

혼돈 비선형 시스템을 위한 안정된 퍼지 제어기의 설계

최종태* 박진배** 최윤호*

* 경기대학교 전자공학과

** 연세대학교 전기공학과

The Design of Stable Fuzzy Controller for Chaotic Nonlinear Systems

Jong Tae Choi* Jin Bae Park** Yoon Ho Choi*

* Department of Electronic Engineering, Kyonggi University

** Department of Electrical Engineering, Yonsei University

E-mail : jtchoi@kuic.kyonggi.ac.kr

Abstract : This paper is to design stable fuzzy controller so as to control chaotic nonlinear systems effectively via fuzzy control system and Parallel Distributed Compensation (PDC) design. To design fuzzy control system, nonlinear systems are represented by Takagi-Sugeno(TS) fuzzy models. The PDC is employed to design fuzzy controllers from the TS fuzzy models. The stability analysis and control design problems is to find a common Lyapunov function for a set of linear matrix inequality(LMIs). The designed fuzzy controller is applied to Rössler system. The simulation results show the effectiveness of our controller.

1. 서론

1970년대에 비선형 결정론적(deterministic) 법칙에 의한 결과로서 혼돈(chaos) 현상이 처음으로 인식되기 시작하면서 혼돈 현상의 해석에 관한 연구가 수행되었고[1], 1990년대 초에 이르러 혼돈 제어에 관한 연구 결과들이 발표되면서부터 혼돈 현상의 제어가 가능함이 밝혀졌다.

비선형 결정론적 규칙에 지배되는 혼돈 현상은 특히 초기치에 매우 민감한 성질을 가지며 외부적으로 예측 불가능하고 불규칙한 동태를 보인다. 특히 지금까지

산업계에서 예측 불가능하여 외란이나 잡음으로 간주되던 신호들이 혼돈 특성을 갖는 신호로 밝혀졌으며 [2], 안정한 시스템 동작을 위해 혼돈 현상의 제거 및 억제를 위한 혼돈 제어 방법에 관한 연구들이 현재 활발히 진행되고 있다[3]. 특히 혼돈 비선형 시스템의 지능 제어 관점에서 신경 회로망이나 퍼지 이론을 통한 제어기 설계 방법에 관한 연구가 수행되고 있으며, 이에 대한 성공적인 적용 사례도 다수 있다[4][5]. 한편 안정도 해석과 계통적인 설계는 확실히 퍼지 제어 시스템을 위한 중요한 문제들 중에 하나이며, 최근에 이들 문제들에 관한 많은 연구들이 진행되고 있다[6][7].

따라서 본 논문은 혼돈 비선형 시스템의 효율적인 제어를 위한 비선형 퍼지 제어 시스템과 안정된 제어기를 설계하고자 한다. 또한 설계된 퍼지 제어기를 대표적인 혼돈 비선형 시스템인 Rössler 시스템에 직접 적용하여 얻어진 결과를 통해 설계된 제어기의 성능을 검증하고자 한다.

2. 혼돈 비선형 시스템과 퍼지 추론 시스템

2.1 혼돈 비선형 시스템

지금까지 알려진 대표적인 혼돈 비선형 시스템 모델들은 연속 시간 시스템과 이산 시간 시스템으로 나눌 수 있으며, 연속 시간 혼돈 시스템에는 Duffing 방정식, Lorenz 방정식, Bonhoeffer-van der Pol 방정식,

Rössler 방정식 등이 있고 이산 시간 혼돈 시스템에는 Henon 방정식, Lozi 방정식, Logistic map 등이 있다.

본 논문에서는 대표적인 연속 시간 혼돈 시스템 Rössler 방정식을 제어 대상 시스템으로 선정한다.

Rössler 방정식은 식 (1)과 같은 상태 방정식으로 표현될 수 있다[8].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz \end{aligned} \quad (1)$$

Rössler 방정식은 다음과 같은 파라미터와 초기값에 대해 그림 1과 같은 혼돈 현상을 보인다.

$$\begin{aligned} a &= 0.2 & b &= 0.2 & c &= 5.7 \\ x_0 &= -4 & y_0 &= -5 & z_0 &= 0 \end{aligned}$$

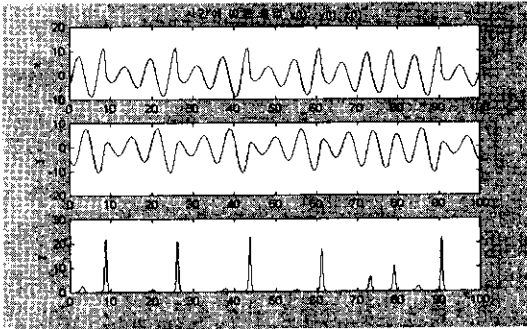


그림 1 시간 응답 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$
Fig. 1 Time response $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

2.2 퍼지 추론 시스템

본 논문에서 사용되는 퍼지 추론 시스템은 식 (2)와 같은 형태를 갖는 Takagi-Sugeno(TS) 퍼지 모델이다. TS 퍼지 모델의 주된 특징은 각각의 퍼지 규칙들이 선형 시스템 모델의 국부적인(local) 운동으로 표현되며, 시스템의 전체 퍼지 모델은 각 선형 퍼지 모델의 퍼지 결합으로 구성된다.

Rule i : IF $x_1(t)$ is M_{i1} ... and $x_n(t)$ is M_{in}
THEN $\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)$ (2)

여기서,

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)],$$

$$\mathbf{u}^T(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)],$$

x_j 와 M_{ij} ($i=1, 2, \dots, r$, $j=1, 2, \dots, n$)는 각각 전건부 변수와 퍼지 집합, r 은 IF-THEN 규칙의 개수이다.

TS 퍼지 모델의 일반적인 추론 방법에 의해 전체 퍼지 시스템의 최종 출력은 식 (3)과 같이 추론된다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) \{A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \quad (3)$$

여기서 하중 함수(weight function) $w_i(t) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t))$

이고, $M_{ij}(x_j(t))$ 는 퍼지 집합 M_{ij} 에서 $x_j(t)$ 의 소속 정도이다.

따라서 식 (3)의 개루프 시스템은 식 (4)의 형태를 갖는다.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) A_i \mathbf{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \quad (4)$$

2.3 선형 행렬 부등식(LMI)을 사용한 안정도 해석

개루프 시스템 (4)의 안정도를 위한 충분 조건은 다음과 같이 주어진다.

정리 1 : 식 (5)를 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재하면 퍼지 시스템 (4)는 점근 안정하다.

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i=1, 2, \dots, r \quad (5)$$

정리 1은 선형 행렬 부등식(LMI) 문제로 표현될 수 있으며[9], 안정도를 판별하기 위해 LMI를 만족하는 P 를 구하는 것이 필요하다. 이것은 다음과 같은 convex 최적화 문제로 쉽게 풀어질 수 있다.

$$P > 0, \quad A_i^T P + P A_i < 0, \quad i=1, 2, \dots, r$$

3. LMI를 사용한 퍼지 제어기 설계

본 절에서는 TS 퍼지 모델로 표현된 혼돈 비선형 시스템에 대한 퍼지 제어기 설계 문제를 선형 행렬 부등식(LMI)을 이용하여 풀고자 한다.

본 논문에서는 모델 기반 퍼지 제어기 설계를 위해 병렬 분배 보상(Parallel Distributed Compensation: PDC)을 이용하며[10], 제어기 설계 과정은 퍼지 시스템 규칙들을 보상하기 위한 각각의 제어 규칙을 유도하는 것이다. 결과적으로 전체 퍼지 제어기는 각 선형 제어기의 퍼지 결합이다.

퍼지 제어기는 퍼지 시스템 식 (3)과 동일한 퍼지 집합으로 분할된다.

Rule i : IF $x_1(t)$ is M_{i1} ... and $x_n(t)$ is M_{in}
THEN $\mathbf{u}(t) = -F_i \mathbf{x}(t)$

여기서 $i=1, 2, \dots, r$ 이고, 퍼지 추론에 의한 퍼지 제어기는 식 (6)의 형태를 갖는다.

$$u(t) = \frac{-\sum_i w_i(t) F_i x(t)}{\sum_i w_i(t)} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (3)에 대입하면 식 (7)을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_i \sum_j w_i(t) w_j(t) [A_i - B_i F_j] x(t)}{\sum_i \sum_j w_i(t) w_j(t)} \quad (7)$$

식 (7)를 다시 정리하면 식 (8)과 같이 된다.

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{K} \left[\sum_i w_i(t) w_i(t) [A_i - B_i F_i] x(t) + \sum_{i < j} w_i(t) w_j(t) \left([A_i - B_i F_j] + [A_j - B_j F_i] \right) x(t) \right] \quad (8)$$

여기서 $K = \sum_i \sum_j w_i(t) w_j(t)$ 이다.

식 (8)을 정리 1에 적용하면 안정도를 위한 충분 조건을 얻는다.

정리 2 : 다음의 두 조건을 만족하는 일반적인 양한정 행렬 P 가 존재하면 퍼지 제어 시스템 (7)은 점근 안정하다.

$$[A_i - B_i F_i]^T P + P [A_i - B_i F_i] < 0, \quad (9)$$

$$[[A_i - B_i F_j] + [A_j - B_j F_i]]^T P + P [[A_i - B_j F_j] + [A_j - B_i F_i]] < 0 \quad i < j \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)을 다시 정리하면 식 (11)과 식 (12)와 같다.

$$A_i^T P - F_i^T B_i^T P + P A_i - P B_i F_i < 0, \quad (11)$$

$$A_i^T P - F_i^T B_i^T P + A_j^T P - F_j^T B_j^T P + P A_i - P B_j F_i + P A_j - P B_i F_j < 0 \quad i < j \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)에서 각 행렬의 우변과 좌변에 P^{-1} 를 곱하면 다음의 동등한 조건을 얻는다.

$$P^{-1} A_i^T - P^{-1} F_i^T B_i^T + A_i P^{-1} - B_i F_i P^{-1} < 0,$$

$$P^{-1} A_i^T - P^{-1} F_i^T B_i^T + P^{-1} A_j^T - P^{-1} F_j^T B_j^T + A_i P^{-1} - B_j F_i P^{-1} + A_j P^{-1} - B_i F_j P^{-1} < 0$$

LMI에서 이들 조건들을 계산하기 위해 $Q = P^{-1}$ 와 $W_i = F_i P^{-1}$ 를 정의하면 조건 (9)와 (10)으로부터 다음의 동등한 안정도 조건을 얻는다.

정리 3 : 다음의 LMI 조건을 만족하는 Q 와 W_i 가 존재하면 퍼지 제어 시스템 (7)은 안정하다.

$$Q A_i^T + A_i Q - B_i W_i - W_i^T B_i^T < 0, \quad (13)$$

$$Q A_i^T + A_i Q + Q A_j^T + A_j Q - B_i W_i - W_i^T B_i^T - B_j W_i - W_i^T B_j^T < 0, \quad i < j \quad (14)$$

4. 시뮬레이션 및 결과 고찰

본 절에서는 모의 실험을 통해 제안된 퍼지 모델링과 설계된 제어기에 의해 비선형 혼돈 시스템이 효과적으로 제어됨을 보인다.

4.1 Rössler 시스템의 퍼지 모델링

Rössler 시스템의 동적 특성은 식(1)과 같다. 식 (1)의 동적 특성을 퍼지 모델로 나타내기 위해 다음을 정의하면,

$$x = [x \ y \ z]^T, \quad x \in [-d \ d]$$

다음의 퍼지 모델로 나타낼 수 있다.

Rule 1 : IF x is M_1 ,

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = A_1 x(t) + C$$

Rule 2 : IF x is M_2 ,

$$\text{THEN } \dot{x}(t) = A_2 x(t) + C$$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -d-c \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$, $d = 15$
퍼지 모델에 사용되는 소속 함수는 그림 2와 같다.

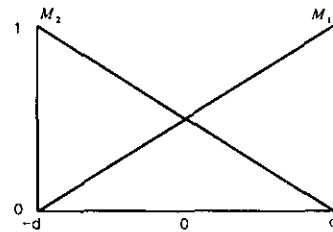


그림 2 퍼지 모델의 소속 함수
Fig. 2 Membership function of fuzzy model

그림에서 $M_1 = \frac{1}{2} + \frac{x}{2d}$, $M_2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{2d}$ 이다.

4.2 Rössler 시스템의 퍼지 제어

제어 입력을 갖는 Rössler 시스템은 식 (15)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z + u_1 \\ \dot{y} &= x + ay + u_2 \\ \dot{z} &= b + xz - cz + u_3 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)와 같은 Rössler 시스템을 퍼지 모델로 나타내면 다음과 같다.

Rule 1 : IF x is M_1 ,

THEN $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B u(t) + C$

Rule 2 : IF x is M_2 ,

THEN $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B u(t) + C$

여기서 행렬 B 는 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

본 논문에서는 퍼지 제어기를 설계하기 위해 PDC 방법을 적용하며 얻어진 결과는 다음과 같다.

Rule 1 : IF x is M_1 ,

THEN $\dot{u}(t) = -F_1 x(t)$

Rule 2 : IF x is M_2 ,

THEN $\dot{u}(t) = -F_2 x(t)$

결과적으로 전체 PDC 퍼지 제어기는 다음과 같다.

$$u = -w_1 F_1 x - w_2 F_2 x$$

F_1 과 F_2 를 구하기 위해 정리 3의 조건 (13)과 (14)를 이용하며, 이것은 LMI 알고리즘을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. LMI 알고리즘을 이용하여 계산된 Q 와 W_i 는 각각 다음과 같다.

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 47.1825 & 0 & 0 \\ 0 & 47.1825 & 0 \\ 0 & 0 & 47.1825 \end{bmatrix}$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 15.7275 & -129.9131 & 175.0391 \\ 129.9131 & 25.1640 & 3.6761 \\ -222.2216 & -3.6761 & 454.5251 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 15.7275 & 78.6801 & -23.5025 \\ -78.6801 & 25.1640 & 0.0000 \\ -23.6800 & 0.0000 & -960.9510 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = W_1 Q^{-1} = W_1 P = \begin{bmatrix} 0.3333 & -2.7534 & 3.7098 \\ 2.7534 & 0.5333 & 0.0779 \\ -4.7098 & -0.0779 & 9.6333 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = W_2 Q^{-1} = W_2 P = \begin{bmatrix} 0.3333 & 1.6676 & -0.4981 \\ -1.6676 & 0.5333 & 0.0000 \\ -0.5019 & 0.0000 & -20.3667 \end{bmatrix}$$

그림 3은 제어 입력이 적용되기 전과 후의 시간에 따른 응답을 나타낸 것이다. Rössler 시스템의 신호에 제어 입력을 인가했을 때 안정한 영역으로 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이때 제어 입력은 $t = 70$ 일 때 인가되었다.

5. 결론

본 논문에서는 퍼지 모델과 PDC 제어 설계에 기초하여 비선형 혼돈 시스템을 효과적으로 제어할 수 있는 비선형 퍼지 제어기를 설계하였다. 안정도 해석과 제

어 설계 문제는 선형 행렬 부등식(LMI) 문제로 나타낼 수 있으며, 또한 LMI 문제는 convex 최적화 문제로 쉽게 풀어질 수 있다. 설계된 퍼지 제어기를 연속 시간 혼돈 비선형 시스템인 Rössler 시스템에 적용하여 얻어진 시뮬레이션 결과로부터 안정한 영역으로 수렴하는 것을 확인하였다.

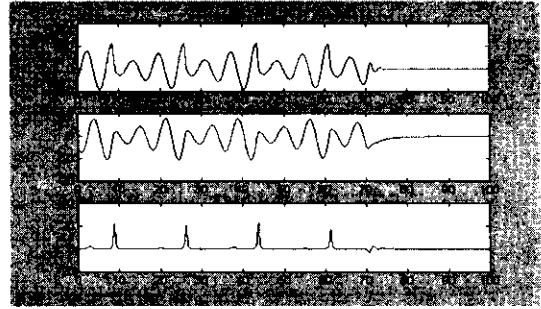


그림 3 Rössler 시스템의 시간 응답
Fig. 3 Time response of Rössler system

6. 참고 문헌

- [1] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing, Company, 1994.
- [2] L. A. Aguirre and S. A. Billings, "Validation Identified Nonlinear Models with Chaotic Systems", *Int. Jour. of Bifur. and Chaos*, vol. 4, no. 1, pp. 109-125, 1994.
- [3] H. K. Qammar, F. Mossayebi and T. T. Hartley, "Indirect Adaptive Control of a Chaotic Systems", *Chem. Eng. Comm.*, vol. 110, pp. 99-110, 1991.
- [4] 오기훈, 주진만, 박광성, 박진배, 최윤호, "신경 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 지능 제어에 관한 연구", *한국자동제어학술회의 논문집* vol. 1, pp. 453-456, 1996.
- [5] 오준섭, 최윤호, 박진배, "혼돈 비선형 시스템을 위한 퍼지 제어기의 설계에 관한 연구", *대한전자공학회 추계학술대회 논문집* vol. 20, No. 2, pp. 277-280, 1997.
- [6] K. Tanaka and M. Sugeno, "Stability Analysis and Design of Fuzzy Control System", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 45, no. 2, pp. 135-156, 1992.
- [7] K. Tanaka and M. Sano, "A Robust Stabilization Problem of Fuzzy Control Systems and Its Application to Backing up Control of a Truck-trailer", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 2, no. 2, pp. 119-134, 1994.
- [8] Rössler, O. E., "An Equation for Continuous Chaos", *Physical Review Letters*, vol. 57A, pp. 397-398, 1976.
- [9] S. Boyd et. al, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [10] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model", *Proc. FUZZ-IEEE/IFES'95*, pp. 531-538, 1995.