wu, "Heuristic algorithms for broadcasing in point-to-point computer networks," *IEEE Trans. on Computers*, vol. 33, pp. 804-812, Sep, 1984.

[9] 김 상범, 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군 그래프의 고장지름," 한국정보과학회 추계학술 발표회 논문집, 제 19권, 제 2호, pp. 915-918, 1992.

[10] 최 정, 이 형옥, 임 형석, "완전삼진트리의 재귀원형군에 대한 임베딩," 한국정보과학회 춘계학술 발표회 논문집, 제 25권, 제 1호, pp. 688-690, 1998.