

비선형 시스템의 안정한 직접 적응 제어를 위한 웨이브렛 신경회로망

Wavelet Network for Stable Direct Adaptive Control of Nonlinear Systems

서 승 진, 연 정 흠, 전 흥 태

(Seung-Jin Seo, Jung-Heum Yon, Hong-Tae Jeon)
중앙대학교 전자공학과

(Dept. of Electronic Eng. Chung-Ang University)

Tel : 820-5297. Fax : 825-1584.

E-mail : seung@cclab.ee.cau.ac.kr, htjeon@cau.ac.kr

요 약

이 논문에서는 웨이브렛 신경회로망을 사용하여 알려지지 않은 비선형 시스템을 안정하게 적응 제어하는 문제를 다룬다. 비선형 시스템의 정확한 제어는 함수를 근사화하는 데 사용된 함수 근사화기의 정확성과 효율성에 의존한다. 이에 비선형 시스템 제어에 기존 함수의 선택이 자유롭고 함수 근사화 능력이 뛰어난 웨이브렛 신경회로망을 사용한다. 초기 웨이브렛 신경회로망 제어기 설정은 웨이브렛 신경회로망 변수인 신축과 이동 값을 제어기 입력의 시-주파수 특성을 분석해서 구하고, 연결강도는 Lyapunov 안정성 이론에 기초한 적응 법칙을 사용하여 조절한다. 이를 비선형 시스템인 역 전자 시스템에 적용한다.

1. 서 론

90년대 들어 기존의 신경회로망과 웨이브렛 분해(decomposition) 사이의 유사성에 기인하여 웨이브렛 이론과 신경회로망을 결합한 웨이브렛 신경회로망이 여러 논문에서 제안되고 적용되었다. 웨이브렛 신경회로망이 기존의 신경회로망보다 우수한 근사화 능력을 가진다는 것을 여러 논문에서 증명하였다[1][2][3].

역전파(back-propagation : BP) 학습 알고리즘을 이용한 전방향 신경회로망은 다소 복잡한 함수를 근사화하는 데 있어 뛰어난 능력을 보이나 학습 과정에서 오차 표면에 바람직하지 않은 지역 최소치에 도달하고 수렴 속도도 느

리다. 이러한 전방향 신경회로망의 단점은 매개 변수의 높은 비선형성에 있다[4].

이에 전방향 신경회로망의 대안으로 방사 기준 함수(radial basis function : RBF) 신경회로망을 시스템 동정이나 제어에 응용하였다[5]. RBF 신경회로망은 입력층과 중간층 사이의 비선형성을 가지고 중간층과 출력층 사이에 선형인 연결강도를 가지는 구조이다. 이와 같은 성질로 RBF 신경회로망의 학습은 전방향 신경회로망보다 쉬어진다. 그러나 RBF 신경회로망에서 단점은 중심(center)과 공분산 행렬을 주어진 데이터로부터 선택하기 어려워 바람직한 수행을 이루기 위해서 불필요하게 많은 기준 함수를 사용하게 된다. 이에 RBF 신경회로망과 비슷한 구조를 가진 웨이브렛 신경회로망은 매개 변수 초기치를 시스템의 시간과 주파수

특성을 파악함으로써 웨이브렛 이론에 의해 체계적으로 설정할 수 있고 기준 함수 선택이 자유롭다는 장점을 가지고 있다. 웨이브렛 신경회로망은 이와 같이 RBF의 장점을 대부분 그대로 가지고, 단점을 보완할 수 있는 구조이다. 한편 여기서는 강한 억제 조건을 만족해야 하는 웨이브렛 함수 대신에 기준 함수 선택이 더 자유로운 웨이브렛 프레임을 사용한다.

제어기의 성능은 제어 함수를 근사화 하는데 사용한 함수 근사화기의 성능에 따라 좌우된다. 이에 함수 근사화 능력이 뛰어난 웨이브렛 신경회로망을 이용한다. 일반적인 고차 비선형 연속 시스템에 대한 직접 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기를 다음의 세가지 과정에 의해 만든다. 우선 상태 공간에 적용할 웨이브렛 기준 함수를 정의한다. 그리고 나서 제어기로 들어오는 입력값의 대략적인 범위와 특성을 파악해서 웨이브렛 이론에 근거해 신축(dilation)과 이동(traslation) 변수값을 선택하여 초기 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기를 건설한다. 마지막으로 Lyapunov 안정성 이론에 기초하여 연결강도(weight)를 적용 법칙을 써서 조정한다. 이 직접 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기를 비선형 시스템인 역 진자 시스템을 제어하는데 적용해 본다.

2. 본 론

2.1 스케일링 함수와 웨이브렛 함수

먼저 스케일링 (scaling) 함수와 웨이브렛 함수를 정의하자. 이차원 스케일링 함수의 집합은 다음과 같은 기저 스케일링 함수의 자연수 신축과 이동으로 정의한다.

$$\varphi_{m,n}(x) = 2^{m/2} \varphi(2^m x - n) \quad (1)$$

이 함수들에 의해 재어지는 L^2 (제곱 적분가능 함수의 공간)의 부분공간을 다음과 같이 정의한다.

$$V_m = \overline{\text{Span}_n\{\varphi_{m,n}(x)\}} \quad (2)$$

만약 $f(t) \in V_m$ 이면 함수를 다음과 같이 표현할 수 있다는 것을 의미한다.

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi(2^m x - n) \quad (3)$$

스케일링 함수의 신축과 이동은 다음 수식과 같은 L^2 의 다중분해(multiresolution) 분석을 야기한다.

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset L^2 \quad (4)$$

다양한 부분공간(subspace)들의 관계는 위의 식(4)와 같이 표현된다. 이제 웨이브렛으로 재어지는 부분공간 W_0 를 다음과 같이 정의한다.

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \quad (5)$$

식(5)는 다음과 같이 확장된다.

$$V_2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \quad (6)$$

일반적으로 이것은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} L^2 &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \\ &= \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \end{aligned} \quad (7)$$

그림 1은 다른 스케일 m 에 대한 스케일링 함수 공간 V_m 과 웨이브렛 공간이 어떻게 나누어지는가를 보여준다.

여기서, 웨이브렛 $\psi(x)$ 은 다음과 같이 스케일링 함수로부터 일반화된다.

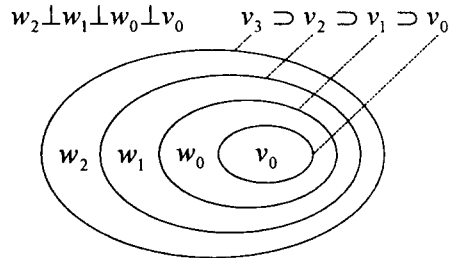


그림 1. 스케일링 함수와 웨이브렛 벡터 공간.

Fig. 1. Scaling Function and Wavelet Vector Spaces.

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h(k) \varphi(2x - k) \quad (8)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_1(k) \psi(2x - k) \quad (9)$$

여기서, 웨이브렛 계수는 스케일링 함수 계수와 다음과 같이 직교하게 관계하도록 요구한다.

$$h_1(k) = (-1)^k h(1-k) \quad (10)$$

식(10)에 의해 일반화된 함수는 L^2 공간의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 형성하는 다음 형식의 원형(prototype or mother) 웨이브렛을 만든다.

$$\phi_{m,n}(x) = 2^{m/2} \psi(2^m x - n) \quad (11)$$

L^2 함수 $f(t)$ 를 분해(decomposition)하는 두가지 구상을 제안한다. 즉,

$$f(x) = \sum_n \langle f, \varphi_{m_0,n} \rangle \varphi_{m_0,n}(x) + \sum_{m \geq m_0, n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(x) \quad (12)$$

과 그리고

$$f(x) = \sum_{m,n} \langle f, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}(x) \quad (13)$$

이다. 여기서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적을 표시하고, m_0 는 가장 낮은 분해능(resolution)을 표시하는 임의의 자연수이다.

2.2 프레임(Frames)

어떤 웨이브렛 함수 ψ 를 가지는 직교 웨이브렛 기준을 설정하는 것이 항상 가능하지는 않다. 웨이브렛 함수 ψ 와 그것에 관련된 직교 기준을 설정하는 것에 대한 기술이 잘 발달되었더라도 웨이브렛 함수 ψ 는 강한 억제 조건을 만족해야 한다[7]. 이 억제는 웨이브렛 함수의 바람직한 성질인 간단성과 규칙성 사이에서 대립한다. 대안으로 준직교(bi-orthonormal) 웨이브렛 집합들은 웨이브렛 함수에 덜한 억제 조건을 요구하는 반면에 비슷한 알고리즘을 제공한다. 그러므로 웨이브렛 집합들이 고려할 함수 공간에 기준이어야 한다는 생각을 포기하고, 프레임으로 대체한다면 ψ 를 선택하는데 더욱 자유롭다. 일반적으로 말하자면, 프레임은 여분의 기준이다. 다음은 Hilbert 공간상에 프레임의 정의이다[7].

정의 3.1: Hilbert 공간 $H(L^2(R^d))$ 과 벡터 $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \subset H$ 의 수열이 주어졌을 때, 다음 식을 만족하는 상수 $A > 0$ 고 $B < 0$ 이 존재하면 $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 를 프레임(frame)이라 부른다.

$$A \|f\|^2 \leq \sum_k |\langle f, h_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (14)$$

여기서, $f \in H$ 이고, A 와 B 는 프레임 한계(frame bound)라고 부른다. 프레임 한계 $A = B$ 인 프레임 $\{h_k\}$ 는 엄격한(tight) 프레임이라 부른다. 만약 $A = B = 1$ 이면 엄격한 프레임은 직교 기준이 된다.

식(14)를 만족하는 단일 스케일링(single scaling) 다중차원(multidimensional) 웨이브렛 프레임의 집합은 다음 형식을 가진다.

$$\Psi(a, \beta) = \{ \psi(a^n x - m\beta) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^d \} \quad (15)$$

여기서 $\psi : R^d \rightarrow R$ 인 방사 웨이브렛 함수이고, a 와 β 는 각각 신축과 이동 스텝 크기를 나타낸다. Kugarajah와 Zhang[8]은 집합(15)가 식(14)의 프레임을 구성하기 위한 ψ , a , β 에 대한 충분조건을 준다.

한편, 방사 함수 $\varphi, \psi \in L_2(R^d)$ 은 다음 조건을 만족하면 웨이브렛 함수로 인정할 수 있다[9].

$$\int_0^\infty \xi^{-1} \hat{\varphi}(\xi w) \hat{\psi}(\xi w) d\xi = 1, \quad \forall w \in R^d \quad (16)$$

여기서, $\hat{\varphi}$ 와 $\hat{\psi}$ 는 각각 φ 와 ψ 의 푸리에 변환이다. 이 적분이 잘 정의되고, 유한할 때 간단한 표준화로 조건 (16)을 만족하는 φ 와 ψ 를 구할 수 있다. 그런 함수의 예는 다음과 같다.

$$\psi(x) = \sqrt{2} (d - \|x\|^2) e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}, \quad (17)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{2} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}};$$

$$\psi(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (d - \|x\|^2) e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}. \quad (18)$$

여기서 $\|\cdot\|$ 는 유클리디언(Euclidean) norms를 표시하고, d 는 웨이브렛 입력의 차원이다.

2.3 웨이브렛 신경회로망과 구조

높은 차원의 웨이브렛은 단일 차원의 웨이브렛보다 덜 연구되었기 때문에 단일 차원으로부터 다중차원 웨이브렛을 구성하는 방법을 먼저 간단히 소개한다. 가장 일반적인 것은 텐서(tensor) 곱 형식과 방사 형식이 있다[1][8][9]. 여기서는 전장에서 유도한 방사 형식인 식(18)을 이용한다.

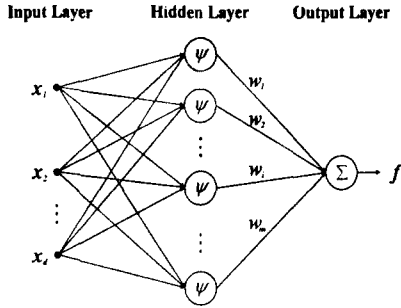


그림 2. 웨이브렛 신경회로망.
Fig. 2. wavelet network.

그림 2의 웨이브렛 신경회로망은 웨이브렛 프레임 이론에 의해 유도된 식(15)를 이용하여 다음 식(19)와 같은 형식으로 구성한다.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_i w_i \psi(a_i(\mathbf{x} - \mathbf{t}_i)) \\ &= \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $a \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{t} \in \mathbf{R}^d$ 는 각각 신축(dilation)과 이동(translation) 변수라 부른다. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 는 웨이브렛 함수의 입력값이다. $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 는 연결강도 벡터를 나타내고, $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)^T$ 는 웨이브렛 기준 함수인 $\phi_i = \psi(a_i(\mathbf{x} - \mathbf{t}_i))$ 로 구성된 벡터이다.

이제 웨이브렛 신경회로망의 매개변수를 설정하자. 식(15)로부터 시간과 주파수 한정인 n , m 값을 웨이브렛 신경회로망 제어기 설계가 바람직하도록 설정하여 a_i 와 \mathbf{t}_i 의 값을 구한다. 연결강도 \mathbf{w} 는 다음 절의 폐루프 시스템이 안정성과 수렴성을 유지하도록 하는 적응 법칙을 적용하여 갱신한다.

2.4 안정한 직접 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기 설계

이 절에서는 먼저 제어 목적을 세우고 이 제어 목적을 성취하기 위해 직접 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기를 어떻게 설계할 것인가를 보인다.

다음의 a 차 비선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{\mathbf{x}}^{(d)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \dots, \mathbf{x}^{(d-1)}) + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}. \quad (20)$$

여기서 \mathbf{g} 는 알려지지 않은 연속 함수, \mathbf{b} 는 알려지지 않은 양의 상수, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}$ 과 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}$ 은 각각 시스템의 입력과 출력을 나타낸다.

$\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \dots, x^{(d-1)})^T \in \mathbf{R}^d$ 는 측정하여 이용할 수 있는 상태 벡터(state vector)이다. 비선형 제어 문헌[10]에 의해서 이 시스템은 피드백 선형화할 수 있고, 관계 정도(relative degree)가 a 와 같다.

제어 목적은 제어 과정에 포함된 모든 신호가 한정(bounded)되어야 한다는 제한 안에서 \mathbf{y} 가 주어진 한정된 참조 신호($y_m(t)$)를 따라가도록 피드백 제어 u 와 제어 법칙을 결정하는 것이다.

이제 이 제어 목적을 성취하기 위해 직접 적용 웨이브렛 신경회로망 제어기를 어떻게 건설할 것인가에 대한 기본적인 개념을 보인다.

함수 g 와 상수 b 를 안다면, 제어 법칙

$$\mathbf{u}^* = \frac{1}{b} [-g(\mathbf{x}) + \mathbf{y}_m^{(d)} + \mathbf{k}^T \mathbf{e}] \quad (21)$$

을 식(5.1)에 적용하면

$$\mathbf{e}^{(d)} + k_1 \mathbf{e}^{(d-1)} + \dots + k_d \mathbf{e} = 0. \quad (22)$$

이 된다. 여기서, $\mathbf{e} = (e, \dot{e}, \dots, e^{(d-1)})^T$ 이고 $\mathbf{k} = (k_d, k_{d-1}, \dots, k_1)^T \in \mathbf{R}^d$ 는 다항식 $h(s) = s^d + k_1 s^{d-1} + \dots + k_d$ 의 모든 근이 음이 되도록 하는 값이다.

제어의 주요 목적은 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ 이다. 그러나 함수 g 와 상수 b 가 알려지지 않기 때문에 식(21)의 최적 제어 \mathbf{u}^* 이 수행될 수 없다. 우리의 목적은 웨이브렛 신경회로망을 이 최적 제어에 근사화하도록 설계하는 것이다.

식(20)의 입력 u 를 식(19) 형식의 웨이브렛 신경회로망 $u_c(\mathbf{x}/\mathbf{w})$ 으로 대체한다면 식(20)은 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{\mathbf{x}}^{(d)} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}[u_c(\mathbf{x}/\mathbf{w})]. \quad (23)$$

위 식(23)에 $\mathbf{b}\mathbf{u}^*$ 를 양변에 더하면

$$\mathbf{e}^{(d)} = -\mathbf{k}^T \mathbf{e} + \mathbf{b}[u^* - u_c(\mathbf{x}/\mathbf{w})] \quad (24)$$

이고, 상태 오차 방정식은 다음과 같이 등가적으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \mathbf{e} + \mathbf{b}[u^* - u_c(\mathbf{x}/\mathbf{w})]. \quad (25)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -k_d & -k_{d-1} & \cdots & \cdots & \cdots & -k_1 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (26)$$

최적 연결강도 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$w^* \equiv \arg \min_{|w| \leq M_w} [sup_{|x| \leq M_x} |u_c(x/w) - u^*|]. \quad (27)$$

최소 근사화 오차는 다음과 같다.

$$\xi \equiv u_c(x/w^*) - u^*. \quad (28)$$

식(28)을 사용하면 방정식(25)는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + b[u_c(x/w^*) - u_c(x/w)] - b\xi \\ &= Ae + b\tilde{w}^T \phi(x) - b\xi \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 $\tilde{w} \equiv w^* - w$ 이고, $\phi(x)$ 는 웨이브렛 기준 함수이다.

안정한 적응법칙을 유도하기 위해 Lyapunov 후보를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} \tilde{w}^T \Gamma^{-1} \tilde{w} \quad (30)$$

여기서 Γ 는 양정의(positive definite) 대각행렬이고, P 는 $Q > 0$ 인 Lyapunov 방정식

$$A^T P + P A = -Q \quad (31)$$

을 만족하는 양정의 대칭행렬이다.

식(31)과 식(29)를 사용하여 식(30)을 미분하면 V 의 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P b [\tilde{w}^T \phi(x) - \xi] \\ &\quad + \tilde{w}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{w}} \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + \tilde{w}^T [e^T P b \phi(x) \\ &\quad + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{w}}] - e^T P b \xi \end{aligned} \quad (32)$$

따라서 다음의 적응 법칙(adaptive law)

$$\dot{\tilde{w}} = \Gamma e^T P b \phi(x) \quad (33)$$

을 선택하면 식(33)은 다음과 같이 간략화된다.

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} e^T Q e - e^T P b \xi \quad (34)$$

적용 법칙 식(33)에 의해 $w(t)$ 가 일정하게 한정된다는 것을 보장할 수 없다. 본 논문에서는 $|w(t)| \leq M_\theta$ 를 보장하기 위해 Reed가 제시한 σ -modification 방식을 도입하여 기본적인 적응 법칙 식(33)를 다음과 같이 수정한다[11].

$$\dot{\tilde{w}} = \Gamma e^T P b \phi(x) - \sigma_m w \quad (35)$$

또는

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}} &= -\dot{w} \\ &= -\Gamma e^T P b \phi(x) + \sigma_m w \\ &= -\Gamma e^T P b \phi(x) + \sigma_m (w^* - \tilde{w}) \end{aligned} \quad (36)$$

여기서,

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & \text{if } |w| < M_\theta \\ \frac{|w| - M_\theta}{M_\theta} & \text{if } M_\theta \leq |w| \leq 2M_\theta \\ 1 & \text{if } |w| > 2M_\theta \end{cases} \quad (37)$$

이제 Barbalat 정리[10]를 이용해서 오차가 영점에 수렴함을 증명할 수 있다.

그림 3은 지금까지 정리한 직접 적응 웨이브렛 신경회로망 제어기의 전체적인 구성도를 보인다.

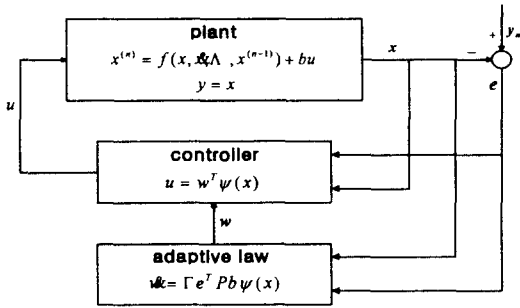


그림 3. 직접 적응 웨이브렛 신경회로망 제어기 구조.

Fig. 3. Direct adaptive wavelet network controller architecture.

6. 역진자(inverted pendulum) 추종 제어 모의실험

그림 4와 그림 5는 Wang[12]의 역진자 시스템 동적 방정식을 사용한 모의 실험 결과를 보인다.

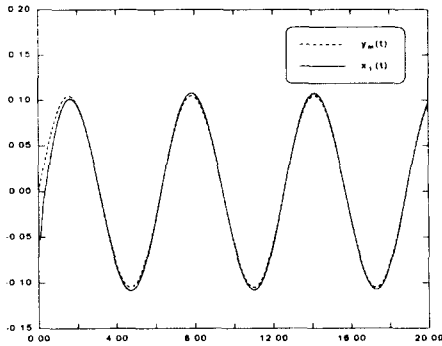


그림 4. 상태 $x_1(t)$ 와 추종치

$$y_m(t) = \frac{\pi}{30} \sin(t)$$

Fig. 4. The state $x_1(t)$ and its desired value $y_m(t)$

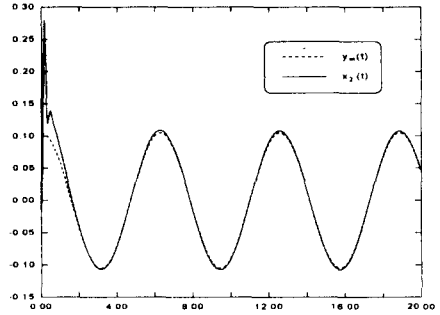


그림 5. 상태 $x_2(t)$ 와 추종치

$$\dot{y}_m(t) = \frac{\pi}{30} \cos(t)$$

Fig. 5. The state $x_2(t)$ and its desired value $\dot{y}_m(t)$

3. 결론

이 논문에서는 웨이브렛 신경회로망을 사용하여 비선형 시스템을 안정하게 적응 제어하는 문제를 다루워 보았다. 시스템을 제어하는데 사용한 웨이브렛 신경회로망이 기존의 신경회로망보다 더 효율성 있고 정확하게 함수를 근사화할 수 있다. 이 뛰어난 근사화 능력으로 더 우수한 제어 성능을 보인다는 것을 역진자 시스템의 모의실험을 통해 알 수 있다.

참고문헌

- [1] Q. Zhang and A. Benveniste, "Wavelet networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 3, pp. 889-898, Nov. 1992.
- [2] Y. C. Pati and P. S. Krishnaprasad, "Analysis and synthesis of feedforward neural network using discrete affine wavelet transformations," *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 4, pp. 73-85, Jan. 1993.
- [3] J. Zhang, G. G. Walter, Y. Miao and W. N. W. Lee, "Wavelet neural networks for function learning," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, pp. 1485-1497, June. 1995.
- [4] K. S. Narendra and K. Parthasarathy, "Identification and control of dynamical systems using neural networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 1, pp. 4-27, Mar. 1990.
- [5] S. Chen, C. F. N. Cowan, and P. M. Grant, "Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, pp. 302-309, Mar. 1991.
- [6] V. T. Sunil Elanayar and Y. C. Shin,

"Radial Basis Function neural network for approximation and estimation of nonlinear dynamic systems," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 4, pp. 594-603, 1994.

[7] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*. Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall, 1998.

[8] T. Kugarajah and Q. Zhang, "Multidimensional wavelet frames", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 72, pp. 1552-1556, Nov. 1995

[9] B. Delyon, A. Juditsky, and A. Benveniste, "Accuracy analysis for wavelet approximations" *IEEE Trans. Neural Network*, vol. 6, pp. 332-348, Mar. 1995.

[10] Slotine, J. E. and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991.

[11] J. Reed and P. Ioannou, "Instability analysis and robust adaptive control of robotic manipulators," *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, Austin, TX, pp 1607-1612, Dec. 1988

[12] L. X. Wang, "Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems," *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 1, no. 2, pp. 146-155, May. 1993.