# 미사일 유도 시스템의 비례항법의 해에 관한 연구

## A study on the solution of proportional navigation in missile guidance system

김 경중, 권 철, 이희진, 박민용
연세 대학교 전자 공학과
서울시 서대문구 신촌동 134

E-mail: kkj@yeics.yonsei.ac.kr

PPN하에서 기동하는 목표물에 대한 목표물과 미사일간의 운동 방정식에 의사선형화(Quasilinearization)를 적용하여 해를 구할 때 의사선형화를 직접 적용하지 못하고 퍼터베이션(Perturbation) 정리를 적용한 후 의사선형화를 적용해야만 했다. 본 논문에서는 운동 방정식에 의사선형화 기법을 직접 적용할 수 있는 방법을 제안한다. 전투 기하를 변경시킨 후 미사일의 속도 벡터, 목표물의 속도 벡터와 이들의 상대 속도 벡터에 코사인 법칙을 적용하여 사이 각을 추정할 수 있다. 이렇게 추정한 사이 각을 이용하여 목표물의 기동을 나타낸다. 이 새로운 함수로 운동 방정식을 표현하면 의사선형화를 직접 적용할 수가 있다. 미사일과 목표물의 거리와 시선 변화율의 관계가 명확히 나타내지며, 목표물까지의 도달 시간이 구해진다.

### 1. 서론

PPN은 전투 기하(Engagement Geometry)를 표현한 식이 비선형이 심하기 때문에 명확한 해를 구할 수 없어 정성적인 분석[2]과 선형화 방법[5,6]이 쓰여 왔다. 하지만 이 선형화 방법에 의한 해는 전투 기하가 선형영역에서 많이 벗어날 경우 부정확해지기 때문에 기동 목표물에 대해서 적당하지가 않다.

최근 들어 Becker[1]에 의해 기동하지 않는 목표물에 대해서 복소 평면상에서 미로모픽(Meromorphic) 함수에 대한 Mittag-Leffler확장이론을 이용하여 해를 구하는 방법이 발표되었으며 나아가 랜덤하게 기동하는 목표물에 대한 명중조건에 관한 연구가 이루어졌지만 기동 목표물에 대한 완전한 형태의 PPN의 해가 아직 나오지 않았다. 또한 의사선형화 기법을[3][4] 적용하는 연구가 시도되었는데 경로 패러미터(Parameter)가 고려되는 한도 내에서는 꽤 정확한 결과를 보여준다.

본 논문에서는 기동 목표물에 대해서 의사선형화를 적용함에 있어 미사일과 목표물의 속도벡터 간의 사이 각을 이용하여 목표물의 기동을 나타냄으로써 운동 방정식을 새로운 변수로 표현하여 Shukla와 Mahapatra[3]가 이용한 퍼터베이션(Perturbation) 급수를 이용하지 않고 직접 의사선형화를 적용하여 해를 구한다.

### 2. 변경된 전투 기하를 이용한 PPN의 의사선형해

그림1과 같이 기동 목표물에 대한 일반적인 평면추적의 경우를 고려한다. 또한 정역학 만으로도 비선형성이 심해 다루기가 어려우므로 다른 물리적인 요소들은 고려하지 않기로 한다.

### 2.1 PPN에서의 운동방정식의 표현

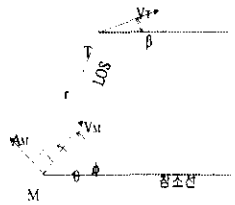


그림 1 미사일과
목표물간의 전투 기하

목표물의 속도 $V_T$와 미사일의 속도 $V_M$을 시선(LOS)에 수직인 속도와 평행인 속도로 분해하면 다음과 같은 운동 방정식(Motion Equation)을 얻을 수 있다.

$$\dot{r} = V_T\cos(\theta-\beta) - V_M\cos(\theta-\phi) \quad (1)$$

$$r\dot{\theta} = -V_T\sin(\theta-\beta) + V_M\sin(\theta-\phi) \quad (2)$$

이때 $\beta = kt$ 이고 $k = A_T/V_T$ 이다. $k$는 목표물의 회전율(Turn rate)을 나타낸다.

여기에서 PPN의 정의 즉,

$$\dot{\phi} = N\dot{\theta} \tag{3}$$

을 직분하면,

$$\phi = \phi_0 + N(\theta - \theta_0) \tag{4}$$

를 얻을 수 있고 위 식(4)를 재배치하면

$$\theta - \phi = (1-N)\theta - (\phi_0 - N\theta_0) = b\theta - c \tag{5}$$

식 (5)와 같이 얻을 수 있다. 이때 $b = 1-N$ , $c = \phi_0 - N\theta_0$ 이다.

식 (5)를 식 (1)과 (2)에 대입하면

$$\dot{r} = V_T\cos(\theta-\beta) - V_M\cos(b\theta - c) \tag{6}$$

$$r\dot{\theta} = -V_T\sin(\theta-\beta) + V_M\sin(b\theta - c) \tag{7}$$

식 (6), (7)과 같이 얻을 수 있다.

### 2.2 변경된 전투 기하를 이용한 운동방정식의 표현

미사일의 속도 벡터와 목표물의 속도 벡터 사이의 각을 이 두 속도 벡터와 상대속도 벡터간의 상호관계를 이용하여 추정할 수 있으며 이 각을 이용하여 목표물의 기동, 즉 $\beta$를 추정할 수 있다. 그림2와 같이 전투 기하를 변경시켜 식(6)과 (7)의 $\beta$항을 시간 함수가 포함되지 않은 식으로 표현할 수 있다. 그림 2에서 속도벡터 $V_M$과 $V_T$가 이루는 각을 $\gamma$라 하면, $\gamma$는 식(8),(9)과 같이 $\phi$와 $\beta$로써 표현할 수 있다.

$$\gamma = \phi - \beta \tag{8}$$

$$\theta - \beta = \theta - \phi + \gamma \tag{9}$$

의 식을 이끌어낼 수 있고 이 식은 식 (5)를 적용해 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

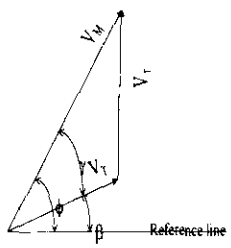


그림 2 변경된 전투 기하

$$\theta - \beta = b\theta - c + \gamma \tag{10}$$

여기에서 다시 그림2의 전투 기하에 코사인 법칙(Law of Cosine)을 적용하여 $\gamma$에 대한 식으로 나타내면 식(11)과 같이 표현된다.

$$\gamma = \arccos\left[\frac{V_M^2 + V_T^2 - V_r^2}{2V_M V_T}\right] \tag{11}$$

그러면 식(6),(7)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{r} = V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c) \tag{12}$$

$$r\dot{\theta} = -V_T\sin(b\theta - c + \gamma) + V_M\sin(b\theta - c) \tag{13}$$

### 2.3 변경된 기하를 이용한 운동방정식의 의사선형 해

이제 이 방정식에 의사선형화를 적용하기로 한다. 먼저 함수 공간(Function Space)에서 테일러 급수 전개(Taylor Series Expansion)를 하여 확장한 다음 2차 이상의 항을 절단함으로써 의사선형화를 진행해 나간다

$$r\frac{d\theta_n}{dr} = g_{n-1} + h_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}) \tag{14}$$

$$\frac{dt_n}{dr} = d_{n-1} + e_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}) \tag{15}$$

식(12),(13)에 테일러 급수 확장을 하면 식(14),(15) 와 같이 되며 이 때

$$h_{n-1} = h(\theta_{n-1}) \triangleq \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{(n-1)} \tag{17}$$

$$g_{n-1} \triangleq g(\theta_{n-1}) \tag{18}$$

$$e_{n-1} = e(\theta_{n-1}) \triangleq \left.\frac{\partial d}{\partial \theta}\right|_{(n-1)} \tag{19}$$

$$d_{n-1} \triangleq d(\theta_{n-1}) \tag{20}$$

으로 정의된다.

여기에서 $d(\theta)$, $e(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c)} = d(\theta) \tag{21}$$

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{-V_T\sin(b\theta - c + \gamma) + V_M\sin(b\theta - c)}{V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c)} = g(\theta) \tag{22}$$

$$e(\theta) = \frac{\partial d(\theta)}{\partial \theta} = \frac{b\{V_T\sin(b\theta - c + \gamma) - V_M\sin(b\theta - c)\}}{\{V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c)\}^2} + \gamma' \frac{V_T\sin(b\theta - c + \gamma)}{\{V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c)\}^2} \tag{23}$$

$$h(\theta) = \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{bV_r^2}{\{V_T\cos(b\theta - c + \gamma) - V_M\cos(b\theta - c)\}^2}$$

$$-\frac{\gamma'}{2}\frac{V_T^2-V_M^2+V_r^2}{\{V_T\cos(b\theta-c+\gamma)-V_M\cos(b\theta-c)\}^2} \tag{24}$$

위 식 (23), (24)에서 변수 $\gamma$의 $\theta$에 관한 미분은 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma'=\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{d\gamma}{dt}/\frac{d\theta}{dt}=\dot{\gamma}/\dot{\theta} \tag{25}$$

$$\dot{\gamma}=-\frac{V_r\dot{V}_r}{V_MV_T\sqrt{1-\left[\frac{V_M^2+V_T^2-V_r^2}{2V_MV_T}\right]^2}} \tag{26}$$

그러므로 $\gamma'$을 다시 쓰면

$$\gamma'=-\frac{V_r\dot{V}_r}{\dot{\theta}V_MV_T\sqrt{1-\left[\frac{V_M^2+V_T^2-V_r^2}{2V_MV_T}\right]^2}} \tag{27}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

의사선형화에 적용하기 위해 초기 값들을 구하면 다음과 같다.

$$\gamma_i=\arccos\left[\frac{V_M^2+V_T^2-V_{ri}^2}{2V_MV_T}\right] \tag{28}$$

$$\gamma'_i=-\frac{V_{ri}\dot{V}_{ri}}{\dot{\theta}_iV_MV_T\sqrt{1-\left[\frac{V_M^2+V_T^2-V_{ri}^2}{2V_MV_T}\right]^2}} \tag{29}$$

또한 $\theta_0(r)$에 대한 초기 근사화가 필요한데 이 값을 초기 LOS 각 $\theta_i$로 선택함으로써 분석적 표현에 단순화를 가져오게 된다. 즉,

$$\theta_0(r)=\theta_i \tag{30}$$

다음으로, 식 (21-24), (28-30)를 이용하여 다음 상수들을 정의한다.

$$D_0=-\frac{1}{V_{riL}} \tag{31}$$

$$E_0=-\frac{br_i\dot{\theta}_i}{V_{riL}^2}+\gamma'\frac{V_T\sin(b\theta_i-c+\gamma_i)}{V_{riL}^2} \tag{32}$$

$$G_0=-\frac{r_i\dot{\theta}_i}{V_{riL}} \tag{33}$$

$$H_0=-\frac{bV_{ri}^2}{V_{riL}^2}-\frac{\gamma_i'}{2}\frac{V_T^2-V_M^2+V_{ri}^2}{V_{riL}^2} \tag{34}$$

위 식 (31), (32), (33), (34)에서 $V_r$은 상대속도이고 $V_{ri}$는 그 초기 치이며, $V_{riL}$은 LOS성분의 상대속도로써 $V_{riL}=-\dot{r}$ 이고 $V_{riL}$은 그 초기 치이다.

위에서 정의한 4개의 상수를 식 (15), (16)에 대입하면 $n=1$ 에 대해서 다음과 같은 상계수 미분 방정식이 얻어진다.

$$r\frac{d\theta_1}{dr}=G_0+H_0(\theta_1-\theta_i) \tag{35}$$

$$\frac{dt_1}{dr}=D_0+E_0(\theta_1-\theta_i) \tag{36}$$

식 (35), (36)의 방정식은 $\theta_1(r_i)=\theta_i$ , $t_1(r_i)=0$ 의 초기조건에 따른다.

식 (35)로부터 $\theta_1$에 대한 해가 다음과 같이 얻어진다.

$$\theta_1=\theta_i+\frac{G_0}{H_0}\left(\left(\frac{r}{r_i}\right)^{H_0}-1\right) \tag{37}$$

그리고 식(36)을 식(35)에 대입한 후 적분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$t_1=r_i\left[\left(D_0-\frac{E_0G_0}{H_0}\right)\left(\frac{r}{r_i}-1\right)+\frac{E_0G_0}{H_0(H_0+1)}\left(\left(\frac{r}{r_i}\right)^{H_0+1}-\right)\right] \tag{38}$$

이상에서 보인바와 같이 $\theta$를 r에 대한 함수로 명확히 나타낼 수 있을 뿐 아니라 역으로 r을 $\theta$의 함수로 나타낸 수 있어 r에 따른 $\theta$의 반응을 알 수 있음은 물론이고 $\theta$의 변화에 른 r의 반응을 알 수 있다. 또한 어떠한 비행상수 N의 값에 대해서도 t를 명확히 표현할 수가 있다.

이상에서 얻은 식을 이용하여 미사일의 속도벡터에 수직인 측면 가속도 $A_M$을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A_M=NV_M(d\theta/dr)/(dt/dr) \tag{39}$$

최종적으로 식(41)과 같은 결과가 된다.

$$A_M=\frac{NV_MV_{riL}}{r_i}\frac{r_i\dot{\theta}_i}{V_{riL}}\left(\frac{r}{r_i}\right)^{H_0-1} \tag{40}$$

### 3. 기존 방법에 의한 의사선형 해와의 비교

구한 해가 기동하지 않는 목표물에 대해서도 유효함을 보이며 기존의 퍼터베이션 정리를 이용한 해와 비교하도록 한다.

#### 3.1 기동하지 않는 목표물에 대한 해의 비교

기동하지 않는 목표물의 경우 $A_T=0$ 이므로 이 때 $\beta=0$ 이 된다.

식 (8)에 $\beta=0$ 을 대입하면

$$\gamma=\phi \tag{41}$$

$$\gamma'=\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta}}=\frac{N\dot{\theta}}{\dot{\theta}}=N \tag{42}$$

이 되고 $\phi = N\theta + c$ 이므로 식 (9)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$b\theta - c + \gamma = b\theta - c + \phi = (1-N)\theta - c + \phi = \theta$$

$\gamma' = N$ 을 식(4-27)의 $h(\theta)$에 대입하면

$$h(\theta) = \frac{-V_T^2 - bV_M^2 + (1+b)V_T V_M \cos(N\theta + c)}{(V_T \cos(\theta) - V_M \cos(b\theta - c))^2} \quad (43)$$

와 같이 된다. 이는 [4]에서 구한 식과 동일하다. 이로써 $A_T = 0$ 이면 기동하지 않는 목표물의 경우에 대한 해가 구해지는 것을 알 수 있다.

그림 5-2와 5-3은 $\theta$와 $r$의 관계를 나타내고 있다. 목표물의 속도 $V_T = 300$ m/s, 미사일의 속도 $V_M = 900$ m/s, 미사일과 목표물간의 초기 거리 $r_i = 5000$ m로 한다.

### 3.2 기동 목표물에 대한 해의 비교

그림 3 ~그림 8은 기동하는 목표물에 대한 결과를 나타내고 있다. 그림 3~그림 5은 전투 기하가 꼬리물기, 즉 선형에 가까울 때를 나타내고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 선형에 가까울 때는 Shukla의 결과가 제안된 방법에 의한 결과보다 더 정확한 값에 가깝지만 제안된 방법에 의한 결과 역시 정확한 값과 차이가 크지 않음을 볼 수 있다.

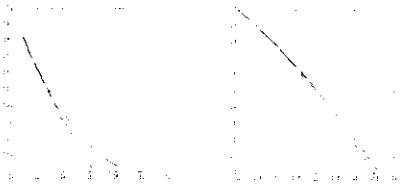

그림 3 N=2, $\theta_i = 20$, $\phi_i = 10$, $A_T = 1$g



그림 4 N=3, $\theta_i = 20$, $\phi_i = 10$, $A_T = 1$g

(—: 정확한 해의 결과, - - : Shukla의 결과, —·—: 제안된 방법에 의한 결과)

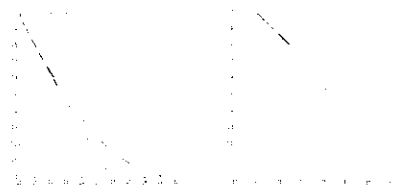

그림 5 N=3, $\theta_i = 20$, $\phi_i = 10$, $A_T = 2$g



그림 6 N=2, $\theta_i = 60$, $\phi_i = 15$, $A_T = 1$g

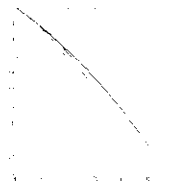

그림 7 N=2, $\theta_i = 60$, $\phi_i = 15$, $A_T = 2$g

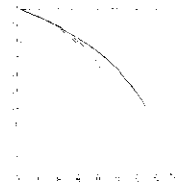

그림 8 N=3, $\theta_i = 60$, $\phi_i = 15$, $A_T = 2$g

그림 6~그림 8은 전투 기하가 선형에서 멀어질 때의 결과를 보여주고 있다.

### 4.결론

이상에서 살펴본 바와 같이 제안된 방법은 전투 기하가 선형에 가깝고 목표물의 기동이 크지 않을 때는 Shukla에 의한 결과에 비해 정확한 값에 더 근접 하다고 말할 수 없지만 큰 차이를 보이지 않으며 기동이 크고 전투 기하가 선형에서 많이 벗어난 목표물의 경우에는 제안된 방법에 의한 해가 정확한 값에 더 가까움을 알 수 있다. 기동이 크고 선형에서 많이 벗어난 경우 제안된 방법을 활용한다면 분석할 때 좀 더 실제 경로행동 등에 가깝게 해석할 수 있을 것이다.

### 5.참고문헌

[1] Becker, K., "Closed-Form Solution of Pure Proportional Navigation", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, 3,

[2] Guelman, M., "A qualitative study of proportional navigation", *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-7, 4, 1971, 337-343

[3] Mahapatra, P. R., Shukla, U. S., "Accurate Solution of Proportional Navigation for Maneuvering Targets", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol.25, 1, 1989, pp.81-89

[4] Shukla, U. S., Mahapatra, P. R., "Generalized Linear Solution of Proportional navigation", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol.24, 3, 1988, pp.231-238
1, 337-343

[5] Locke, A. S., *Guidance*, Princeton, NJ: Van Nostrand, 1956

[6] Jerger, J. J., *systems Preliminary Design*, Princeton, NJ: Van Nostrand, 1960