

스프레드시트를 이용한 2축 휨과 압축을 받는 철근 콘크리트 단주의 해석 및 설계

Analysis and Design of RC Short Columns in biaxial bending and Compression using Spreadsheets

진 치 섭* 엄 장 섭** 노 경 배*** 박 현 재**** 이 승 훈*****
Jin, Chi Sub Eom, Jang Sub Noe, Kyong Bae Park, Hyun Jae Lee, Seung Hoon

ABSTRACT

This study developed practical computer program COL2 to design of generic shape reinforced concrete short columns subjected to combined compression and biaxial bending. The program COL2 has been developed for user-friendly environment using Excel 97 for windows 95. Several examples including for analysis of geometrically complex column sections subjected biaxial bending are included in this paper

1. 서 론

구조물 설계에서, 축하중과 2축휨을 동시에 받는 기둥을 자주 접하게 된다. 이러한 기둥을 해석하고 설계하기 위해 엄밀 해석법과 Bresler 역하중법, Bresler 등하중법 및 PCA 등하중법 등의 근사 해법이 있다.^[1] 그러나 이러한 근사해법은 주로 직사각형이나 원형단면과 같은 특정단면에 대해서만 유용하게 쓰이므로 임의 단면의 철근 콘크리트 기둥에 대한 해석과 설계는 많은 어려움이 있다. 컴퓨터의 빠른 발전으로 사용자 위주 환경의 프로그래밍이 가능하게 되었으며, 프로그램 결과치나 데이터를 표시할 수 있고 그래픽 기능 및 여러 함수를 내장하고 있는 스프레드시트가 개발되어 공학계산에 이를 이용할 수 있게 되었다. 따라서 본 연구에서는 스프레드시트 프로그램 중의 하나인 Excel 97을 이용하여 일반적으로 널리 이용되는 원형, 사각형, 트랙형, 팔각형 및 그에 따른 중공단면과 불규칙한 단면의 해석 및 설계를 사용자와의 대화식 입출력 형태로 작성한 GUI(Graphic User Interface) 환경의 컴퓨터 프로그램 COL2를 작성하였다. 프로그램 COL2에서는 Green 정리를 이용하여 단면의 역학적 성질을 계산하고, 주어진 편심에 대한 극한강도와 P-M 상관도를 구할 수 있게 작성되었다. 프로그램 COL2의 타당성 여부를 확인하기 위해 사각형 단면, L형단면, 원형단면에 관한 타 연구와의 해석 및 설계 결과와 비교하였다.

2. 프로그램 COL2의 입력 및 출력

프로그램 COL2의 입력 데이터는 단면 형상, 단면 치수, 철근의 항복응력 σ_y , 철근 수, 철근 종류,

*정회원, 부산대학교 토목공학과 교수

**창신대학 토목과 조교수

***부산대학교 토목공학과 박사수료

****부산대학교 토목공학과 박사과정

*****부산대학교 토목공학과 석사과정

콘크리트 설계기준강도 σ_{ck} , 작용하중이며, 그림 2~4에 입력 과정을 나타내었다. 데이터의 입력이 끝나면, 전체좌표계 $X-Y$ 에 대한 단면의 소성중심 X_{PC} , Y_{PC} 가 구해지며 이에 대한 작용 하중의 편심 e_x 와 e_y 가 구해진다(그림 5). 그 다음 중립축의 가정에 따른 각 단계의 극한 강도가 구해지며 이것을 토대로 콘크리트 표준 시방서에 따라 강도 감소 계수 ϕ 를 고려한 P-M 상관도가 그려진다(그림 6).^[2]

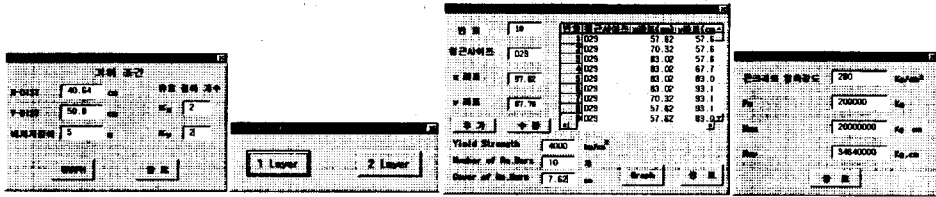


그림 1 입력 대화 상자

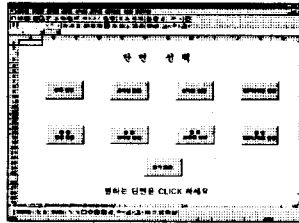


그림 2 단면 선택

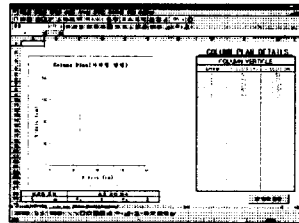


그림 3 단면 기하 조건

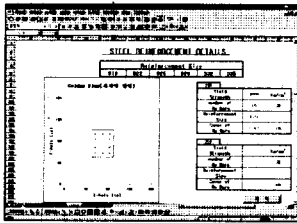


그림 4 철근 상세

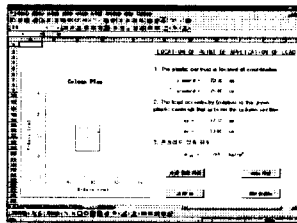


그림 5 하중 상세

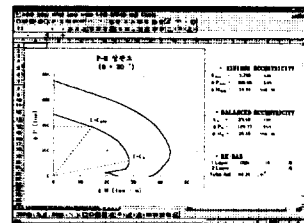


그림 6 P-M 상관도

3. 기동 해석의 기본 가정

편심을 받는 기동의 평형방정식은 다음과 같다(그림 7).

$$N = \int \int_{A_c} \sigma_c(X, Y) dXdY + \sum_{j=1}^m \sigma_s(X_j, Y_j) A_s \quad (1)$$

$$M_X = - \int \int_{A_c} Y \sigma_c(X, Y) dXdY - \sum_{j=1}^m Y_j \sigma_s(X_j, Y_j) A_s \quad (2)$$

$$M_Y = \int \int_{A_c} X \sigma_c(X, Y) dXdY + \sum_{j=1}^m X_j \sigma_s(X_j, Y_j) A_s \quad (3)$$

여기서, N 은 축하중, M_X 와 M_Y 는 각각 X 축과 Y 축에 대한 모멘트이며 $\sigma_c(X, Y)$ 와 A_c

는 각각 콘크리트 응력함수와 단면적이고 j 는 철근번호이다. 또한 $\sigma_s(X_j, Y_j)$ 와 A_s 는 각각 철근 응력함수와 철근의 단면적이고 m 은 단면에서의 철근의 총 개수를 나타낸다. 압축응력과인장응력은 각각 (+)와 (-)이다. 식(1)~(3)을 단순화하면 극한강도 N_u 와 극한모멘트강도 M_{uX} , M_{uY} 는 식(4)~(6)과 같다.

$$N_u = 0.85\sigma_{ck} \int_{A_{ec}} dXdY + \sum_{j=1}^m \sigma_s A_s \tag{4}$$

$$M_{uX} = -0.85\sigma_{ck} \int_{A_{ec}} YdXdY - \sum_{j=1}^m \sigma_s A_s Y_j \tag{5}$$

$$M_{uY} = 0.85\sigma_{ck} \int_{A_{ec}} XdXdY + \sum_{j=1}^m \sigma_s A_s X_j \tag{6}$$

여기서, A_{ec} 는 콘크리트 압축축 단면적이고, σ_s 는 철근응력이다. 그림 8은 2축 휨 상태의 기둥 단면의 변형률과 등가응력을 나타낸다.

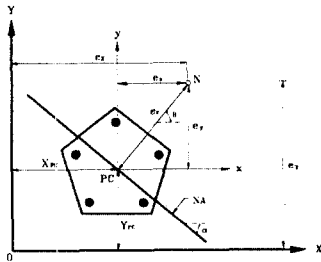


그림 7 편심을 받는 기둥 단면

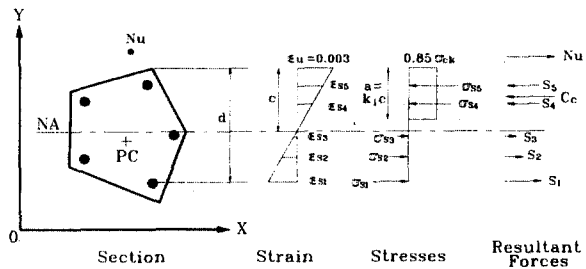


그림 8 극한하중에서 2축휨을 받는 기둥 단면

4. Green 정리를 이용한 단면 특성 계산

복잡한 형상의 기둥 단면에서는 식(4)~(6)의 단면적 및 단면 1차 모멘트의 계산이 매우 복잡하다. 그러나 Green 정리를 이용하면 이러한 계산을 간단히 할 수 있다. Green 정리는 임의의 평면영역에 대한 이중적분을 영역의 경계에 따른 선적분으로 변환하는 것이다. 경계 C_1 , C_2 를 갖는 $x-y$ 면상의 폐영역 R 을 나타내는 그림 9를 고려하고, 함수 $f(x, y)$ 와 $g(x, y)$ 가 R 을 포함하는 임의의 영역에서 연속 편미분 $\partial f/\partial y$, $\partial g/\partial x$ 등을 갖는 연속함수라 할 경우, Green 정리는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (f dx + g dy) \tag{7}$$

식(7)의 선적분을 동일 차원의 경계에 걸쳐 수행하면 임의의 단면 형상의 면적을 계산하는 식을 유도할 수 있다^[3].

$$A = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx) \tag{8}$$

주어진 다각형의 꼭지점 좌표를 (+)가 되도록 X, Y 좌표를 잡으면 식(8)은 다음과 같이 쓸 수 있다 (그림 10).

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \tag{9}$$

여기서, $a_i = X_i Y_{i+1} - Y_i X_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ [꼭지점 $n+1$ 은 꼭지점 1과 같다])이다. 주축

에 관한 단면 1차모멘트는 면적 A 를 구하는 식과 유사하게 다음과 같은 식으로 유도할 수 있다.

$$A\bar{X} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n a_i (X_i + X_{i+1}), \quad A\bar{Y} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n a_i (Y_i + Y_{i+1}) \quad (10)$$

여기서, \bar{X} 와 \bar{Y} 는 면적 도심의 좌표이다.

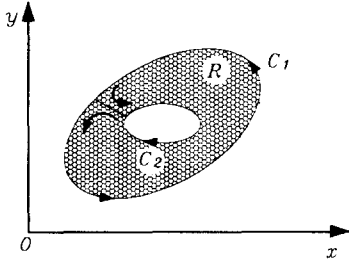


그림 9 경계 C를 갖는 폐영역 R

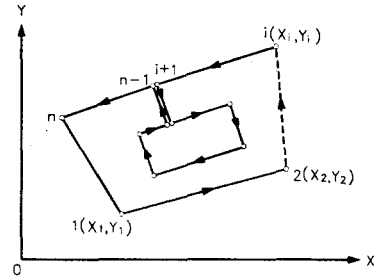


그림 10 Green 정리를 위한 단면 꼭지점 번호

5. 기둥 단면의 소성중심 계산

소성중심의 위치는 다음 식으로 계산된다

$$X_{PC} = \frac{0.85\sigma_{ck}A\bar{X} + \sum_{j=1}^m A_s \sigma_{sy} X_j}{0.85\sigma_{ck}A + \sum_{j=1}^m A_s \sigma_{sy}}, \quad Y_{PC} = \frac{0.85\sigma_{ck}A\bar{Y} + \sum_{j=1}^m A_s \sigma_{sy} Y_j}{0.85\sigma_{ck}A + \sum_{j=1}^m A_s \sigma_{sy}} \quad (11)$$

여기서 A 는 콘크리트 압축측 단면적이며 식(9)로 계산된다.

\bar{X} 와 \bar{Y} 는 콘크리트 압축측 단면의 도심 좌표로서 식(10)로 계산된다.

6. P-M 상관도를 그리기 위한 수치기법

프로그램 COL2는 입력한 하중 P , M_x 와 M_y 에 따라 편심거리 e_n 과 편심각 θ_1 이 계산된다. 중립축 y_n 을 전단면 압축측에서 소정의 간격 Δy 만큼 전단면 인장측까지 이동과 동시에, 중립축을 일정한 회전각 $\Delta\alpha$ 으로 회전시키면서 각 단계의 극한강도 N_u 와 극한 모멘트강도 M_{ux} , M_{uy} 를 식(4)~(6)으로 산출하며, $X-Y$ 좌표에 대한 편심은 식(12)로 계산한다.

$$e_x = \frac{M_{uy}}{N_u}, \quad e_y = \frac{M_{ux}}{N_u} \quad (12)$$

식(13)~(14)로부터 N_u 의 위치를 결정할 수 있다.

$$e_n = \sqrt{(X_{PC} - e_x)^2 + (Y_{PC} - e_y)^2} \quad (13)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{e_y - Y_{PC}}{e_x - X_{PC}} \right) \quad (14)$$

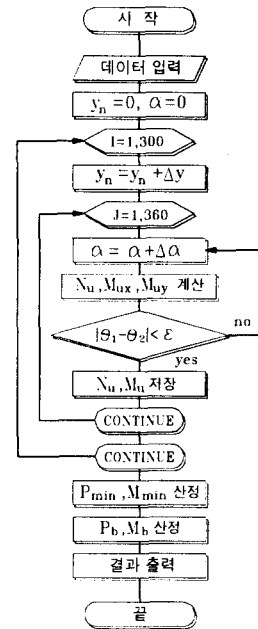


그림 11 프로그램 흐름도

입력한 하중에 대한 편심각 θ_1 과 계산된 편심각 θ_2 의 차의 절대값이 허용오차(ϵ)보다 작으면, 각 단계에서 구한 극한강도 N_u 와 극한모멘트강도 M_{ux}, M_{uy} 를 저장한다. 그리고 저장한 값에서 P_{min} , M_{min} 과 P_b , M_b 를 산정한 다음 PM 상관도를 작성한다. 이때 Δy 와 $\Delta \alpha$ 의 산정은 해석의 경제성과 밀접한 관계가 있으므로 본 프로그램에서는 Δy 는 300단계로, $\Delta \alpha$ 는 360단계로 구분하여 산출토록 하였다.

7. 수치 예 및 고찰

본 연구를 통하여 작성한 기동해석 및 설계 프로그램의 검증을 위해 Ehsani and Rosenbaum^[4], Dall'Asta and Dezi^[5] 의 해석결과와 엄밀해석법의 해석결과를 프로그램의 해석결과와 비교하였고, 해석결과 비교를 위해서 강도감소계수 ϕ 는 고려하지 않았다. Ehsani and Rosenbaum이 작성한 프로그램으로 해석한 그림 12의 사각형단면을 본 연구의 해석결과와 비교하여 그림 14에 나타내었고, Asta and Dezi 가 해석한 그림 13의 L형단면을 본 연구의 해석결과와 비교하여 표 1에 나타내었고, 엄밀해석법으로 해석한 그림15의 원형단면을 본 연구의 해석결과와 비교하여 표 2에 나타내었다. Ehsani and Rosenbaum와 엄밀해석법에서는 해석시 Whitney의 등가 직사각형 응력 분포를 사용했고, Asta and Dezi 등은 실제 응력-변형률 곡선을 사용하였다. 프로그램 COL2의 해석결과는 Ehsani and Rosenbaum의 결과와 비교하여 약 0.3~2.7% 정도 작게 나타났으며, Asta and Dezi 의 결과보다 약 2.2~3.9% 정도 크게 나타났고 엄밀해석법의 결과와 비교하여 0.1~0.9% 정도 작게 나타났다. 그러나 철근비의 차와 단면의 불규칙성을 고려할 때 5% 이내의 오차는 별 문제가 되지 않는다고 본다.

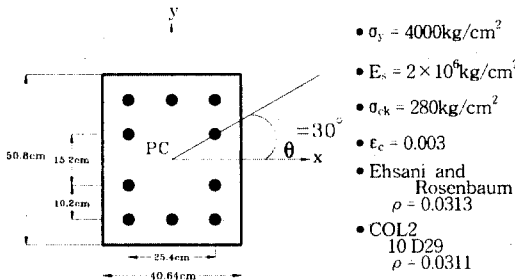


그림 12 Ehsani and Rosenbaum의 해석 단면

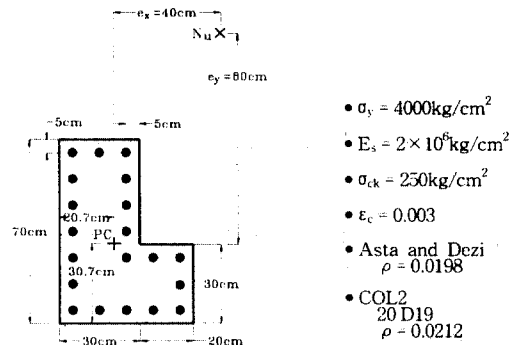


그림 13 Dall'Asta and Dezi의 해석단면

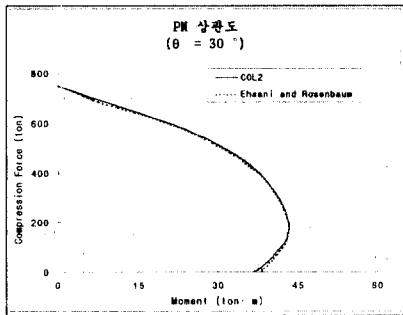


그림 14 Ehsani and Rosenbaum의 해석과의 비교

표 1 Dall'Asta and Dezi의 해석과의 비교

	Asta and Dezi	COL2	오차 (%)
Nu (ton)	50.986	53.078	3.9
Mu (ton · m)	45.603	46.638	2.2

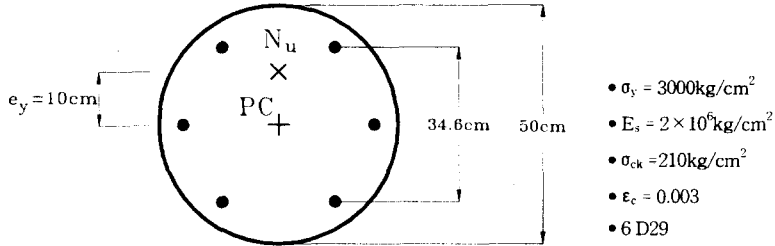


그림 15 엄밀해석법으로 해석한 단면

표 2 엄밀해석법에 의한 해석과의 비교

	엄밀해석법	COL2	오차 (%)
Nu (ton)	231.272	230.967	0.1
Mux (ton · m)	-23.759	-23.556	0.9

8. 결 론

본 연구로부터 얻은 결론은 다음과 같다.

- 1) 일반적으로 널리 이용되는 단면과 불규칙 단면이 1축 또는 2축 편심 축하중을 받을 때 철근콘크리트 단주의 해석 및 설계 방법을 제시하였고 임의 점에서의 극한강도를 계산하고 P-M 상관도를 그릴 수 있는 프로그램 COL2을 작성하였다.
- 2) 복잡한 수치연산에 스프레드시트가 유용하게 이용될 수 있음을 보여주었다.
- 3) 실제 콘크리트 응력-변형률을 사용하는 다른 컴퓨터 프로그램 결과를 비교한 결과, Whitney의 등가 직사각형 응력 분포는 실제 응력-변형률 분포를 잘 나타내는 모델임을 알 수 있었다.

9. 참고문헌

- [1] "Notes on ACI 318-95 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications", PCA, pp. 12.1-12.25, 1996
- [2] 건설교통부, "콘크리트표준시방서", 대한토목학회, pp. 25-82, 1996
- [3] Marin, J., "Computing Unidimensional Normal Stress Resultants", Journal of Structural Division, ASCE, V. 106, No. ST1, pp. 233-245, 1980
- [4] Ehsani, M. R., Rosenbaum, D. B., "Biaxial Bending of Reinforced Concrete Columns", Design of Structural Concrete, Computer Program Series/COM-2, ACI, 1985.
- [5] Dall'Asta, A., and Dezi, L., "Design of RC Sections with Generic Shape under Biaxial Bending", Journal of Structural Engineering, ASCE, V. 118, No. 4, pp. 1138-1143, 1992