

선형 행렬부등식과 분해법을 이용한 퍼지제어기 설계

Design of LFT-Based T-S Fuzzy Controller for Model-Following using LMIs

손홍엽, *이희진, 조영완, 김은태, 박민용

Hongyoun Son,*Heejin Lee,Youngwan Cho,Euntai Kim,Mignon Park
연세대학교 전자공학과, * 안성산업대학교 제어계측공학과

ABSTRACT

This paper proposes design of LFT-based fuzzy controllers for model-following, which are better than the previous input-output linearization controllers, which are not able to follow the model system states and which do not guarantee the stability of all states. The method proposed in this paper provides a LFT-based Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy controller with guaranteed stability and model-following via the following steps: First, using LFT(Linear Fractional Transformation) and T-S fuzzy model, controllers are obtained.

Next, error dynamics are obtained for model-following, and errors go to 0(zero). Finally, a T-S fuzzy controller that can stabilize the system with the requirement on the control input satisfied is obtained by solving the LMIs with the MATLAB LMI Control Toolbox and a model-following controller is obtained. Simulations are performed for the LFT-based T-S fuzzy controller designed by the proposed method, which show better performance than the results of input-output linearization controller.

제 1 장 서 론

제어기의 기본적인 형태는 피드백(feedback) 형태로 구성되어야 안정한 시스템을 구성할 수 있음을 고전제어 나 현대제어에서 보여주고 있다. 이러한 제어이론을 배경으로 많은 제어이론과 적용 기술이 소개되었다. 최근에는 선형대수를 기초로 많은 이론과 수식이 제어이론과 접목되어 실제적인 시스템 설계와 모의실험에 최적 제어를 목적으로 선형 행렬부등식[2,3]이 소개되었다. 이러한 선형행렬부등식, 선형분해법, T-S(Takagi-Sugeno) 퍼지모델을 이용하면 보다 우수한 제어를 설계할 수 있음을 기존 논문은 잘 보여주고 있다.

기존의 입력·출력 선형화 제어기[4]는 관측이 불가능한 모드가 있어 관측이 불가능한 모드의 내부 다이내믹이 안정해야 안정한 제어를 설계할 수가 있다. 또한 설계시 다른 상태들은 제어하지 못하는 결과를 보여주고 있다. 이러한 제한을 극복하고자, 설계할 때부터 상태를 제한하는 선형분해법(Linear Fractional Transformation)을 이용한 제어기를 구성했으며 선형분해법으로 구성하지 못하는 부분에 대하여 퍼지제어기를 구성했다.

제 2 장. 퍼지시스템과 선형제어기법

2.1 Takagi-Sugeno 퍼지 시스템

본 논문에서 사용하는 퍼지모델이란 if-then 형식으로 플랜트를 기술한 모델이다.

L^i : IF $z_1(t)$ is M_{a_i} and ..and $z_p(t)$ is M_{b_i}

THEN $\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u(t)$. (1)

이때 L^i 는 i 번째 플랜트법칙 M_{b_i} 는 퍼지변수이다. 입력에 대한 r 개의 플랜트 법칙에 의한 출력 $\dot{x}_i(t)$ 의 추론법은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (2)$$

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{j=1}^r w_j(z(t))} \quad (3)$$

이때 $z(t) = [z_1(t) z_2(t) \dots z_p(t)]$, 식(4),식(5)로 주어지며 $h_i(z(t))$ 를 정규화된 가중치(normalized weight)로 생각할 수 있다.

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{b_{ij}}(z_j(t)) \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, h_i(z(t)) \geq 0 \quad (5)$$

2.2 선형 분해법

선형분해법은 비선형적 요소가 플랜트에 포함되어 있을 때 그림 1에서 보는 것처럼 몇 개의 가상의 입력인 p 와 가상의 출력력인 q 사이의 되먹임연결형태로 나타내어 선형시불변(LTI) 시스템으로써 해석할 수 있다. 되먹임 행렬 Δ 는 상태벡터 x 안에서 선형이고 그것의 구조

(정수들 r_1, \dots, r_n)는 시스템의 비선형성의 정도를 반영한다.[2] 구체적으로 식(6)과 같은 비선형, 시불변, 연속시간 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + B_u(x)u, \\ y &= C_y(x) + D_{yu}(x)u \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $x \in R^n$ 은 상태벡터이고, $u \in R^m$ 은 입력이며 $y \in R^n$ 은 출력이다.

일단, 다음과 같은 유리 시스템을 가정하자.

A1. $A(x)$, $B_u(x)$, $C_y(x)$, $D_{yu}(x)$ 은 상태변수 x 의 (다중변수) 유리함수들이다.

A2. $A(0) = 0$ (즉, 0이 시스템(6)과 연관된 외부입력이 없을 때의 평형점이다.)

A3. $C_y(0) = 0$ 이고, B_u, D_{yu} 는 원점에서 특이점들(singularities)을 보유하지 않는다.

시스템식(6)을 가정 A1-A3를 유지하면서 $A, B_u, B_p, C_q, D_{qp}, C_y, D_{yu}, D_{yp}$ 에 대하여 다음과 같은 선형분해 형태로 나타내고자 한다.

$$\begin{bmatrix} A(x) & B_u(x) \\ C_y(x) & D_{yu}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_u \\ C_y & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p \\ D_{yp} \end{bmatrix} \Delta(x) [I - D_{qp} \Delta(x)]^{-1} \begin{bmatrix} C_q & D_{qu} \end{bmatrix}$$

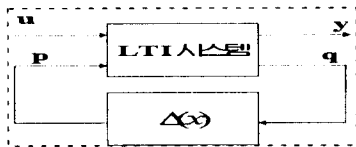


그림 1 일반적인 선형분해모형

그러므로 식(6)은 식(7)과 같은 선형분해모형으로 연결시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_p p, \\ q &= C_q x + D_{qu} u + D_{qp} p, \\ y &= C_y x + D_{yu} u + D_{yp} p, \\ p &= \Delta(x)q, \\ \Delta(x) &= \text{diag}(x_1, I_{r_1}, \dots, x_n, I_{r_n}) \end{aligned} \quad (7)$$

시스템식(6)의 안정특성을 분석하기 위하여 먼저 다음과 같이 정의하자.

정의 2-1

I 는 흡인영역이다. 즉 $x(0) \in I$ 이고 $u \equiv 0$ 이라는 것은 $t \rightarrow \infty$ 일때 $x(t) \rightarrow 0$ 을 의미한다. (시스템식(7)은 시불변이므로 모든 흡인영역 I 도역시 불변한다.)

정의 2-2

시스템식(7)은 흡인영역 I 안에서 제대로 잘 위치된다. 즉, 모든 $x \in I$, $\det[I - D_{qp} \Delta(x)] \neq 0$.

우리는 흡인영역 $\Gamma \in R^n$ 을 발견하여 정의 2-1과 정의 2-2를 충족시켜야 한다.[2]

2.3 선형 행렬부등식

먼저, $P > 0$ 은 모든 영이 아닌 $x \in R^n$ 에 대하여 $x^T P x > 0$ 이고 $P < 0$ 은 $x^T P x < 0$ 을 의미한다.

Lyapunov의 이론을 살펴보면, 시스템식(8)의 안정조건을 구하는 방법은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) \quad (8)$$

$$A^T P + PA < 0 \quad (9)$$

여기서, 요구되는 $P > 0, A^T P + PA < 0$ 은 지금은 소위 F 에 대한 Lyapunov부등식이라 불리우는데 선형행렬부등식의 특수한 형태로 임의의 $Q = Q^T > 0$ 를 선택할 수 있고 행렬 F 에 대하여 선형방정식 $A^T P + PA = -Q$ 을 풀 수 있으며 시스템식(8)이 안정하다면 행렬 F 가 양한정행렬($P > 0$)임을 보증한다.

선형행렬부등식을 유도하는 법을 간단하게 소개하면 비선형 (컨벡스(convex)) 부등식들을 Schur 컴플러먼트를 이용하여 선형행렬부등식으로 변환할 수 있다는 것이다. Schur 컴플러먼트를 나타내면 선형행렬부등식(10)은 식(11)또는 식(12)과 동치이다.

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (10)$$

$$R(x) > 0, Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (11)$$

$$Q(x) > 0, R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0 \quad (12)$$

이때 $Q(x) = Q(x)^T, P(x) = P(x)^T$ 이다.

제 3 장. 선형행렬부등식과 분해법을 이용한 T-S 퍼지시스템 설계

3.1 입·출력 선형화를 이용한 제어기설계
다음과 같은 플랜트를 고려해 보자.

$$\dot{x}_1 = x_2 \frac{\sin x_2}{x_2} + x_2 x_3 + x_3 \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^5 + x_3 \quad (14)$$

$$\dot{x}_3 = x_1^2 + u \quad (15)$$

$$y = x_1 \quad (16)$$

입력 u 가 나타날 때까지 출력 y 을 미분한다.

시스템 식(13)-(16)은 선형시스템식(17)로 선형화된다.

$$\ddot{y} = v \quad (17)$$

새로운 제어입력 v 를 $v = \ddot{y}_m + k_1 \dot{e} + k_2 e$ 로 구성하고 $e \equiv y_m - y$ 이면 식(18)로 주어진다.

$$\ddot{e} + k_1 \dot{e} + k_2 e = 0 \quad (18)$$

$s^2 + k_1 s + k_2 = 0$ 의 근들이 좌반면에 있으면

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 으로 제어목적을 만족한다.[4]

3.2 선형분해법을 이용한 플랜트 구성법

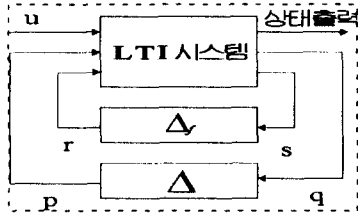


그림 2 플랜트의 선형분해모델

전체시스템식(19)를 그림 2 플랜트의 선형분해모델로 구성해보자.

$$\dot{x} = A(x) + B_u u \quad (19)$$

가상의 상태 p, q, r, s 를 도입하면 전체 플랜트는 식(20)로 주어진다.

$$\dot{x} = A_0 x + B_p p + B_r r + B_u u \quad (20)$$

먼저, $q = C_q x + D_{qp} p$ 를 가정하여 구성하고, 다음과 같은 순서로 시스템을 구성할 수 있다.

1. $D_{qp}\Delta$ 와 $[I - D_{qp}\Delta]$ 를 구하고, 가우스 소거법을 이용하여 역함수를 구한다.
2. $[I - D_{qp}\Delta]^{-1}, [I - D_{qp}\Delta]^{-1}C_q$ 를 구한다.
3. $\Delta[I - D_{qp}\Delta]^{-1}C_q, B_p, \Delta[I - D_{qp}\Delta]^{-1}C_q x$ 를 구한다.
4. 전체 시스템식(20)을 만족하도록 다음 식(21)과 식(22)를 구성한다.

$$q = C_q x + D_{qp} p \quad (21)$$

$$p = \Delta q \quad (22)$$

같은 방법으로 다음 역시 구현할 수 있다.

$$s = C_s x + D_{sr} r \quad (23)$$

$$r = \Delta_f s \quad (24)$$

3.3 T-S 퍼지제어기 설계

플랜트에 대한 제어규칙은 다음과 같다.

제어규칙: IF $z_1(t)$ is M_{i1} and ... and $z_p(t)$ is M_{ip}

THEN $u(t) = -F_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r$

전체적인 퍼지제어기는 다음과 같이 나타난다.

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (25)$$

선형행렬부등식(LMI)을 이용하여 결정하였다.

(25)을 (2)안으로 대체하면 식(26)을 얻는다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) [A_i - B F_i] x(t) \quad (26)$$

정리 3.1 은 식(26)의 안정성을 보장한다.

정리 3.1

공통적인 양한정행렬 P가 존재해서 식(27)의 조건을 만족하면, 퍼지제어시스템식(26)의 평형점은 광역적이고 점층적으로 안정하다.

$$(A_i - B F_i)^T P + P (A_i - B F_i) < 0 \quad (27)$$

시스템식(28)은 외부입력과 관계없이 자체적으로 안정해야 하므로, $u=0$ 일 때 식(29)과 같이 주어진다.

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^r w_i A_{0i} x + B_p p + B_r r + B_u u \quad (28)$$

Lyapunov 함수 $V(x) = x^T P x$ 로 정의하면, 식(30)을 만족하여야 한다.

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{dx^T}{dt} P x + x^T P \frac{dx}{dt} < 0 \quad (30)$$

그리고 식(30), 식(31), 식(32)은 식(33)를 만족한다.

$$\|\Delta\| = \frac{\|p\|_2}{\|q\|_2} \leq \delta_1^{-1} \rightarrow \delta_1^2 p^T p \leq q^T q \quad (31)$$

$$\|\Delta_f\| = \frac{\|r\|_2}{\|s\|_2} \leq \delta_2^{-1} \rightarrow \delta_2^2 r^T r \leq s^T s \quad (32)$$

$$(A_{0i} x + B_p p + B_r r)^T P x + x^T P (A_{0i} x + B_p p + B_r r) \quad (33)$$

$$< \delta_1^2 p^T p - q^T q + \delta_2^2 r^T r - s^T s \leq 0$$

$q = C_q x + D_{qp} p, s = C_s x + D_{sr} r$ 를 대입해

$[x \ p \ r]$ 으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A_{0i} + C_q^T C_q + C_s^T C_s, & P B_p + C_q^T D_{qp}, & P B_r + C_s^T D_{sr} \\ B_p^T P + D_{qp}^T C_q, & D_{qp}^T D_{qp} - \delta_1^2 I, & 0 \\ B_r^T P + D_{sr}^T C_s, & 0, & D_{sr}^T D_{sr} - \delta_2^2 I \end{bmatrix} < 0$$

식(13)~식(15)에서 흡인영역(domain of attraction)을 생각해보면,

$$\|x_1\| = \|\Delta\| = \frac{\|p\|_2}{\|q\|_2} \leq \delta_1^{-1} \text{ 과}$$

$$\|x_3\| = \|\Delta_f\| = \frac{\|r\|_2}{\|s\|_2} \leq \delta_2^{-1} \text{ 이}$$

타원 $E^P = \{x \mid x^T P x \leq 1\}$ 를 만족해야 한다.

$e_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ 를 정의하면

$$\|x_1\| = |(P^{-1/2} e_1)^T (P^{1/2} x)| \leq \delta_1^{-1} \text{ 이고}$$

$$\|x_3\| = |(P^{-1/2} e_3)^T (P^{1/2} x)| \leq \delta_2^{-1} \text{ 이며}$$

$$\|P^{-1/2} e_1\| < \delta_1^{-1}, \|P^{-1/2} e_3\| < \delta_2^{-1},$$

$Q = P^{-1}$ 이므로 식(34)이 유도된다.

$$e_1^T Q e_1 < \delta_1^{-2}, e_3^T Q e_3 < \delta_2^{-2} \quad (34)$$

다음에는 시스템 상태가 E^F 안에 존재할 때 제어입력(25)이 갖는 크기의 상한(upper bound)을 생각해 보자. 우선, 다음의 수식 전개를 통해 $F_i x = Y_i Q^{-1} x$ 가 E^F 위에서 가질 수 있는 노름(norm)의 최대값은 $\sqrt{Y_i Q^{-1} Y_i^T}$ 와 같음을 알 수 있다.

$$\max_{x \in E^F} \|F_i x\|^2 = \max_{\|P^{1/2} x\| \leq 1} \|Y_i Q^{-1} x\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{\|P^{1/2}x\| \leq 1} x^T P^{1/2} P^{-1/2} Q^{-1} Y_i^T Y_i Q^{-1} P^{-1/2} P^{1/2} x \\
&= \lambda_{\max}(P^{-1/2} Q^{-1} Y_i^T Y_i Q^{-1} P^{-1/2}) \\
&= \lambda_{\max}(Q^{-1} Y_i^T Y_i Q^{-1} P^{-1}) \\
&= \lambda_{\max}(Q^{-1} Y_i^T Y_i) \\
&= Y_i Q^{-1} Y_i^T.
\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{Y_i Q^{-1} Y_i^T} < U_{\max}$ 를 만족한다. 그리고

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \left\| \sum_{i=1}^r w_i F_i x(t) \right\| \\
&\leq w_1 \|F_1 x\| + \dots + w_r \|F_r x\| \\
&< w_1 U_{\max} + \dots + w_r U_{\max} = U_{\max}
\end{aligned}$$

가 성립하므로 제어 입력 u 의 노름은 E^t 위에서 U_{\max} 미만으로 제한된다. Schur 컴플러먼트[3]를 이용하면, 식(35)이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} U_{\max}^2 & Y_i \\ Y_i^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (35)$$

식(33)의 유도식을 $Q=P^{-1}$ 로 나타내기 위해서는 다음과 같은 과정으로 유도된다.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A_{0i}^T P + PA_{0i} & PB_i & PB_r \\ B_i^T P & -\delta_i^2 I & 0 \\ B_r^T P & 0 & -\delta_i^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_i^T C_i & C_i^T D_{\infty} & 0 \\ D_{\infty}^T C_i & D_{\infty}^T D_{\infty} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \\
&\quad + \begin{bmatrix} C_i^T C_i & 0 & C_i^T D_{\infty} \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{\infty}^T C_i & 0 & D_{\infty}^T D_{\infty} \end{bmatrix} < 0 \\
&\begin{bmatrix} A_{0i}^T P + PA_{0i} & PB_i & PB_r \\ B_i^T P & -\delta_i^2 I & 0 \\ B_r^T P & 0 & -\delta_i^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_i^T & & \\ & D_{\infty}^T & \\ & & 0 \end{bmatrix} [-I] [C_i \ D_{\infty} \ 0] \\
&\quad - \begin{bmatrix} C_i^T & & \\ & D_{\infty}^T & \\ & & 0 \end{bmatrix} [-I] [C_i \ 0 \ D_{\infty}] < 0 \\
&\begin{bmatrix} A_{0i}^T P + PA_{0i} & PB_i & PB_r \\ B_i^T P & -\delta_i^2 I & 0 \\ B_r^T P & 0 & -\delta_i^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_i^T & C_i^T \\ & D_{\infty}^T & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} [C_i \ D_{\infty} \ 0] < 0
\end{aligned}$$

Schur 컴플러먼트(Schur complement)를 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{0i}^T P + PA_{0i} & PB_i & PB_r \\ B_i^T P & -\delta_i^2 I & 0 \\ B_r^T P & 0 & -\delta_i^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_i^T & C_i^T \\ & D_{\infty}^T & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

양변에 $\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 를 양변에 곱해주면 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} QA_{0i}^T + A_{0i}Q & B_b & B_r \\ B_b^T & -\delta_i^2 I & 0 \\ B_r^T & 0 & -\delta_i^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QC_i^T & QC_i^T \\ D_{\infty}^T & 0 \\ 0 & D_{\infty}^T \end{bmatrix} < 0$$

양변에 $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ 을 곱해주면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} QA_{0i}^T + A_{0i}Q & QC_i^T & QC_i^T \\ C_i Q & -I & 0 \\ C_i Q & 0 & -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_b & B_r \\ D_{\infty} & 0 \\ 0 & D_{\infty} \end{bmatrix} < 0$$

Schur 컴플러먼트를 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} QA_{0i}^T + A_{0i}Q & & \\ + \delta_i^2 B_b B_b^T & QC_i^T + \delta_i B_b D_{\infty}^T & QC_i^T + \delta_i^2 B_b D_{\infty}^T \\ + \delta_i^2 B_r B_r^T & & \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_b^T & -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T & 0 \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_r^T & 0 & -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T \end{bmatrix} < 0$$

윗 식을 만족해야 하고 페루프 시스템이 안정화 되려면 다음과 같이 구성하면 된다.

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^r w_i (A_{0i} - B_{0i} F_i) x + B_{0i} p + B_{0i} r,$$

$$\begin{bmatrix} Q(A_{0i} - B_{0i} F_i)^T \\ + (A_{0i} - B_{0i} F_i)Q \\ + \delta_i^2 B_b B_b^T \\ + \delta_i^2 B_r B_r^T \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_b^T \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_r^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QC_i^T + \delta_i B_b D_{\infty}^T & QC_i^T + \delta_i B_b D_{\infty}^T \\ -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T & 0 \\ 0 & -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T \end{bmatrix} < 0$$

여기서 선형화를 위해 $Y_i = F_i Q$ 를 도입하면 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} QA_{0i}^T - (Y_i)^T B_b^T \\ + A_{0i} Q - B_{0i} F_i \\ + \delta_i^2 B_b B_b^T \\ + \delta_i^2 B_r B_r^T \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_b^T \\ C_i Q + \delta_i^2 D_{\infty} B_r^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} QC_i^T + \delta_i B_b D_{\infty}^T & QC_i^T + \delta_i B_b D_{\infty}^T \\ -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T & 0 \\ 0 & -I + \delta_i^2 D_{\infty} D_{\infty}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (36)$$

모델은 $\dot{x}_d = A_d x_d + B_d v$ 로 구성된다. 이때 x_d 는 모델의 상태, v 는 모델입력, A_d 는 $n \times n$ 상수행렬, B_d 는 $n \times r$ 상수행렬로 주어진 다. 오차벡터 ($e = x_d - x$)와 오차방정식 ($\dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = A_d x_d + B_d v - f(x, u, t)$)을 먼저 구성해서 정상상태에서 $e = \dot{e} = 0$ 이 되기를 원한다. 시스템의 안정화를 위하여 Lyapunov 함수를 도입하여 시스템의 안정화를 고려하면 다음과 같은 Lyapunov 함수를 구할 수 있다.

Lyapunov 함수를 $V(e) = e^T P e$ 로 정의하여 식(37)를 만족해야 한다.

$$\begin{aligned}
\frac{dV(e)}{dt} &= e^T P e + e^T P \dot{e} \\
&= e^T (A_d^T P + P A_d) e + 2M < 0 \quad (37)
\end{aligned}$$

이때 $M = e^T P [A_d x - f(x, u, t) + B_d v]$ 이다. 시스템을 안정화하고 모델을 추적하기 위하여 $B_u^+ = (B_u^T B_u)^{-1} B_u^T$, $u_1 = -F x$, $u = u_1 + u_2$, $u_2 = B_u^+ [A_d x + B_d v - A_{fc} x]$, 로 설계하자. 그러므로 에리 방정식은 다음과 같다. $\dot{e} = A_d e + A_{fc} x + B_d v - A_{fc} x - B_u u_2$ (38)

- 이때 다음 조건을 만족해야 한다.
1. $A_d^T P + P A_d = -Q$ 은 음한정 행렬이다.
 2. 제어 벡터 u 를 선택해서 스칼라 양 $M \leq 0$ 을 만족하게 만들 수 있다.

3.4 선형분해법과

T-S 퍼지제어기의 전체적인 구성도
본 논문에서 제안한 선형분해법과 T-S 퍼지제어기의 전체적인 모형은 그림 3과 같이 구성된다. 플랜트의 비선형부분을 선형분해법을 이용하여 구성하고 나머지 부분에 대하여 T-S 퍼지제어기를 통하여 접근했다.

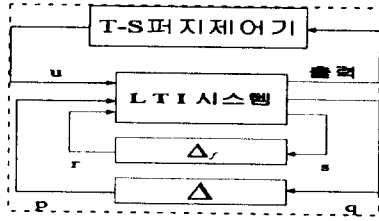


그림 3 선형분해법과 T-S 퍼지제어기의 전체적인 모형

제 4 장 모의실험 및 고찰

4.1 선형 행렬부등식과 분해법을 이용한 T-S 퍼지제어기

식(13)~식(15)으로부터 선형분해법으로 플랜트를 구성하기 위하여 플랜트를 $A(x) = Ax$ 로 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$\dot{x} = Ax + B_u u \quad (39)$$

이때, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, $B_u = [0 \ 0 \ 1]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin x_2}{x_2} + x_3 & 1 \\ x_1^4 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{로 주어지며,}$$

p, q, r, s 를 이용해서 식(40)로구성한다..

$$\dot{x} = A_0 x + B_p p + B_r r + B_u u \quad (40)$$

$$\text{이때, } A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin x_2}{x_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{로 주어진다.}$$

$q_1 = x_1, q_2 = p_1, q_3 = p_2, q_4 = p_3$ 로 가상의 함수를 가정하고 유도과정은 3.2절의 순서에 따라서 유도하면 다음과 같다.

$$C_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{qp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$$

$$C_s = [0 \ 1 \ 0], D_{sr} = 0, \Delta_r = [x_3], B_r = [1 \ 0 \ 0]^T$$

이제, A_0 를 퍼지제어기를 이용하여 선형화하

$$\text{고, [5]처럼 } w_1(x_2) = 10 \frac{\sin x_2}{x_2} - 9,$$

$$w_2(x_2) = 10 - 10 \frac{\sin x_2}{x_2} \text{ 로 정의되는 함수 } w_1$$

과 w_2 를 이용하면 $f(x_2)$ 는 다음과 같은 가중합으로 표현하고 T-S 퍼지모델을 구성한다.

$$f(x_2) = \frac{\sin x_2}{x_2} = w_1(x_2) \times 1 + w_2(x_2) \times 0.9$$

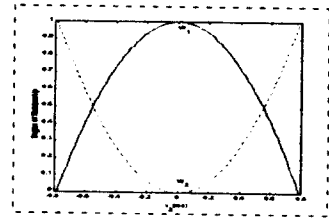


그림 5 x_2 의 멤버쉽 함수

규칙 1 : IF x_2 is about w_1 ,
THEN $\dot{x} = A_{01} x + B_p p + B_r r + B_u u$

규칙 2 : IF x_2 is about w_2 ,
THEN $\dot{x} = A_{02} x + B_p p + B_r r + B_u u$

$$\text{이때, } A_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

제어기의 구조는 다음과 같다.

제어규칙 1 : IF x_2 is about w_1
THEN $u(t) = -F_1 x(t)$.

제어규칙 2 : IF x_2 is about w_2 ,
THEN $u(t) = -F_2 x(t)$.

$$u(t) = - \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) F_i x(t). \quad (41)$$

다음은 그림 5에서 x_2 의 퍼지멤버함수와 식(41)를 이용하여 퍼지제어기를 설계하자.

먼저, $\delta_1 = 2, \delta_2 = 0.46, u_{\max} = 5$ 로 놓고, 식(34), 식(35), 식(36)을 만족하는 해를 MATLAB LMI Control Toolbox를 이용하여 풀어주면 다음을 얻는다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.5932 & -0.2080 & -1.4376 \\ -0.2080 & 4.2185 & -4.0845 \\ -1.4376 & -4.0845 & 6.0099 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = [-0.2397 \ 0.5685 \ 10.5016]$$

$$Y_2 = [-0.0755 \ 0.4868 \ 10.5223]$$

$$F_1 = [31.1804 \ 30.9545 \ 30.2435]$$

$$F_2 = [31.5919 \ 31.2456 \ 30.5433]$$

이를 이용하여 제어기를 설계하면, 각각의 상태는 그림 6과 같다. 모든 상태들이 처음에는 불안하지만 빠르게 수렴하는 것을 보여준다.

오차 미분방정식(38)이 식(37)을 만족하도록 $M=0$ 으로 선택하여 시스템을 구성했다. 여기서 모델의 입력 v 는 크기(Amplitude)가 5이고 주기가 10초이며 듀티사이클(duty cycle)이 50%인 구면파를 사용했다. 그림 7과 그림8의 모의 실험 결과처럼, 모델을 추적하는 것뿐만이 아니라 다른 상태변수들도 안정되면서 잘 추적하는

결과를 보여주고 있다.

제 5 장 결 론

본 논문에서는 선형분해법을 이용하여 시스템을 구성하고 선형행렬부등식과 퍼지규칙을 이용하여 안정화시키는 퍼지제어기를 구성하여 모델을 추적하기 위한 오차다이나믹을 구성하여 기존의 입·출력제어기보다 우수한 추적성능을 가지고 있음을 보였다. 본 논문에서 제안한 선형행렬부등식과 분해법을 시스템분석에 적용하면 안정한 시스템을 설계할 수 있고 여기에 퍼지제어규칙을 적용하면 어떠한 시스템도 설계가 가능하다는 점이다. 이는 실용적인 면에서도 큰 장점이 아닐 수 없다.

참 고 문 헌

- [1] T.Takagi and M.Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", *IEEE Trans. on SMC* 15, no.1 (1985) 116-132.
- [2] L. EL Ghaoui and G. Scorletti, "Control of Rational Systems using Linear-Fractional Representations and Linear Matrix Inequalities", *Automatica*, Vol. 32, No.9, pp. 1273-1284, 1996.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [4] J.-J. E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991.
- [5] G. Strang, *Linear Algebra And Its Application*, 3rd Ed., HBJ Inc., 1988.

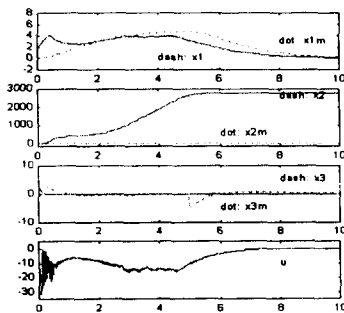


그림 4 입·출력 선형화 제어기:
모델의 근이 -1 중근

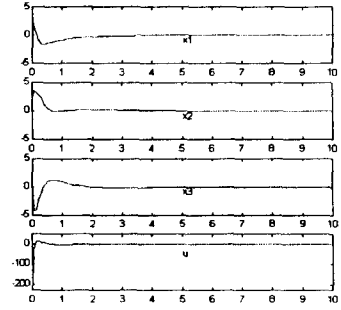


그림 6 선형행렬부등식과
분해법을 이용한 제어기

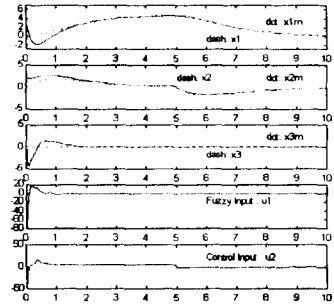


그림 7 선형행렬부등식과
분해법을 이용한 T-S
퍼지제어기:
모델의 근이 -1 중근

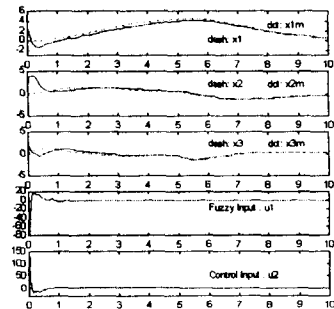


그림 8 선형행렬부등식과
분해법을 이용한 T-S
퍼지제어기:
모델의 근이 -1 삼중근