

유한요소법을 이용한 침강-압밀 해석

Analysis of Sedimentation and Consolidation by Finite Element Method

김윤승¹⁾, Yun Sung Kim, 이승래²⁾, Seung Rae Lee, 정구영³⁾, Koo Young Chung

¹⁾ 한국과학기술원 토목공학과 석사과정, Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, KAIST

²⁾ 한국과학기술원 토목공학과 부교수, Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, KAIST

³⁾ 삼성물산 건설부문 기술연구소 수석연구원, Senior Researcher, Institute of Technology,
Construction Division, Samsung Industries

SYNOPSIS : A low solid-concentration suspension material is transited to a soil layer through two stages which occur simultaneously, sedimentation and consolidation. While sedimentation occurs in the uppermost part of material, in the remaining accumulated sediment part the soil particles form a continuous structure, so called the 'Terzaghi soil' and this structure consolidates under the weight of upper part. Because of the formation of this structure, a discrete boundary, separating the sediment from suspension is formed. This boundary is called a 'shock boundary' on which kinematic shocks occur. In this study the sedimentation was considered as the solid flux on the standpoint of the Eulerian coordinate system and consolidation as the fluid flux on the standpoint of Lagrangian coordinate system keeping the shock boundary commonly. From this basic understanding, a program for one-dimensional analysis of sedimentation-consolidation was developed using finite element method. The comparison of the results obtained from the program and those of two published papers verified the performance. To apply this program to real dredging field, two data sets obtained from the tests of marine clay in this study were analyzed.

Key words : sedimentation-consolidation, suspension, Terzaghi soil, shock boundary, solid flux

1. 서론

준설토를 매립하여 지반을 조성할 경우, 준설토는 초기에 작은 흙 입자들이 물 속에서 부유하는 상태인 현탁액에서 안정된 지층으로 변해 가면서 침강과 압밀의 두 과정을 거치게 된다. 즉 현탁액의 윗 부분에서는 흙 입자들이 중력에 의해 떨어지는 현상인 침강이 일어나는 동시에 아래 부분에서는 쌓여서 농도가 높아진 흙 입자들이 일정한 구조체를 이루어 자중을 전이 받는 과정, 곧 자중 압밀이 발생한다. 이와 같이 자중 압밀이 일어나는 흙 구조를 Terzaghi의 유효응력 이론의 지배를 받는 흙이라는 의미에서 'Terzaghi 흙'이라 한다. 또한 형성된 Terzaghi 흙과 현탁액 사이에는 뚜렷한 경계가 형성되는데 이 경계에서는 중력 방향으로 하강하던 흙 입자들이 갑자기 멈추게 되므로 이를 '충격경계'(shock boundary)라 부른다. 본 연구에서는 침강은 공간 좌표계(Eulerian coordinate)에서의 입자들의 유출로, 압밀은 물질 좌표계(Lagrangian coordinate)에서의 간극수의 이동에 의한 침하로 간주하고, 이와 같은

이해를 바탕으로 유한요소법을 적용하여 침강-압밀을 동시에 해석할 수 있는 수치해석 프로그램을 개발하였다. 이 프로그램에서는 침강과 압밀에 대해 각기 다른 지배방정식을 적용하고 있으나, 두 과정의 상호 영향은 충격 경계의 이동을 통해 연속적으로 고려되고 있다. 다른 연구자들에 의한 실험 결과 및 본 연구에서 수행한 실험 결과를 이용해 해석 방법의 적합성을 검토하고, 주요 영향 요소를 살펴보았다.

2. 침강-압밀현상의 특징과 영향요소들

2.1 침강

농도가 매우 낮은 현탁액 내의 미소 입자들이 자중에 의해 침강될 때는 Stokes의 법칙에 의해 크고 무거울수록 더 빨리 떨어지므로 입자들의 크기에 따른 분리(segregation)현상이 일어나게 된다. 그러나 농도가 더 높을 경우에는 입자들 사이의 상호작용이 커져 여러 가지 크기와 모양의 미소 입자들이 응집된 후 한 덩어리가 되어 동일한 속도로 침강함으로써 분리 현상이 일어나지 않게 된다. 이와 같은 침강 현상을 방해된 침강(hindered settling)이라고 부른다. 이를 '방해된' 침강이라고 부르는 이유는 한 입자의 침강이 다른 입자들에 의해 방해받기 때문인데, 이웃한 입자들의 침강에 의해 생긴 물의 흐름 때문에 저항력(drag force)이 증가하여 침강 속도가 감소하게 되는 것이다. 따라서 입자의 침강 속도는 입자 농도에 대한 단조 감소 함수로 정의 할 수 있게 된다.

$$v_s = v_s(\phi_s) \quad (1)$$

v_s = 흙 입자의 침강 속도, ϕ_s = 입자의 농도

Kynch(1952)는 이와 같이 침강 속도가 입자의 농도 증가에 따라 감소한다는 가정 하에 연속 방정식만을 이용하여 시간에 따른 현탁액의 변화를 예측할 수 있는 이론을 최초로 제시하였고 이 이론은 화학공학 및 환경공학 분야에서 폭 넓게 사용되어 왔다. Eulerian 좌표계에서 흙 입자가 들어오고 나가는 것을 고려하면 식(2)와 같이 질량 보존의 법칙을 나타내는 지배 방정식을 얻을 수 있는데, Kynch는 이를 침강에 대한 지배 방정식으로 이용하였다.

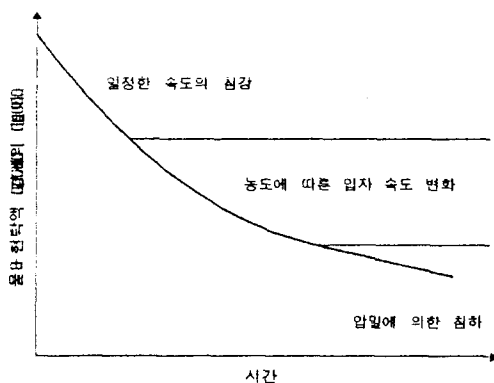


그림 1. 침강-압밀 과정의 진행

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial \phi_s} \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = \frac{\partial \phi_s}{\partial t} + V(\phi_s) \frac{\partial \phi_s}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ϕ_s = 입자의 농도, $J = \phi_s v_s$ = 흙 입자의 유출(flux)

위의 식에 대해 Kynch가 지적했듯이 투수 바닥 면 쪽으로 갈수록 입자 농도가 커지는 조건, 곧 침강이 일어나기 위한 조건은 식(3)과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_s} = V(\phi_s) < 0 \quad (3)$$

2.2 압밀

현탁액의 침강시 충격경계 아래 부분은 더 이상 침강이 일어나지 않는 구조체인 Terzaghi 흙으로 구성되어있다. Kynch의 침강 이론에서 이 부분은 침하를 일으키지 않는 것으로 간주되지만 실제로는 자중에 의한 압밀이 발생된다. 이와 같이 동시에 발생하는 침강-압밀에 의해 현탁액과 물 사이의 경

계가 침하 하는 것을 시간에 따른 곡선으로 나타낸 것을 침강 곡선이라 하며, 그림 1과 같다.

현탁액의 침강-압밀 과정에서의 자중 압밀은 초기의 흙 밀도가 매우 낮고(즉, 간극비가 매우 크고) 변형 량이 큰 압밀 현상이 된다. 따라서 Gibson 등(1967)에 의한 대변형 자중압밀 이론이 해석에 적합하다고 여겨져 사용하였다. Gibson 등은 유효응력과 투수계수가 간극비만의 함수라고 가정하고 다음과 같이 간극비만을 독립변수로 하는 압밀 지배 방정식 식(4)를 유도하였다.

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{(1+e)\gamma_w} \Delta\gamma_s - C_F \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right] = 0 \quad (4)$$

$$e = \text{간극비}, \quad k = \text{투수계수}, \quad \Delta\gamma_s = \gamma_s - \gamma_w, \quad \sigma' = \text{유효응력}, \quad C_F = \frac{-k}{(1+e)\gamma_w} \frac{\partial \sigma'}{\partial e}$$

이 때 압밀 계수 C_F 의 값은 대체로 상수 값을 가진다고 알려져 있다.

여기서 z 는 간극수를 제하고 흙 입자의 높이만을 재는 reduced coordinate로, 이는 입자와 같은 속도로 이동하는 Eulerian 좌표계인 time-dependent Eulerian 좌표계(Schiffman 등, 1985) x 와의 사이에 다음 식(5)와 같은 관계를 가진다.

$$z(x) = \int_{datum}^{x(t)} [1 - n(x(t))] dx = \int_{datum}^{x(0)} [1 - n(x(0))] dx \quad (5)$$

$n(x(t)) =$ 시간 t 일 때 x 에서의 간극률, $n(x(0)) =$ 초기의 x 에서의 간극률

2.3 투수계수와 입자 침강 속도

Terzaghi 흙에서 투수계수는 간극을 통한 물의 흐름이 수월한 정도를 나타내는 계수이다. 방해된 침강에서 이웃 입자에 의한 '방해'는 입자 속도 관계식으로 나타나므로 이 경우에도 입자 속도와 투수계수가 일정한 관계를 가지리라고 예측할 수 있다. 따라서 Darcy의 법칙과 질량 보존 방정식을 이용하면 식(6)과 같이 현탁액 상태에서의 입자 속도와 투수계수 사이의 관계식을 구할 수 있다(Pane & Schiffman, 1985). 따라서 침강-압밀 해석에 있어 투수계수 관계식과 입자 침강 속도의 관계식은 동등하다고 볼 수 있다.

$$v_s = \frac{(\gamma_s - \gamma_w)}{\gamma_w} \frac{k(e)}{(1+e)} \quad (6)$$

3. 유한요소법을 이용한 침강-압밀 해석 프로그램 개발

침강과 압밀에 대한 연구는 각각 화학공학과 지반공학 분야에서 독립적으로 발전해 왔으나 Been과 Sills(1981)를 시초로 하여 최근까지 침강-압밀의 복합과정을 연구하려는 이론적, 실험적 시도가 다양하게 있어왔다. 그러나 대부분의 이론적 시도가 침강-압밀을 두 과정 중 어느 하나를 해석하는 이론적 모델을 이용하여 통합하려는 시도였으므로, 본 연구에서는 침강과 압밀이 적용되는 각각의 부분에 다른 지배방정식을 적용하여 수치해석함으로써 침강-압밀 현상을 보다 실제에 가깝게 모델링 하고자 하였다.

3.1 침강과 압밀의 경계 (충격경계)

현탁액이 침강-압밀현상을 보일 때는 모두 세 부분의 경계가 관찰된다. 첫째는 물과 현탁액 사이의 경계로, 이 경계는 총 질량 보존법칙을 적용하면 Eulerian 좌표계 내에서 그 위치를 찾을 수 있다. 두

번째는 불투수 밑면으로 압밀의 해석에서 잘 알려진 대로 불투수 조건을 적용할 수 있다. 세 번째가 침강과 압밀의 경계가 되는 충격경계이다.

충격경계는 침강하던 입자들이 Terzaghi흙을 이루게 되는 농도인 변환 농도에서 형성되며, 침강이 진행됨에 따라 점차 위쪽으로 이동한다. 이때 변환 농도는 흙 입자의 모양, 성질 및 용수의 성질에 의해 결정되며, 침강 실험 결과를 분석함으로써 얻을 수 있다. 즉, 침강이 모두 종료되고 압밀이 시작되는 것으로 여겨지는 시점(침강 곡선의 기울기가 급히 감소되는 시점)에서의 침전물의 높이로부터 침전된 Terzaghi흙의 평균 농도 ϕ_s 를 계산했을 때, 이 값은 그 동안 진행된 압밀의 영향으로 변환 농도 ϕ_{max} 에 비해 적을 것이다. 따라서 침강 실험으로부터 대략적인 변환 농도 ϕ_{max} 값을 예측할 수 있다(Pane & Schiffman, 1997).

식(2)를 침강의 지배 방정식으로 사용하여 해석할 때, 충격경계에 대한 경계조건이 필요하게 된다.

충격경계에서는 침강이 종료되므로 입자의 유출(flux)은 충격경계를 지나면 갑자기 0이 된다. 따라서 충격경계에서는 flux jump가 생긴다. 이 값은 다음과 같이 정의된다.

$$[J(\phi(x))] = \lim_{b \rightarrow x^+} J(\phi(b)) - \lim_{a \rightarrow x^-} J(\phi(a)) \quad (7)$$

충격경계를 x_{bot} 이라 하면, 충격경계에의 값은 다음과 같다.

$$[J(\phi(x_{bot}))] = -v(\phi_{x_{bot}})\phi_{x_{bot}} \quad (8)$$

3.2 침강-압밀 해석 프로그램

개발된 프로그램은 충격경계 위 부분에는 식(2)를 지배방정식으로, 아래 부분에는 식(4)를 지배방정식으로 하여 유한요소 수식화하였고, 시간 적분에서의 오차를 최소화하기 위하여 Newton의 반복과정을 적용하였다. 그림 2에 해석과정 흐름도를 나타내었다.

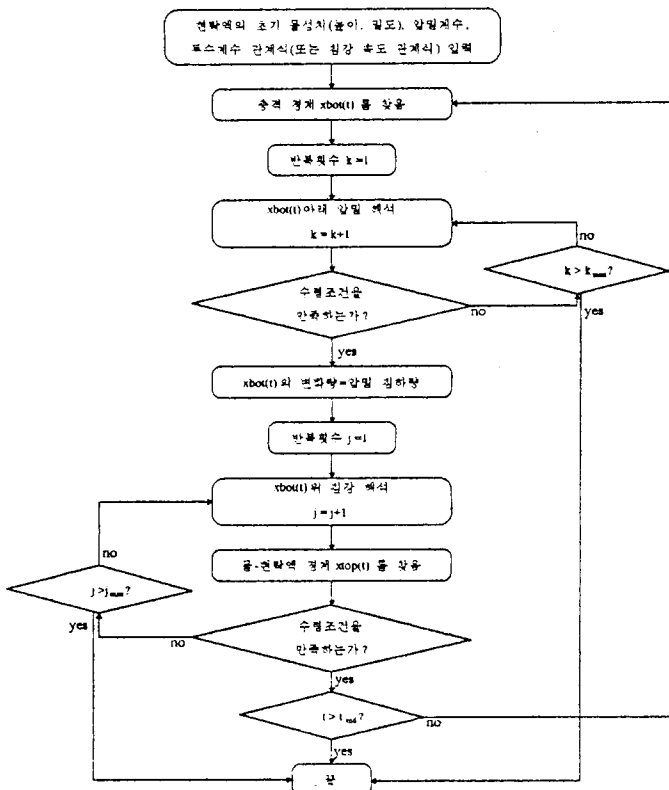


그림 2. 프로그램의 흐름도

4. 검증예제 해석

4.1 Pane과 Schiffman(1997)의 실험 결과

Pane과 Schiffman은 kaolin을 이용한 침강 실험으로부터 점토 현탁액의 투수계수와 간극비 간의 관계를 제안하였고 회귀분석을 통해 상수 C와 D의 값을 결정하였다. 실험에 사용된 Speswhite kaolin의 성질과 투수계수 관계식은 표 1과 같다.

표 1. Speswhite kaolin의 물성과 투수계수 관계식

Sample	Liquid limit(%)	Plastic limit(%)	Specific gravity	Clay fraction(%)	Activity	Permeability, k(m/s)
Speswhite kaolin	53	32	2.60	75	0.28	$k = Ce^D, C = 1.3 \times 10^{-9} \text{ m/sec}$ $D = 3.21$

한편, 침강과 압밀 사이의 변환 농도인 ϕ_{max} 에 대응하는 간극비 값인 변환 간극비 e_m 은 30으로 제안되었다. 압밀계수를 $C_r = -2.0 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{sec}$ 로 가정하여 개발된 프로그램으로 예측한 값과 실측치를 그림 3과 같이 비교해 보았다. 여기서 B&S의 방법이란 Been과 Sills가 이용한 가상하중 적용법으로, 침강 과정을 가상하중에 의한 압밀 과정으로 간주하여 압밀 지배 방정식만으로 침강-압밀을 해석하는 방법이다. 이 방법을 이용한 경우에는 본 연구의 결과와는 달리 침강 종료 시점을 정확히 나타내지 못한다. 이는 본 연구에서는 압밀과 침강의 영역을 구분하여 각각 다른 해석 과정을 적용하는데 반해 B&S의 방법은 압밀이론만을 적용함으로써 충격경계에서의 농도의 불연속을 무시하기 때문으로 보인다.

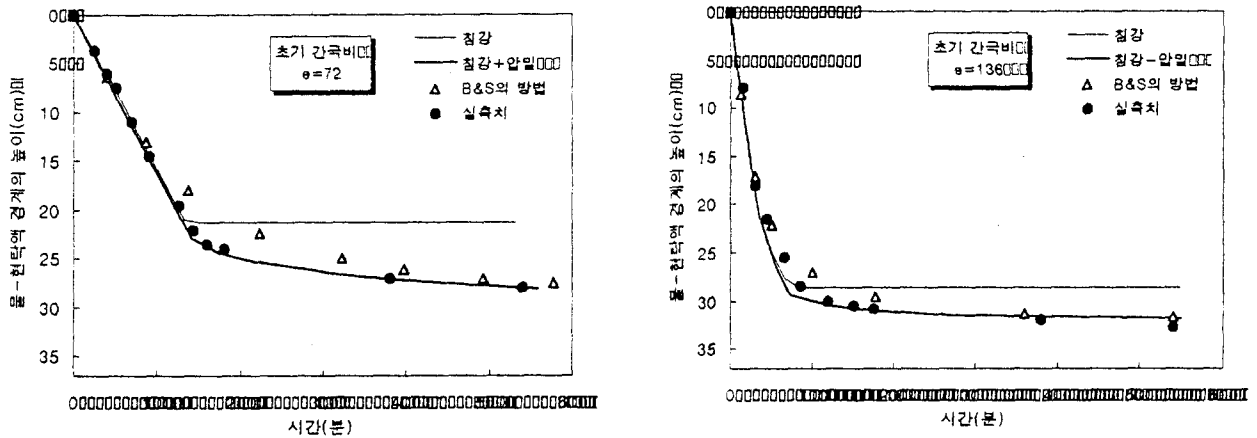


그림 3. Pane과 Schiffman의 침강 실험 결과 해석

침강만을 고려한 경우와 압밀의 영향을 함께 고려한 경우를 비교해 보면 침하량 예측에 있어 상당한 차이가 있으며 이 차이는 초기 간극비가 작을수록, 즉 침강된 흙의 양이 상대적으로 커서 Terzaghi 흙에서 일어나는 압밀 침하량이 클수록 늘어난다는 것을 알 수 있다.

4.2 Tan 등(1990)의 실험 결과

Tan 등(1990)은 네 종류의 점토에 대한 침강 실험에서 현탁액의 초기 농도가 응집에 영향을 미치므로 입자의 초기 농도가 클수록 침강이 시작될 때의 입자 크기가 커져 입자의 침강 속도가 커진다는 점에 주목하였다. 따라서 이들은 흙 입자의 초기 농도 η_0 를 포함하는 새로운 농도를 식(9)와 같이 정의하고 각 점토에 대한 α 값 및 투수계수의 관계식을 제안하였다.

$$\bar{\eta} = \left[\frac{\eta}{\rho_s} - \left(\frac{\eta_0}{\rho_s} \right)^\alpha \right] \quad (9)$$

실험에 사용된 점토 중 가장 응집의 영향이 큰 것으로 밝혀진 BNR1의 물성치 및 투수 계수 관계식은 표 2와 같으며, 개발된 프로그램을 적용한 결과는 그림 4와 같다.

표 2. BNR1의 물성과 투수계수 관계식

Sample	Liquid limit(%)	Plastic limit(%)	Specific gravity	Permeability, k(m/s)	α
BNR1	42	24	2.64	$\log k = -54.4\bar{\eta} - 3.05$	1.15

이를 보면 초기 함수비가 500%로 작은 경우(즉 초기 간극비가 작은 경우)에는 초기 함수비가 900%로 큰 경우에 비해 침강이 빨리 종료된다는 것을 알 수 있는데, 초기 함수비가 작으면 초기 입자 농도

가 커지고 침강이 시작될 때의 입자의 크기가 커져 입자의 침강 속도가 전반적으로 증가하게 되므로 침강 진행 속도가 빨라진 것을 알 수 있다.

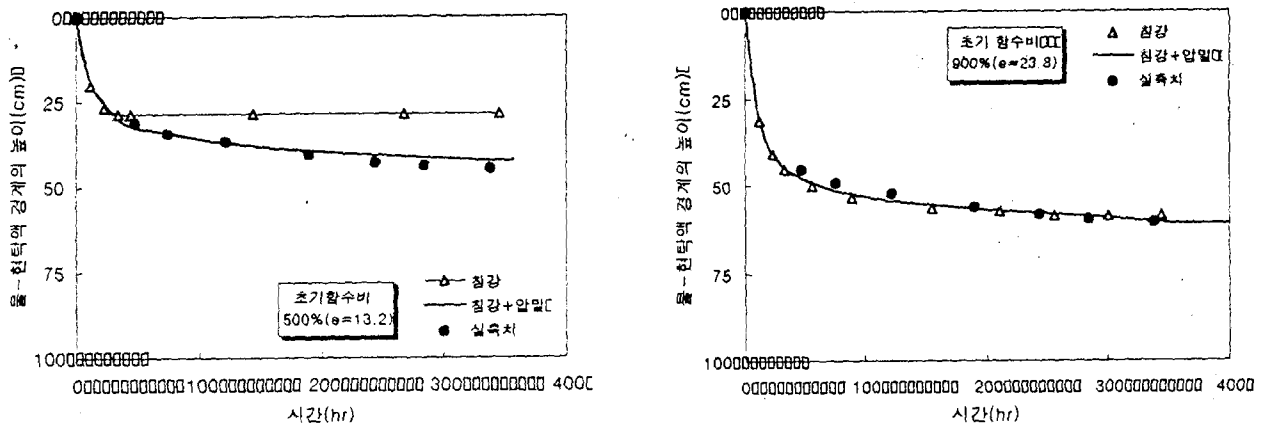
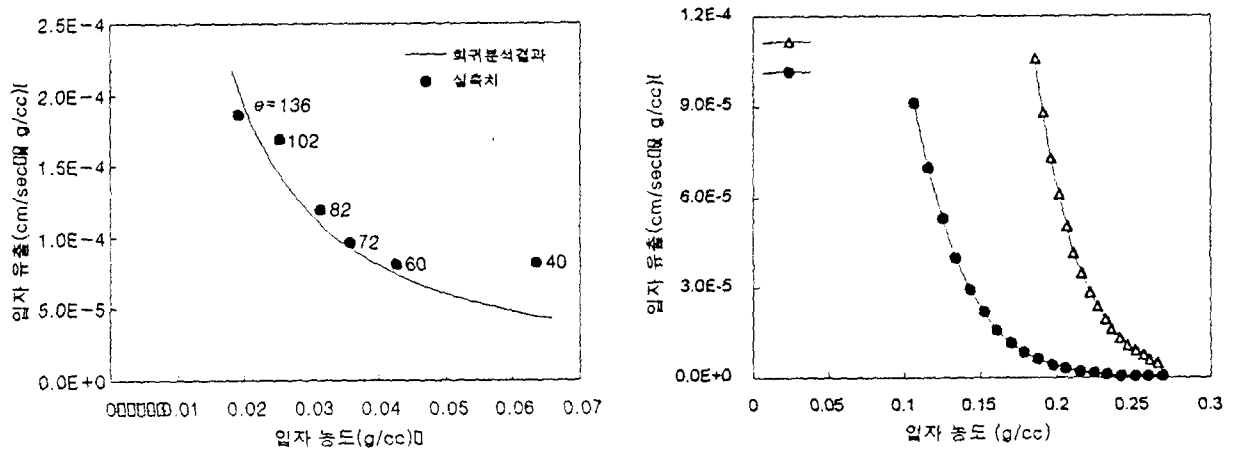


그림 4. Tan의 침강 실험 결과 해석

4.3 입자유출(flux)과 침강 진행 속도의 관계

침강의 진행을 결정하는 것은 입자의 침강 속도와 입자의 농도이다. 이 두 값의 곱인 입자 유출 (flux, $J = \phi_s v_s$)이 침강 가능한 농도 영역에서 0에 가까운 범위가 넓을수록 침강 진행 속도가 느려져 침



(1) Pane과 Schiffman의 침강 실험

(2) Tan 등의 침강 실험

그림 5. 입자 유출과 입자 농도간의 관계

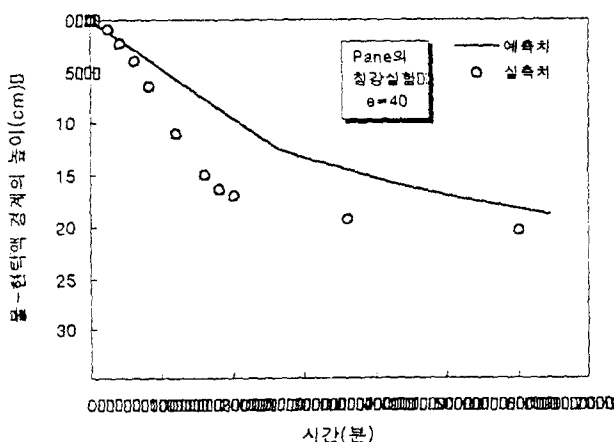


그림 6. 침강 실험 결과 해석

강이 종료될 때까지의 시간이 길어지므로, 입자유출 곡선의 모양은 침강곡선의 특징을 결정한다고 볼 수 있다.

그림 5(1)은 Pane과 Schiffman이 제시한 입자 속도식을 이용하여 입자 유출과 농도간의 관계 곡선을 그리고 실측치와 비교한 것이다. 이 그림에서 볼 때 농도가 가장 큰 경우($e=40$)의 값은 사용된 관계식과 차이가 크다. 따라서 이를 초기 농도로 하는 경우의 실측치와 예측치도 큰 차이를 보이고 있다는 것을 그림 6에서 알 수 있다. 한편, 그림 5(2)는 Tan 등의 실험에서 이용된 BNR1에 대한 입자 유출과 입자 농도간의 관계 곡선으로,

초기 농도에 따라 각각 다른 침강 속도 관계식을 쓰고 있으므로 입자 유출의 곡선도 두 개가 된다. 초기 함수비가 클 경우의 입자 유출 곡선은 작을 경우에 비해 유출 값이 0에 가까운 범위가 넓으므로 실험 결과에서 볼 수 있듯이 입자의 침강이 오랫동안 지속된다.

5. 본 연구의 실험 결과 비교

본 연구에서는 표 3과 같은 점토 시료에 대해 침강 시험을 수행하였다. 이 중 두 번째 실험 결과를 침강 곡선으로 나타낸 것이 그림 7이다. 침강 실험의 결과를 이용하여 Pane과 Schiffman의 실험에서처럼 압밀이 시작되는 변환 간극비를 예상하여 보면 대략 $e_m = 11$ 정도로 볼 수 있다.

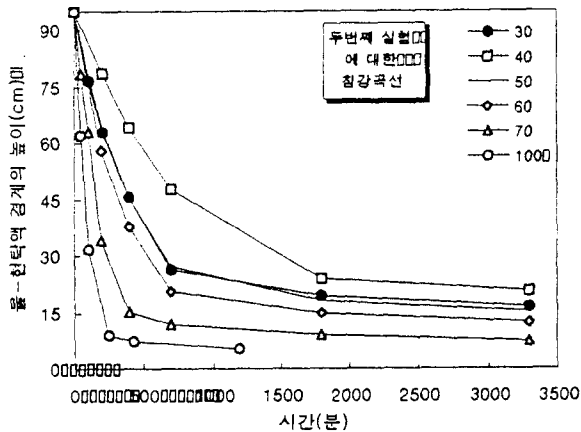


그림 7. 본 연구의 침강 실험 결과

침강곡선에서도 초기 간극비 30일 때의 침강이 40일 때에 비해 훨씬 빠르고, 오히려 50일 때와 비슷한 형태를 가진다는 점이 초기 간극비가 30보다 작아질 경우를 다르게 취급해야 한다는 것을 뒷받침 해 주고 있다. 따라서 이 시료의 경우에는 초기 간극비 30이하에서는 응집의 영향이 다르게 나타난다는 가정 하에, 초기 간극비 30에 대해서 별개의 속도 관계식을 이용하는 것이 바람직하다고 생각되었다. 이 때, 속도 관계식은 Pane과 Schiffman이 제안한 지수식을 이용하였고 그 계수 값들은 표 4와 같다.

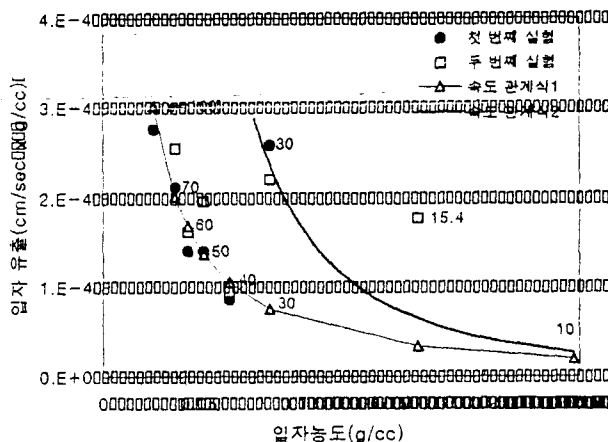


그림 8. 입자 유출의 변화

경계에서의 농도 변화를 측정함으로써 입자 유출의 곡선을 실측하여 보는 방법이 있겠다. 그러나, 물과 현탁액 경계에서의 농도 측정이 현실적으로는 상당히 어려우므로 본 연구에서는 침강 곡선에 대한 예측치와 실측치의 비교를 통해 간접적으로 그 적합성을 검증하였다. 현재로서는 속도 관계식 2를 이용한 수치 해석이 대체로 실측치를 잘 예측하고 있다고 볼 수 있으나, 앞으로 더 많은 실험 결과와의 비교 및 시료의 분석을 통해 응집의 영향이 실제로 일어나는지에 대한 검증이 필요할 것으로 생각된다.

표 3. 본 연구의 침강 실험에 사용된 시료의 물성

Liquid limit(%)	Plastic limit(%)	Specific gravity	#200체 통과율(%)
52.8	23.3	2.71	92.2

각 초기 간극비에 대해 초기 침강 속도를 구해 입자 농도와 입자 유출 사이의 관계 곡선을 그려보면 그림 8과 같다. 이를 보면 초기 간극비 100에서 40까지의 입자 유출은 회귀분석을 통해 속도 관계식 1로 정리 할 수 있는 경향성을 보이고 있는데 반해 실제로 사용될 준설토의 값에 가까운 초기 간극비가 30이하일 경우는 그렇지 않다는 것을 알 수 있다.

표 4. 입자 침강 속도 관계식

속도 관계식	계수 값
1	$C = 3.74 \times 10^{-9} m/sec, D = 3.13$
2	$C = 9.24 \times 10^{-10} m/sec, D = 3.88$

속도 관계식 1을 이용하여 초기 간극비 100과 40일 경우의 침강 곡선을, 그리고 속도 관계식 2를 이용하여 초기 간극비 30일 경우의 침강 곡선을 예측하여 본 결과가 각각 그림 9와 그림 10에 나타나 있다.

속도 관계식 2를 검증하기 위해서는 초기 간극비 30일 때의 침강 실험을 수행하면서 물과 현탁액

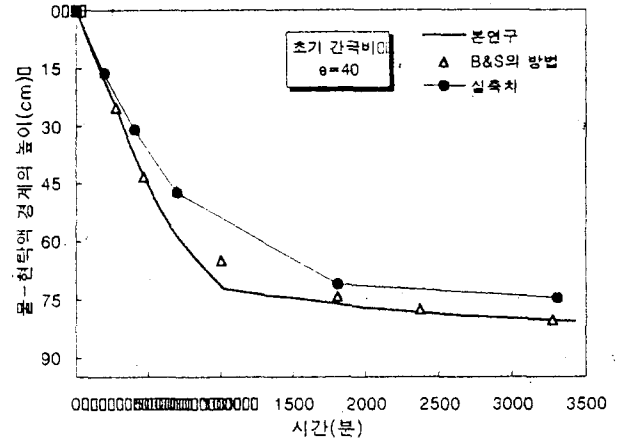
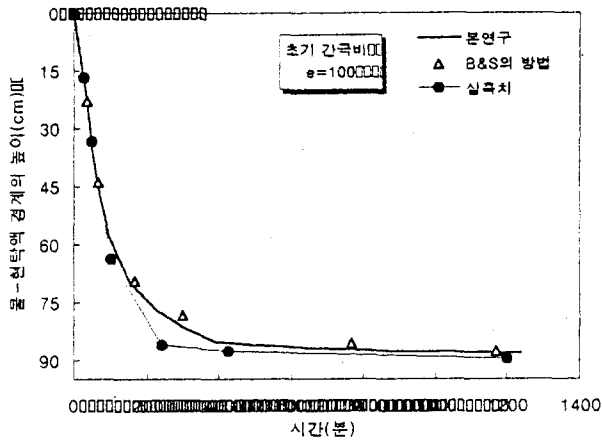


그림 9. 속도 관계식 1을 이용한 해석

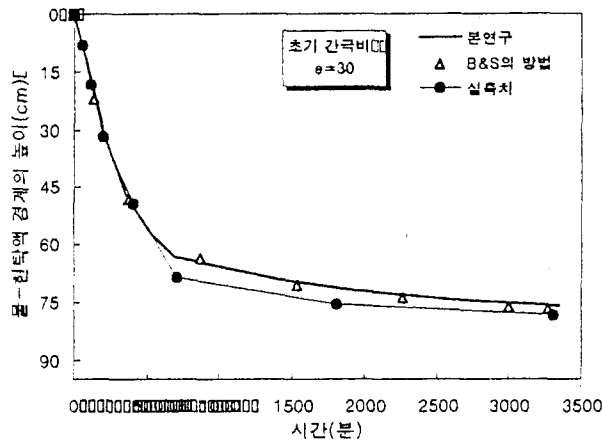


그림 10. 속도 관계식 2를 이용한 해석

6. 결론

본 연구에서는 준설토가 현탁액으로부터 안정된 지반으로 발전되는 과정을 지배하는 두 가지 현상인 침강과 압밀을 함께 고려할 수 있는 단일 수치 해석 프로그램을 개발하는 것을 목적으로 하였다. 개발된 일차원 유한요소 프로그램을 이용하여 기존의 논문에 제시된 침강 실험의 실측치들과 비교한 결과 실측치와 상당히 가까운 결과를 얻을 수 있어 프로그램의 적합성을 입증할 수 있었다.

본 연구에서 행한 실험 결과에 적용하려는 시도에서는 앞으로 검증이 필요하기는 하지만 시료의 농도가 높을 경우 응집의 영향이 다르게 존재한다는 가정 하에 서로 다른 침강 입자 속도식을 사용하는 방법을 통해 실험 결과와 근접한 예측치를 얻을 수 있었다. 따라서 속도 관계식을 적절히 고려할 경우 본 연구에서 개발된 프로그램은 준설 매립 시에 침강과 압밀에 걸리는 시간 및 최종적으로 형성된 지반의 성질을 예측하는데 이용할 수 있을 것으로 생각된다.

참고문헌

- Gibson, R. E., England, G. L. and Hussey, M. J. L. (1967), "The Theory of one-dimensional consolidation of saturated clays-1", *Geotechnique* 17, 261-273
- Been, K. and Sills, G. C. (1981), "Self-weight consolidation of soft soils: an experimental and theoretical study", *Geotechnique* 31, No.4, 519-535
- Kynch, G. J.(1952), "A theory of sedimentation", *Trans. Faraday Soc.* 48, 166-176
- Pane, V. and Schiffman, R. L. (1985), "A note on sedimentation and consolidation", *Geotechnique* 35, No.1, 69-72
- Pane, V. and Schiffman, R. L.(1997), "The permeability of clay suspensions", *Geotechnique* 47, No.2, 273-288
- Schiffman, R. L., Pane, V. and Sunara, V. (1985), "Sedimentation and Consolidation", In *Flocculation, sedimentation and consolidation* (edited by B. M. Moudgil and P. Somasundaran), pp. 57-121.
- Tan, T. S., Yong, K. Y., Seong, E. C. and Lee, S. L.(1990), "Sedimentation of clayey slurry", *J. Geotech. Engrg.* 116, No. 6, 885-898