

Nakagami 페이딩 채널에서 수신신호 포락선의 pdf 를 이용한 비동기 통신 시스템의 성능 분석

임채현, 한영열

한양대학교 전자통신공학과

서울특별시 성동구 행당동 17

Performance Analysis of Non-coherent FSK,DPSK and ASK using the PDF of the Envelope of the Received Signal in Nakagami Fading Channel

Chae-Hun Im, Young-Yearl Han

Dept. of Elec. Comm. Eng, Hanyang University

17 Haengdang-Dong Sungdong-Gu, Seoul, 133-791, Korea

Abstract

In this paper we derive the pdf for the envelope of the received signal in Nakagami fading environment. Then, using this pdf we analyze the performance of Noncoherent FSK and DPSK in Nakagami fading channel. For ASK it is difficult to find the threshold value in Nakagami fading we confine our discussion in the special case of $m=1$, which is in Rayleigh fading.

1. 서론

이동통신 시스템에서 수신 신호는 페이딩, 세도잉 등을 겪고, 거리가 멀어짐에 따라서 전력이 감소하며 잡음에 의해서 왜곡된다. 이 때 페이딩은 신호가 다중 경로를 통해서 전파되고 이동국이 계속해서 이동하기 때문에 발생한다. 이러한 페이딩 채널을 모델링하기 위해서 여러 가지의 페이딩 모델이 제시 되어졌다. 그 중 나카가미 페이딩 모델은 페이딩 지수 m 을 변화 시킴으로써 Half-Gaussian 분포, 레일리 분포를 표현할 수 있고, 라이시안 분포에 매우 근사한 표현식등 여러 가지의 페이딩 모델을 표현할 수 있는 유용한 모델이며 [4], 도시 지역에서의 페이딩 채널에 가장 잘 부합되는 모델로 알려져 있다.

이 논문에서는 나카가미 페이딩 환경에서 수신 신호가 대역통과 필터를 통과한 후의 포락선에 대한 확률밀도 함수를 유도한다. 그리고 유도된 확률밀도 함수를 이용하여 나카가미 페이딩 환경에서 비동기 FSK, DPSK 그리고 비동기 ASK 의 오류 확률을 유도한다. 단, 비동기 ASK 에서는 문턱값에 대한 정확한 수식을 유도하기 어려우므로, 나카가미 페이딩의 특별한 경우인 $m=1$ 즉, 레일리 페이딩의 경우에 대하여 오류 확률을 유도 한다. 이 경우에는 문턱값이 정확한 수식으로 표현되므로 오류 확률도 정확한 수식으로 표현된다.

2. 수신신호 포락선의 pdf 유도

가산성 백색 가우시안 잡음이 포함된 수신 신호가 대역통과 필터를 통과한 후에는 다음과 같이 표현된다.

$$y(t) = A \cos \omega_c t + n_c \cos \omega_c t - n_s \sin \omega_c t$$

$$= \sqrt{(A + n_c)^2 + n_s^2} \cos(\omega_c t + \theta) = R \cos(\omega_c t + \theta) \quad (1)$$

여기서 n_c 와 n_s 는 서로 독립이고 평균이 0 이며 분산이 σ_n^2 인 가우시안 잡음이고, $x = A + n_c = R \cos \theta$ 이며 $y = n_s = R \sin \theta$ 이다.

나카가미 페이딩 채널에서 신호 성분의 진폭 A 에 대한 분포는 다음과 같다[4].

$$f(a) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m a^{2m-1} e^{-ma^2/\Omega}, \quad a \geq 0 \quad (2)$$

여기서 $\Omega = E[A^2], m = \Omega^2 / E[(A^2 - \Omega)^2] \geq 1/2$ 이다. $\Gamma(\cdot)$ 는 감마함수이고, m 은 페이딩의 정도를 나타내는 페이딩 지수이다. m 이 0.5 일 때는 Half-Gaussian 분포, m 이 1 일 때는 레일리 분포를 나타낸다. m 이 1 보다 작을 때는 레일리 페이딩보다 정도가 심한 페이딩을 나타내고, m 이 1 보다 커짐에 따라 페이딩이 점차 약해지는 상태를 나타내며, m 이 무한대일 때는 페이딩이 존재하지 않는 상태를 나타낸다.

A 와 n_c 는 서로 독립이므로 x 에 대한 밀도함수는 두 밀도함수의 컨벌루션이 된다.

$$f(x) = f(a) * f(n_c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)f(x-a)da \\ = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{e^{-x^2/2\sigma_n^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_0^{\infty} a^{2m-1} e^{-ka^2} e^{\frac{x}{\sigma_n^2}a} da \quad (3)$$

식 (3)에서 $k = (m/\Omega) + (1/2\sigma_n^2)$ 이다.

그리고, x 와 y 또한 서로 독립이므로 그 결합 밀도함수는 두 밀도함수의 곱이 된다.

$$f(x,y) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{e^{-(x^2+y^2)/2\sigma_n^2}}{2\pi\sigma_n^2} \int_0^{\infty} a^{2m-1} e^{-ka^2} e^{\frac{x}{\sigma_n^2}a} da \quad (4)$$

이제 x 와 y 에 대한 pdf를 변수변환을 통하여 r 과 θ 에 대한 pdf로 나타내면 다음식과 같다.

$$f(r,\theta) = \frac{2r}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{e^{-r^2/2\sigma_n^2}}{2\pi\sigma_n^2} \int_0^{\pi} a^{2m-1} e^{-ka^2} e^{\frac{r \cos\theta}{\sigma_n^2}a} da \quad (5)$$

그리고 위의 식을 θ 의 전 구간에 대하여 적분하면 포락선 R 에 대한 pdf가 구해진다.

$$f(r) = \frac{2r}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{e^{-r^2/2\sigma_n^2}}{2\pi\sigma_n^2} \int_0^{\pi} a^{2m-1} e^{-ka^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{r \cos\theta}{\sigma_n^2}a} d\theta da \quad (6)$$

적분테이블[3]에 의해 위의 적분과 아래식의 적분을 계산하면 최종 결과식 (7)이 구해진다.

$$f(r) = \frac{2r}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m \frac{e^{-r^2/2\sigma_n^2}}{\sigma_n^2} \int_0^{\pi} a^{2m-1} e^{-ka^2} J_0\left(\frac{ar}{\sigma_n^2}\right) da \\ = \frac{r}{\sigma_n^2} \left(\frac{m}{k\Omega}\right)^m e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} {}_1F_1\left(m, 1; \frac{r^2}{4k\sigma_n^4}\right), \quad r \geq 0 \quad (7)$$

위의 식에서 $i^2 = -1$, $J_0(z)$ 는 제 1종 0 차 베셀(Bessel) 함수이며, ${}_1F_1(\alpha, \beta; x)$ 는 초가하(confluent hypergeometric) 함수로서 다음과 같이 정의된다[1].

$${}_1F_1(\alpha, \beta; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+i)\Gamma(\beta)x^i}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+i)!}, \quad \beta \neq 0, -1, -2, \dots \quad (8)$$

구해진 $f(r)$ 에 대하여 0 차 모멘트가 1 이 됨을 보임으로써 pdf로서의 타당성을 쉽게 증명할 수 있다.

그림 1 은 비트당 평균 SNR 을 10dB 로 한 경우 여러 가지 m 값에 대한 결과식을 그린 것이고, 그림 2 는 $m=2.5$ 일 때 여러 가지 SNR 값에 대한 결과식을 그린 것이다. 그림 1 과 2 에서 $2\sigma_n^2 = 1$ 로 고정시켰다. 그림 1 과 2 를 고찰하면 고정된 SNR 에 대하여는 m 의 값이 클수록, 고정된 m 값에 대하여는 SNR 의 값이 작을수록 pdf가 더 첨예하게 모여 있음을 알 수 있다.

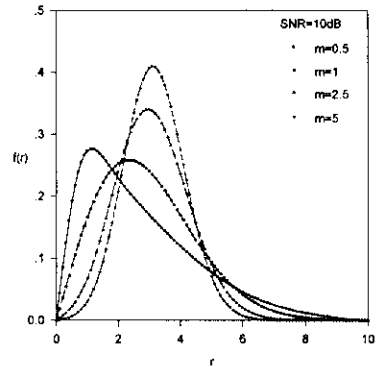


그림 1. 수신신호 포락선의 pdf(SNR=10dB)

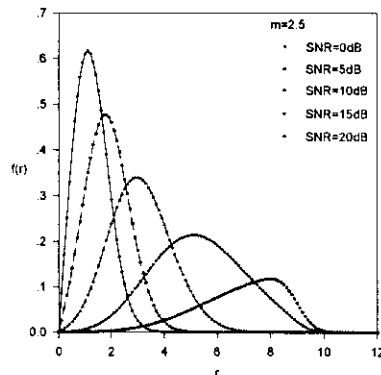


그림 2. 수신신호 포락선의 pdf(m=2.5)

3. 비동기 FSK 의 오류확률

일반적으로 페이딩 환경에서의 오류확률은 우선 가산성 백색 가우시안 잡음만이 존재할 경우의 오류확률을 구하고 그 결과식을 페이딩에 대한 확률밀도 함수에 대하여 평균을 취함으로써 구한다. 그러나 이 논문에서는 앞에서 구한 pdf 를 통하여 새로운 방법으로 비동기 통신 시스템의 오류확률을 구한다.

송신단에서 $s_i(t)$ 가 송신 되었다고 가정하면 샘플링을 한 후의 결정변수 R_i 에 대한 분포는 다음과 같다.

$$f(r_1) = \frac{r_1}{\sigma_n^2} \left(\frac{m}{k\Omega} \right)^m e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)\Gamma(1+i)!} \left(\frac{r_1^2}{4k\sigma_n^4} \right)^i \quad (9)$$

$$f(r_2) = \frac{r_2}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma_n^2}} \quad r_1, r_2 \geq 0 \quad (10)$$

$R_2 > R_1$ 일 때 오류가 발생한 것이므로 오류 확률은 다음식과 같이 구해진다[2].

$$P(E) = \int_0^\infty f(r_1) \int_{r_1}^\infty f(r_2) dr_2 dr_1 \quad (11)$$

위 식에서 $\int_{r_1}^\infty f(r_2) dr_2 = \int_{r_1}^\infty \frac{r_2}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r_2^2}{2\sigma_n^2}} dr_2 = e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_n^2}}$ 이므로

$$P(E) = \int_0^\infty \frac{r_1}{\sigma_n^2} \left(\frac{m}{k\Omega} \right)^m e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma_n^2}} \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)\Gamma(1+i)!} \left(\frac{r_1^2}{4k\sigma_n^4} \right)^i dr_1 \quad (12)$$

$r_1^2 / \sigma_n^2 = x$ 라 치환하면 적분테이블[3]에 의해

$$P(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{k\Omega} \right)^m \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)\Gamma(1+i)! (4k\sigma_n^2)^i} \int_0^\infty x^i e^{-x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{k\Omega} \right)^m \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)! i! (4k\sigma_n^2)^i} \quad (13)$$

이제 각 상수들을 정리하면 $k\Omega = m+S$ 이고, $4k\sigma_n^2 = 2(m/S+1)$ 이 되는데, 여기서 $S = \Omega/2\sigma_n^2$ 이며 비트 당 평균 SNR 을 나타낸다. 따라서 최종 결과식은 (14)식과 같이 된다.

$$P(E) = \left(\frac{m}{m+S} \right)^m \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)! i! 2^{i+1} (1/S+1)^i} \quad (14)$$

특별한 경우로써 $m=1$ 의 경우에 대하여 살펴보면

$$P(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+S} \right) \sum_{i=0}^1 \frac{\Gamma(1+i)}{\Gamma(1)! i! 2^{i+1} (1/S+1)^i} = \frac{1}{2+2S} \quad (15)$$

위 식은 잘 알려진 레일리 페이딩에서 비동기 FSK 의 오류확률식이다[1]. 오류확률의 그래프를 보면 m 이 커

질수록 성능이 더 좋아짐을 알 수 있다.

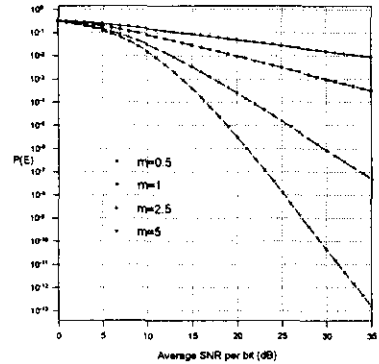


그림 3. 비동기 FSK 의 오류 확률

4. DPSK 의 오류확률

DPSK 의 최적 수신기에서, $s_i(t)$ 가 송신 되었다고 가정하면, 결정변수 R_i 는 다음과 같다[2].

$$R_1 = \sqrt{(AT/2 + w_1)^2 + w_3^2} \quad (16)$$

$$R_2 = \sqrt{w_2^2 + w_4^2} \quad (17)$$

여기서 w_i 는 서로 독립이고, 평균이 0 이며 분산이 $\sigma_n^2 = N_0 T/8$ 인 Gaussian 랜덤 변수이다.

이제 $A' = AT/2$ 라 두면 $E[A'^2] = \Omega' = \Omega T^2/4$ 이다.

비동기 FSK 와 같은 과정을 거쳐 오류 확률을 구하면

$$P(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{k'\Omega'} \right)^m \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)! i! (4k'\sigma_n^2)^i} \quad (18)$$

각 상수들을 정리하면 $k'\Omega' = m+2E_b\Omega/N_0 = m+2S$

$4k'\sigma_n^2 = m/S+2$ 가 된다. 따라서

$$P(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+2S} \right)^m \sum_{i=0}^m \frac{\Gamma(m+i)}{\Gamma(m)! i! (m/S+2)^i} \quad (19)$$

다시 특별한 경우로서 $m=1$, 즉 Rayleigh Fading 의 경우에 대하여 살펴보면

$$P(E) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+2S} \right) \sum_{i=0}^1 \frac{\Gamma(1+i)}{\Gamma(1)! i! (1/S+2)^i} = \frac{1}{2(1+S)} \quad (20)$$

이 또한 잘 알려진 레일리 페이딩에서 DPSK 의 오류확률식이고[1], 오류확률의 그래프를 보면 역시 m 이 커질수록 성능이 좋아짐을 확인할 수 있다.

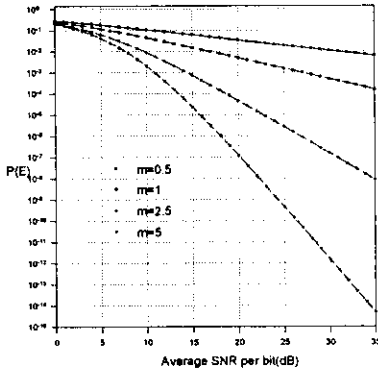


그림 4. DPSK의 오류 확률

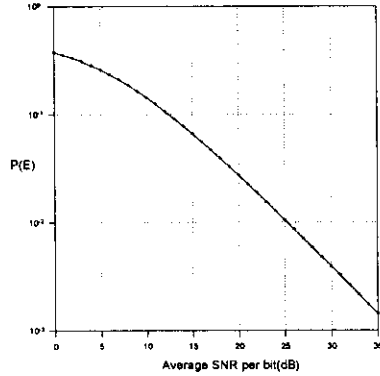


그림 5. 비동기 ASK의 오류 확률(m=1)

5. 비동기 ASK의 오류확률(Rayleigh)

ASK에서는 Nakagami 페이딩의 경우 문턱값을 수치적으로 구해야 하므로 여기서는 m=1인 레일리 페이딩의 경우에 대하여 논한다.

(7)식에서 m=1을 대입하면 레일리 페이딩의 경우 수신신호 포락선의 pdf가 구해진다.

$$f(r) = \frac{r}{k\Omega\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1)\Gamma(1+i)}{\Gamma(1)\Gamma(1+i)!} \left(\frac{r^2}{4k\sigma_n^4} \right)^i$$

$$= \frac{r}{k\Omega\sigma_n^2} e^{-r^2/2k\Omega\sigma_n^2}, r \geq 0 \quad (21)$$

여기서 $k\Omega\sigma_n^2 = \sigma_n^2 + \Omega/2 = \sigma^2$ 이다.

우도비 판정에 의하여 문턱값을 구하면 다음과 같다.

$$\Lambda(r) = \frac{f(r|s_2)}{f(r|s_1)} = \frac{(r/\sigma_n^2)e^{-r^2/2\sigma_n^2}}{(r/\sigma^2)e^{-r^2/2\sigma^2}} = 1 \quad (22)$$

$$r_{th}^2 = \frac{2\sigma_n^2\sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_n^2} \ln\left(\frac{\sigma^2}{\sigma_n^2}\right) \quad (23)$$

이를 이용하여 오류확률을 구한다[2].

$$P(E_1) = \int_0^{r_{th}} \frac{r}{\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} dr = 1 - e^{-\frac{r_{th}^2}{2\sigma^2}} \quad (24)$$

$$P(E_2) = \int_{r_{th}}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-r^2/2\sigma_n^2} dr = e^{-\frac{r_{th}^2}{2\sigma_n^2}} \quad (25)$$

이제 관련 상수들을 모두 정리하여 최종 결과식을 비트당 SNR에 대하여 구하면 (26)식과 같다.

$$P(E) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{S}{(1+S)^{1/S+1}} \quad (26)$$

6. 결론

이 논문에서는 나카가미 페이딩 환경에서 수신신호 포락선의 pdf를 유도하고, 이를 이용하여 비동기 FSK, DPSK의 오류 확률을 구하였다. 그리고 나카가미 페이딩의 특별한 경우인 m=1, 즉 레일리 페이딩에서 수신신호 포락선의 pdf를 유도하고, 이를 이용하여 비동기 ASK의 성능을 정확하게 분석하였다. 그러나 비동기 ASK에서도 나카가미 페이딩 환경에서의 오류확률을 수치계산이 아닌 정확한 수식으로 표현할 수 있는지 더 연구가 진행되어야 할 것이다.

참고문헌

- [1] J. G. Proakis, "Digital Communications", McGraw-Hill, 1989
- [2] R. E. Ziemer and W. H. Tranter, "Principles of Communications", Houghton Mifflin Company, 1995
- [3] L. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, 1965
- [4] M. Nakagami, "The m-Distribution-A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading," in *Statistical Methods of Radio Wave Propagation*, W. C. Hoffman(ed.), pp. 3-36, Pergamon Press, New York, 1960
- [5] 김치환, "Nakagami 페이딩 채널하에서 BPSK 시스템의 해석과 PSK 신호의 변조 분류", 한양대학교 석사논문, 1995