

내부 불연속 요소를 사용한 콘크리트의 파괴진행해석

Analysis of Progressive Fracture in Concrete using Finite Elements with Embedded Discontinuous Line

송하원*
Song, Ha-Won

우승민**
Woo, Seung-Min

김형운***
Kim, Hyoung-Woon

ABSTRACT

In this paper, finite element with embedded discontinuous line is introduced in order to avoid the difficulties of adding new nodal points along with crack growth in discrete crack model. With the discontinuous element using discontinuous shape function, stiffness matrix of finite element is derived and dual mapping technique for numerical integration is employed.

Using the finite element program made with employed algorithms, algorithm is verified and fracture analysis of simple concrete beam is performed.

1. 서 론

콘크리트 구조물은 여러 가지 이유에 의하여 균열이 콘크리트 내에 발생하고 발생한 균열은 국소화 되어 진행되며, 국소화된 불연속면의 성장과 진행에 의하여 콘크리트 구조물 전체의 거동이 지배되고 구조물은 궁극적인 파괴에까지 이르게 된다. 이러한 콘크리트 파괴해석은 콘크리트의 연화(softening)특성에 의한 변형률국소화(strain localization) 및 균열에 대한 모델링과 생성된 균열의 진행에 따른 거동분석이 중심적인 내용이며 콘크리트 파괴거동의 예측은 공학적으로 큰 의미를 갖고 있다. 콘크리트 변형률국소화 현상과 진행성 파괴에 대한 연구는 콘크리트 파괴역학의 발전과 함께 활발히 수행되어 왔으나, 아직도 불연속을 표현하는 연속체 역학의 한계와 수치해석상의 어려움 때문에 일반화된 모델링과 그에 따른 프로그램의 개발은 미흡한 상황이다.

콘크리트 균열의 유한요소해석 방법으로는 균열을 연속체로 처리한 분포균열(smearred crack)방법¹⁾과 균열을 기하학적 불연속으로 처리한 이산균열(discrete crack)방법²⁾이 있다. 분포균열방법은 균열

* 정희원, 연세대학교 토목공학과 부교수

** 정희원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

*** 연세대학교 토목공학과 석사과정

로 인한 불연속을 제대로 표현하지 못하는 단점이 있고, 이산균열방법은 국소화된 균열을 잘 표현하나 균열이 유한요소경계를 따라 진행하여야 하고 새로운 요소의 분할을 해야하는 단점을 가지고 있다.

본 연구에서는 기존의 이산균열방법의 단점을 보완하기 위해 요소 안에 불연속면을 갖는 불연속요소를 사용한다. 즉 균열이 발생하는 콘크리트를 변위의 불연속이 발생하는 연속체로 취급하여 지배방정식을 전개하고, 불연속 형상함수를 이용함으로써 이산균열의 단점인 추가절점이나 요소의 재분할을 피하고 요소 내에서 변위의 불연속을 나타낼 수 있는 불연속 유한요소^{3),4)}를 사용하여 콘크리트 파괴진행을 해석할 수 있는 유한요소 알고리즘을 전개하며 이에 따라 개발된 유한요소 프로그램을 이용하여 콘크리트 파괴해석을 수행하고자 한다.

2. 내부 불연속면을 고려한 수정가상일의 원리

콘크리트 균열의 유한요소 정식화를 위해서는 균열에 의한 불연속면을 충분히 표현할 수 있는 수정가상일의 원리(Modified Principle of Virtual Work Equation)를 사용한다. 수정가상일의 원리는 Malvern⁵⁾에 의해 제안된 것으로 대상 연속체가 내부 불연속면에 의하여 두부분으로 나누어지며 나누어진 각각의 연속체에 대하여 가상일의 원리를 적용하였다. 즉, 그림 1과 같이 내부 불연속면 S_{12} 에 의해 연속체 V 가 V_1, V_2 의 두 부분으로 나누어지는 것으로 가정하고, 각각에 가상일의 원리를 적용하면 식(1)과 같은 수정가상일의 원리를 얻을 수 있다. 특히, t_i 는 내부 불연속면에서의 구성관계에 의해 결정되어지는 내부 표면력이다.

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S \bar{T}_i \delta \bar{u}_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_{12}} t_i^{(2)} (\delta u_i^{(2)} - \delta u_i^{(1)}) dS \quad (1)$$



그림 1 Continuum with discontinuous line

시간의 흐름에 따라 진행되는 내부 불연속면의 물리적 거동을 표현하기 위해서 식(1)의 수정가상일의 원리를 증분의 형식으로 정식화하였다. 시간의 흐름에 따른 내부 불연속면을 가진 연속체를 가정해 볼 때 수정가상일의 원리는 시간단계 t_1 과 $t_2 (= t_1 + dt_1)$ 에서 각각 식(2)과 식(3)으로 나타낼 수 있으며 시간의 흐름에 따라 연속체와 불연속면에서의 변위가 선형거동을 한다고 가정하면 연속체의 응력과 변형을 그리고 불연속면에서의 표면력과 미끄러짐 변위 사이의 구성방정식은 식(4)와 같이 표현할 수 있다. 식(4)에서 L_{ijkl} 는 연속체의 구성텐서이며, η_{ij} 는 변형의 불연속면 Γ_{sb} 에 작용하는 표면력의 수직, 수평분력과 불연속면의 수직, 수평변위와의 관계를 나타내는 불연속면의 구성텐서이다.

$$\int_{\Omega'} \sigma_{ij} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega'} f_i \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \bar{T}_i \delta(\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sb}} t_i \delta(\Delta d_i) d\Gamma \quad (2)$$

$$\int_{\Omega'} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega'} (f_i + \Delta f_i) \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s} (\bar{T}_i + \Delta \bar{T}_i) \delta(\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sb}} (t_i + \Delta t_i) \delta(\Delta d_i) d\Gamma \quad (3)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = L_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}, \quad \Delta t_i = -\eta_{ij} \Delta d_j \quad (4)$$

식(3)에서 식(2)을 뺀 후, 식(4)를 대입하면 불연속면을 가진 연속체의 증분형 수정가상일의 원리 식(5)를 얻는다.

$$\int_{\Omega'} L_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) d\Omega = \int_{\Omega'} \Delta f_i \delta(\Delta u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_s} \Delta \bar{T}_i \delta(\Delta u_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_{sb}} l_{ij} \Delta d_j \delta(\Delta d_i) d\Gamma \quad (5)$$

3. 내부 불연속면을 갖는 유한요소

유한요소의 정식화를 위하여 연속체 영역 Ω 는 N 개의 절점과 M 개의 유한요소를 가지며 내부 불연속면은 NL 개의 국소화 절점으로 이산화할 수 있다.(그림2) 이때 요소체적 Ω^e 의 변위영역에서 절점변위 \mathbf{u} 와 국소화 절점변위 \mathbf{d} 는 식(6)과 같이 표현할 수 있고 변형률의 증분은 식(7)과 같다.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{N}^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (6)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{(\alpha)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}^{(\beta)} \cdot \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (7)$$

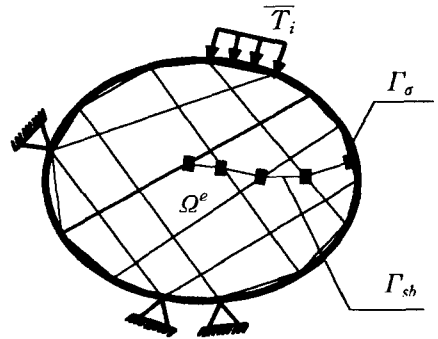


그림 2 Finite element discretization of domain

여기서, 윗첨자 α, β 는 각각 연속과 불연속을 의미하며 식(6)에서 $\mathbf{N}^{(\alpha)}, \mathbf{N}^{(\beta)}$ 는 다항식으로 표현된 보간함수의 행렬이고 식(7)에서 $\mathbf{B}^{(\alpha)}, \mathbf{B}^{(\beta)}$ 는 적합행렬로서 내부 보간함수 $\mathbf{N}^{(\alpha)}, \mathbf{N}^{(\beta)}$ 의 미분식으로 표현할 수 있다. 즉, 요소의 재생성 등이 없도록 내부 불연속면을 갖는 유한요소의 정식화를 위해서는 연속면의 보간함수 뿐만 아니라 내부 불연속면을 고려한 보간함수가 필요하다.

$\mathbf{B}^{(\alpha)}$ 와 $\mathbf{N}^{(\alpha)}$ 는 일반적인 2차원 평면 유한요소의 적합행렬 및 형상함수이며, $\mathbf{B}^{(\beta)}$ 와 $\mathbf{N}^{(\beta)}$ 는 불연속면의 변위를 선형으로 가정하면 4절점 사변형 요소에 대해 식(8),(9)와 같다. 식(9)의 윗첨자 $+, -$ 는 각각 Γ_{sb} 의 양의 요소 체적 Ω_e^+ 와 음의 요소 체적 Ω_e^- 을 의미한다.

$$[B_i^{(\beta)}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial x}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial N_i^{(\beta)}}{\partial x}\right) \end{bmatrix} \text{ with } i = 1, 2 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} N_1^{(\beta)+} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)d_1 & N_1^{(\beta)-} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)d_1 \\ N_2^{(\beta)+} &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)d_2 & N_2^{(\beta)-} &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)d_2 \end{aligned} \quad (9)$$

앞의 식(6),(7),(8),(9)를 이용하여 증분 수정가상일의 식(5)를 정리하면 유한요소 강성도행렬(12×12) 식(10)을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\Omega\Omega} & \mathbf{K}_{\Omega S} \\ \mathbf{K}_{S\Omega} & \mathbf{K}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{u}} \\ \Delta \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{f}_\Omega \\ \Delta \mathbf{f}_S \end{bmatrix} \quad (10)$$

요소강성의 수치적분을 위해서 그림 3과 같이 불연속면으로 나누어진 두 개의 영역(Ω_e^+ , Ω_e^-)에서는 일반적인 적분방법을 사용하고 요소내의 불연속을 고려할 수 있도록 불연속면 자체에서도 적분점을 사용하여 선적분을 실시하면 강성행렬의 요소는 다음 식(11), (12), (13)으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_{\Omega\Omega} = \sum_i \sum_j \mathbf{B}^{(a)T}(\xi_i, \eta_j): \mathbf{L}(\xi_i, \eta_j): \mathbf{B}^{(a)}(\xi_i, \eta_j)(detJ)_{ij} w_i w_j \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{\Omega S} = \mathbf{K}_{S\Omega}^T = \sum_i \sum_j \mathbf{B}^{(a)+T}(r_i, s_j): \mathbf{L}(r_i, s_j): \mathbf{B}^{(\beta)+}(r_i, s_j)(detJ)_{ij}(detJ^*)_{ij} w_i w_j \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{SS} &= \sum_i \sum_j \mathbf{B}^{(\beta)+T}(r_i, s_j): \mathbf{L}(r_i, s_j): \mathbf{B}^{(\beta)+}(r_i, s_j)(detJ)_{ij}(detJ^*)_{ij} w_i w_j \\ &+ \sum_i \sum_j \mathbf{B}^{(\beta)-T}(r_i, s_j): \mathbf{L}(r_i, s_j): \mathbf{B}^{(\beta)-}(r_i, s_j)(detJ)_{ij}(detJ^*)_{ij} w_i w_j \\ &+ \int_{\Gamma^0} \mathbf{N}^{(\beta)T}[\eta] \mathbf{N}^{(\beta)} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

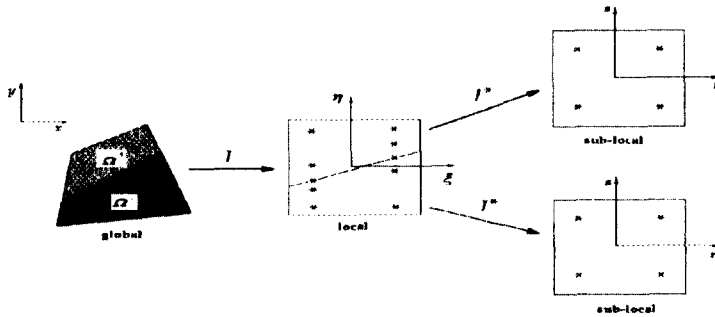


그림 3 Dual mapping technique for numerical integration

4. 콘크리트의 파괴진행 해석

전개된 알고리즘에 의해 작성된 유한요소 프로그램을 검증하기 위하여 그림 4와 같은 단순한 인장 모델에 대해 균열이 발생하였을 때 단위하중($P=1$)에 의한 변위(u) 및 균열개구변위(w)를 계산하였고, 이론치와 비교하였다. 해석에 사용한 선형 인장연화곡선의 기울기는 -100 으로 사용하였으며 이때의 탄성계수는 1 kgf/cm^2 , 포아송비는 0 으로 하였다. 표 1은 수학적인 계산 결과와 유한요소 프로그램에 의한 수치적인 해석결과의 비교이다.

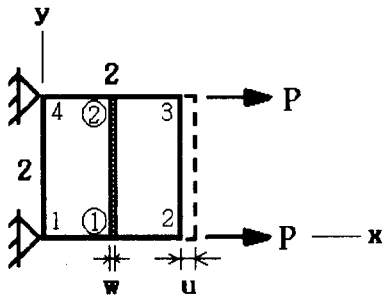


그림 4 Modeling of uniaxial tension

표 1 Comparison of theoretical and numerical results

Displ.	Theoretical result	Numerical result
	x-direction	x-direction
u1	0	0
u2	1.922	1.922330E+00
u3	1.922	1.922330E+00
u4	0	0
w①	0.019	1.941747E-02
w②	0.019	1.941747E-02

또한, 균열 발생후 post-peak이후의 거동을 위해서 하중 대신 변위조절(Displacement control)에 의한 유한요소 해석을 실시하면 그림 5와 같은 하중-처짐 관계를 얻을 수 있으며, 그림 6은 균열이 발생한 요소의 평균화된 응력-변형률관계를 나타낸 것이다. 콘크리트의 탄성계수는 $250,000 \text{ kgf/cm}^2$, 포아송비는 0.18 을 사용하였으며 불연속면의 구성방정식인 인장연화곡선은 그림 7과 같이 선형으로 가정하였다.

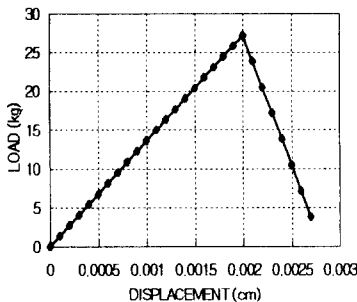


그림 5 Load-displacement diagram

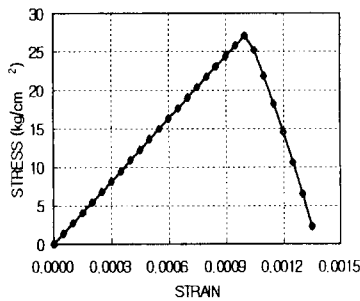


그림 6 Stress-strain diagram

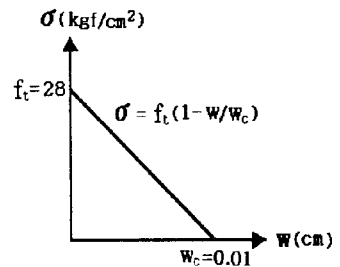


그림 7 Tension softening curve

또한, 그림 8과 같은 초기 노치가 있는 무근 콘크리트 단순보에 대해 파괴 진행면을 표 2의 재료물성치를 사용하여 선형 인장연화곡선으로 가정하고 파괴진행 해석을 실시하였다. 그림 9는 해석결과와 하중과 재하점 아래의 수직처짐 관계를 나타낸 것인데, 대상보의 파괴에 따른 극한하중과 post-peak 이후의 거동을 재현할 수 있었다. 파괴해석시 실험에서 구한 정확한 인장연화곡선을 사용한다면 극한하중의 예측과 연성거동에 대한 파괴진행 해석이 보다 개선될 수 있다고 판단된다.

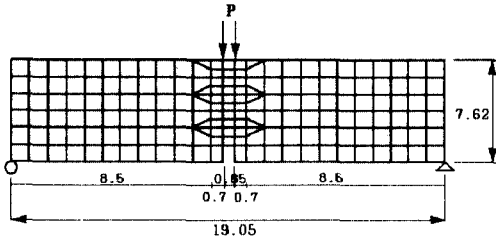


그림 8 Modeling of simple beam with notch

표 2 Material properties of simple beam with notch

Young's modulus (kgf/cm^2)	286,000	Poisson's ratio (ν)	0.2
f_t (kgf/cm^2)	30.3	w_c (cm)	0.0099

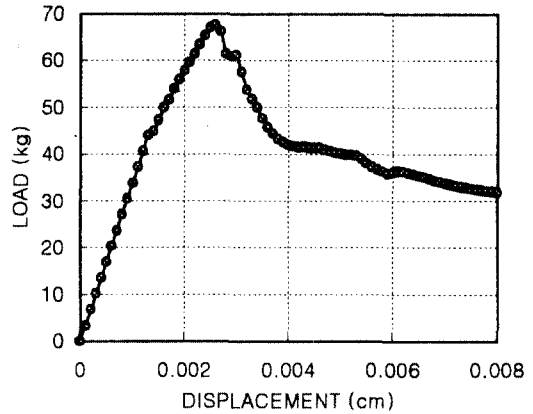


그림 9 Load-displacement diagram

5. 결 론

내부 불연속 요소를 사용한 콘크리트의 파괴진행 해석을 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

- 1) 수정가상일의 원리와 변위에 대한 불연속 형상함수를 사용하여 요소의 분할과 새로운 절점의 추가 없이 파괴진행을 해석할 수 있는 내부 불연속 유한요소의 정식화를 전개하였으며, 이에 따른 유한 요소 프로그램을 개발하였다.
- 2) 단순인장모델을 사용하여 정식화 과정을 검증하고 변위조절에 따른 균열진행해석에 적용하였으며, 초기 노치가 있는 무근 콘크리트 단순보의 파괴진행 해석으로부터 보의 처짐에 따른 최대하중의 예측과 post-peak이후의 거동을 재현하였다.

참고 문헌

1. Z. P. Bazant and B. H. Oh, "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", **RILEM Mater. Struct.**, 16, 1983, pp. 155~177.
2. A. Hillerborg, M. Modeer and P. E. Petersson, "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by means of Fracture Mechanics and Finite Element", **Cement Concr. Res.**, 6, 1976, pp. 773-782.
3. Eduardo N. Dvokin, Andrea P. Assanelii, "2D Finite Element with Displacement Interpolated Embedded Lines: The Analysis of Fracture in Frictional Materials", **Computer Methods in Applied Mecanics and Engineering** 90, 1991, pp. 829-844.
4. Wan, R.G., Chan, D.H. and Morgenstern, N.R., "A Finite Element Method for the Analysis of Shear Bands in Geomaterials", **Finite Element Method in Analysis and Design**, 7, Elsevier, 1990, pp. 129~143.
5. Malvern, L.E., **Introduction to the Mechanics of Continuous Medium**, Prentice-Hall, New Jersey, 1969, pp. 242~243.