

안정한 신경회로망 제어기에 대한 연구

김은태, 손홍엽, 이희진*, 박민용

연세 대학교 전자공학과
 안성산업대학교 제어계측 공학과 *

Abstract

In this paper, a sufficient condition to guarantee the stability of a class of discrete-time neural network control systems is proposed. A stability criterion of neural network control systems is derived based on Lyapunov's direct method. The derived sufficient condition guarantees the stability of the resulting trained closed system.

1. 서 론

지난 수십 년간 신경망은 여러 분야에서 많은 관심을 끌었고 공학 및 과학분야에서 가장 유망한 분야 중에 하나가 되었다. 이에 따라 제어 분야에도 신경망은 널리 사용되어 이에 대한 연구도 널리 진행되었고 안정성을 만족하는 신경망 제어기의 설계에 대한 많은 주목할 만한 연구 결과가 발표되었다 [1, 2]. 이들 방식의 기본적인 접근 방식은 신경망의 일반 근사력 (universal approximation capability)를 이용하여 플랜트의 특성을 제거하고 나머지를 적응제어나 슬라이딩 제어로 접근하는 방식이다[3-5]. 이들은 신경망의 설계에 모두 적응 알고리즘에 근거한 방법을 사용하므로 신경망 제어기의 설계 방법론을 제시하여 주지는 하지만 어떤 플랜트가 어떤 신경망 제어기와 폐루프를 형성할 때 전체 시스템이 안정할 것인가에 대한 조건을 제시하여 주지는 않는다. 본 논문에서는 기존의 이론들과 달리 비적응 신경망 제어기를 이용하여 특정 플랜트와 폐루프를 형

성할 때 안정 조건을 제안한다. 제안된 조건은 신경망 제어기의 연결강도 (synaptic weight)에 대한 조건으로 나타나게 된다.

2. 문제의 구성

제어의 영역에서 여러 형태의 전방향 신경망에 대한 연구가 널리 진행되고 있고 그 대표적인 예가 다층 신경망(MLP), 레이디얼 기저 함수와 두뇌 모델 제어기 등이 있다. 본 논문에서는 이산시간 다층 신경망을 이용하며 이 구조는 그림 1과 같다.

본 논문에서 사용되는 다층 신경망은 입력층 1층, 비선형 은닉층 1층, 선형 출력층 1층의 3층으로 구성된 것으로 하여 활성화 함수는 다음의 식으로 표현된다.

$$\sigma(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (1)$$

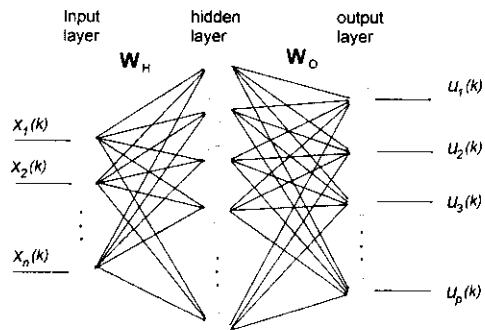


Fig. 1. The multilayer perceptron (MLP) neural-network controller

이들 경우에서 $\sigma(\cdot)$ 는 다음의 두가지 조건을 만족한다.

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = \sigma'(x) = 1 - \sigma^2(x) \quad (2)$$

$$0 \leq \sigma(h)\sigma(h) \leq \sigma(h)h \leq h^2 \text{ and } \sigma(0)=0 \quad (3)$$

신경망 제어기의 특성은 다음의 입출력 행렬 방정식으로 표현될 수 있다.

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{NN}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{W}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}(k)) \quad (4)$$

$$\mathbf{h}(k) = \mathbf{net}^H(k) = \mathbf{W}_H \mathbf{x}(k) \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{x}(k)$ ($n \times 1$)는 상태벡터이고 $\mathbf{u}(k)$ ($p \times 1$)는 제어벡터이다. 그림 1에서 $\mathbf{W}_H = (w_{ji}^H)$ ($m \times n$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$)는 입력층과 은닉층사이를 연결하는 연결강도(synaptic weight)행렬이고 $\mathbf{W}_0 = (w_{ij}^0)$ ($p \times m$)는 은닉층과 출력층을 연결하는 연결강도 행렬이다. 또

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}) \equiv (\sigma(h_1), \sigma(h_2), \dots, \sigma(h_m)) \quad (6)$$

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)^T;$$

$$(i=1, \dots, n, j=1, \dots, m)$$

식 (3)에서 다음의 성질이 성립한다.

$$0 \leq \boldsymbol{\Sigma}^T(\mathbf{h}) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}) \leq \boldsymbol{\Sigma}^T(\mathbf{h}) \mathbf{h} \leq \mathbf{h}^T \mathbf{h} \quad (7)$$

$$\text{여기서 } \mathbf{h} = \mathbf{W}_H \mathbf{x}.$$

본 논문에서는 평형점 주위의 안정도를 다루며 플랜트는 식 (8)의 선형 플랜트를 생각한다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (8)$$

따라서 플랜트와 신경망 제어기로 구성된 폐루프의 시스템은 다음의 식으로 표현된다.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{NN}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{W}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{W}_H \mathbf{x}(k)) \quad (10)$$

3. 신경회로망의 안정 조건

정리 1.

다음의 조건을 만족하는 0이 아닌 $\xi \neq 0$ 가 존재한다고 가정한다.

$$-\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + \gamma \xi^2 + (\mu + \gamma \frac{1}{\xi^2}) \rho < 0 \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$

$$\gamma \equiv \|\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_0\| = \gamma(\mathbf{W}_0) \quad (12)$$

$$\mu \equiv \lambda_{\max}(\mathbf{W}_0^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_0) \quad (13)$$

$$\rho \equiv \lambda_{\max}(\mathbf{W}_H^T \mathbf{W}_H) = \|\mathbf{W}_H\|^2 \quad (14)$$

이 경우 식 (9)의 플랜트와 식 (10)의 신경망 제어기를 구성되는 신경망 제어 시스템은 평형점 주위에서 전역적으로 점근 안정하다.

(증명)

\mathbf{A} 를 이산적 Hurwitz 행렬로 가정하면 어떤 양의 반한정 행렬 \mathbf{Q} 에 대하여 다음의 부등식을 만족하는 양의 한정 행렬 \mathbf{P} 가 존재한다.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

이제 다음의 $V(k)$ 을 리아프노프 후보함수로 채택한다. $V(k) = \mathbf{x}^T(k) \mathbf{P} \mathbf{x}(k)$

이 경우, $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(k) + \\ &\quad \mathbf{u}^T(k) (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{u}(k) + 2 \mathbf{u}^T(k) (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x}(k) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}(k)\|^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \boldsymbol{\Sigma}^T(\mathbf{h}(k)) \mathbf{W}_0^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}(k)) + \\ &\quad 2 \mathbf{x}^T(k) (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{W}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}(k)) \end{aligned}$$

정리하면

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \\ &\quad \lambda_{\max}(\mathbf{W}_0^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_0) \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 + \\ &\quad 2 \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{W}_0 \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \\ &\quad \lambda_{\max}(\mathbf{W}_0^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_0) \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 + \\ &\quad + 2 \|(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}) \mathbf{W}_0\| \|\mathbf{x}\| \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\| \end{aligned}$$

다음을 이용한다:

$$\begin{aligned} &\gamma \|\mathbf{x}\| \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\| \\ &= \gamma \left(\|\mathbf{x}\| \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\| - \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{2\xi^2} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2\xi^2} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \right) \\ &= \gamma \left\{ -\frac{1}{2} \left(\xi \|\mathbf{x}\| - \frac{1}{\xi} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\| \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2\xi^2} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \} \text{ 여기서 } \xi \neq 0, \\
 \text{이 경우} \\
 & \Delta V(k) \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \\
 & + 2\gamma \left\{ -\frac{1}{2} \left(\xi \|\mathbf{x}\| - \frac{1}{\xi} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\| \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\xi^2}{2} \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{1}{2\xi^2} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \right\} \\
 & \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) \|\mathbf{x}\|^2 + \mu \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 \\
 & \quad + \gamma \xi^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{\gamma}{\xi^2} \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2. \tag{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{또 } \|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h})\|^2 = \boldsymbol{\Sigma}^T(\mathbf{h}) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{h}) \\
 & \leq \mathbf{h}^T \mathbf{h} = \mathbf{x}^T \mathbf{W}_H^T \mathbf{W}_H \mathbf{x} \tag{16} \\
 & \leq \lambda_{\max}(\mathbf{W}_H^T \mathbf{W}_H) \|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{W}_H\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 = \rho \|\mathbf{x}\|^2 \\
 \text{정리하면} \\
 & \Delta V(k) \leq \left\{ -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + \gamma \xi^2 + \left(\mu + \gamma \frac{1}{\xi^2} \right) \rho \right\} \|\mathbf{x}\|^2 \tag{17}
 \end{aligned}$$

4. 모의실험

본장에서는 제안한 안정조건의 실효성을 모의 실험을 통하여 확인한다. 제어 대상은 Electrocraft Corporation의 E530 motor로 한다.

$$\begin{pmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{pmatrix} e_a(t)$$

i_a (armature current.)

ω_m (rotor angular velocity)

e_a (armature voltage)

K_i (torque constant) = 10.02 oz-in./A

K_b (back-emf constant)

$$= 7.41\text{V}/1000 \text{ rpm} = 0.0708 \text{ V/rad/s}$$

R_a (armature resistance) = 3.64 Ω

L_a (armature inductance) = 3.39 mH

B_m (viscous-friction coefficient)

$$= 0.1 \text{ oz-in./1000rpm} = 9.55 \times 10^{-4} \text{ oz-in./rad/s}$$

J_m (rotor inertia of motor) = 0.0038 oz-in.-s²

0.005로 샘플링할 때 플랜트의 이산형은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} i_a(k+1) \\ \omega_m(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0362 & -0.0164 \\ 2.0654 & 0.8047 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_a(k) \\ \omega_m(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2313 \\ 2.7428 \end{pmatrix} e_a(k)$$

입력 노드 2, 출력 노드 1, 중간 노드 10개의 신경망에서 역진과 알고리즘을 이용하여 웨이트를 다음과 같이 결정한다.

$$\mathbf{W}_H = \begin{pmatrix} -0.0269 & -0.0165 \\ -0.0828 & -0.0255 \\ -0.0837 & -0.0258 \\ -0.1060 & -0.0313 \\ -0.0617 & 0.0332 \\ -0.0433 & 0.0031 \\ -0.0355 & 0.0166 \\ -0.0708 & -0.0445 \\ -0.0380 & 0.0199 \\ -0.0573 & -0.0357 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{W}_O^T = \begin{pmatrix} 0.0067 \\ 0.0205 \\ 0.0251 \\ 0.0304 \\ 0.0109 \\ 0.0109 \\ 0.0080 \\ 0.0235 \\ 0.0048 \\ 0.0166 \end{pmatrix}$$

이제 안정도를 보장하기 위하여 제안한 알고리즘을 사용한다.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{로 하면}$$

$$\gamma \equiv \|\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_O\| = \gamma(\mathbf{W}_O) = 0.9569$$

$$\mu \equiv \lambda_{\max}(\mathbf{W}_O^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{W}_O) = 0.0787$$

$$\rho \equiv \lambda_{\max}(\mathbf{W}_H^T \mathbf{W}_H) = 0.0450$$

$$\xi = 0.4606 \neq 0$$

$$-\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) + \gamma \xi^2 + \left(\mu + \gamma \frac{1}{\xi^2} \right) \rho = -0.5904 < 0$$

정리에 의해 제안된 신경망을 주어진 플랜트를 안정화한다. 다음 그림 1은 응답을 보여준다.

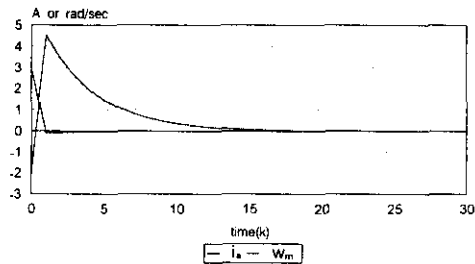


그림 1. 신경망 응답
($i_a(0) = 3$ and $\omega_m(0) = -2$)

5. CONCLUSION

본 논문에서는 신경회로망을 포함한 시스템의 안정도에 대한 충분 조건을 유도하였다. 제안된 안정 조건을 이용하여 신경망을 이용한 직류모터 제어의 안정도를 보장하였다.

참고문헌

- [1] W. T. Miller, R. S. Sutton and P. J. Werbos, Ed., *Neural Networks for Control*, Cambridge, MA:MIT Press, 1990.
- [2] K. J. Hunt, D. Sbarbaro, R. Zbikowski and P. J. Gawthrop, "Neural networks for control systems - A survey," *Automatica*, vol. 28, no. 6, pp. 1083-1112, 1992.
- [3] R. M. Sanner and J. J. E. Slotine, "Gaussian network for direct adaptive control," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, no. 6, pp. 837-863, 1992.
- [4] K. S. Narendra, "Adaptive of nonlinear multivariable systems using neural network," *Neural Networks*, vol. 7, pp. 737-752, 1994.
- [5] M. M. Polycarpou, "Stable adaptive, neural control scheme for nonlinear systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 447-451, 1996.