충격성 잡음에 강인한 가변 망각인자 칼만 시변 주파수 추정기법

김한수*, 이상욱*, 임준석**, 성굉모*
*서울대학교 전기공학부, **세종대학교 전자공학과

Kalman based time-varying Spectral estimation using Variable Forgetting Factor robust to impulsive noise

Han-Su Kim*, Sang-Wook Lee*, Jun-Seok Lim**, Koeng-Mo Sung*
*School of Electrical Engineering, Seoul National University
**Department of Electronics Eng., Sejong University

Abstract

본 논문에서는 충격성 잡음에 강인하기 위한 시변 주파수 추정 기법을 제안하였다. 충격성 잡음에 강인하기 위해서는 충격성 잡음에 의한 추정 변수의 동요를 제한하고 추정된 오차가 향후 추정시 영향을 미치는 오차의 전파현상을 제한하여야 한다. 충격성 잡음에 의한 추정오차의 전파를 제한하기 위해서는 망각인자의 도입이 필요함을 증명하였고 보다 효과적으로 사용하기 위해서 가변 망각인자를 도입하였다. 가변 망각인자의 도입으로 충격성 잡음에 의한 오차의 전파를 선택적으로 제한할 수 있으며 충격성 잡음에 의한 추정계수의 변동은 영향함수 측면에서 Huber함수를 이용하여 제한하였다. 제안된 알고리듬은 Huber함수와 가변망각인자의 도입으로 충격성 잡음에 의해 생기는 오차의 크기와 오차의 영향이 전파되는 것을 적응적으로 제한하기 때문에 모의실험을 통해 기존의 칼만 알고리듬보다 나은 성능을 보임을 알 수 있었다.

I.서론

충격성 잡음은 큰 진폭에 상대적으로 작은 길이를 갖는 on/off성 펄스잡음이다. 이러한 잡음은 통신시스템에서 스위칭 잡음이나 역 채널 환경, 음향 측정시 인위적이거나 자연적인 충격음, 컴퓨터 키보드로부터 나오는 클릭음 등 많은 실제적인 상황에서 관측될 수 있다[1]. 대부분의 적응필터를 위한 신호처리 알고리듬은 최적 조건으로 최소평균자승오차법을 사용한다. 그러나, 충격성 잡음환경과 같은 비 가우시안 확률분포를 갖는 잡음환경에서는 최소평균자승오차법이 충격성 잡음과 같은 비 가우시안 잡음에 대해 민감하기 때문에 칼만기법과 같은 선형최소자승추정법의 성능이 저하됨이 알려져 있다[1]. 따라서, 이러한 문제를 해결하기 위하여 충격성 잡음(외곽자)에 강인한 기법들이 연구되고 있다. 충격성 잡음의 제거를 위한 전형적인 방법은 메디안 필터이다[1]. 그러나, 메디안 필터링은 충격성 잡음에 의한 영향을 줄일 수 있으나 충격성 잡음이외의 신호부분에 대해서도 왜곡을 주기 때문에 종종 성능의 저하가 나타난다[1,2]. 영향함수 측면에서 충격성 잡음에 의한 오차를 제한하는 칼만 기법이 제안되었다[2]. 그러나 칼만 필터는 신호를 처음부터 계속 참조하여 계수를 추정하기 때문에 충격성 잡음에 의한 오차가 계속적으로 향후의 추정결과에 영향을 미치게 된다. 따라서, 과거 참조 신호의 가중치를 지수함수적으로 감소시키는 망각인자의 도입이 필요하다[3,4]. 특히, 추정된 오차의 크기에 따라 적응적으로 가중치를 조절할 수 있다면 보다 나은 성능을 기대할 수 있다[4].

기존의 강인 칼만 추정기법은 고정 망각인자를 사용하여 어느 정도 충경성 잡음에 의한 오차의 전파를 제한할 수 있으나 충격성 잡음이 없는 경우 필요 이상의 망각인자의 도입으로 추정오차를 크게 하는 단점이 있다.

제안하는 방법은 가변 망각인자를 통해 충격성 잡음에 의한 오차가 향후의 추정결과로 전파되는 것을 적응적으로 제한하고 영향함수 측면에서 Huber함수를 통해 충격성 잡음의 오차에 의한 동요를 제한하기 때문에 더욱 효과적으로 충격성 잡음에 대응할 수 있다.

II. 가변망각인자 강인 칼만 필터링

AR 프로세서의 출력으로서의 신호는 다음과 같이 모델링된다.

$$s(k) = \sum_{j=1}^{n} a_j(k)s(k-j) + v(k) \tag{1}$$

(1)식을 상태공간 방정식으로 표현하면

$$\boldsymbol{a}(k) = \boldsymbol{F}(k, k-1)\,\boldsymbol{a}(k-1) \tag{2}$$

$$s(k) = \boldsymbol{s}^T(k-1)\,\boldsymbol{a}(k) + v(k) \tag{3}$$

과 같다. 여기서 $\boldsymbol{a}(k)$는 n차 계수벡터이고 $\boldsymbol{F}(k,k-1)$은 시변 계수천이행렬이며 $\boldsymbol{s}(k-1)$은 n차 과거관찰벡터로서 $[s(k-1) \cdots s(k-n)]^T$로 주어진다. $v(k)$는 정규분포 $N(0,R(k))$를 갖는 백색잡음으로 AR프로세서의 입력신호이다. 전형적인 칼만필터의 비용함수는 다음과 같이 최소자승오차법으로 주어진다.

$$J_k = \sum_{j=1}^{k}\lambda^{k-j}R^{-1}(j)(s(j) - \boldsymbol{s}^T(j-1)\boldsymbol{a}(j))^2 \tag{4}$$

식(4)를 통해 관측신호에 충격성 잡음이 존재하는 경우 그 오차가 커지기 때문에 최소자승오차법에 의한 칼만과 같은 적응필터기법은 그 성능이 저하된다[1]. 그러므로 충격성 잡음에 강인하기 위해서는 두가지 측면에서 접근이 필요하다. 충격성 잡음이 존재하는 경우 이를 찾아내어 그것이 오차에 주는 영향을 줄이는 것과 그것에 의한 오차가 향후 추정시 영향을 배제하도록 오차의 전파를 제한하는 것이다. 먼저, 충격성 잡음에 의한 추정계수 벡터의 오차의 전파를 제한하기 위한 방법을 살펴보고 충격성 잡음이 존재시 그 영향을 최소화 하는 방법에 대해 기술할 것이다.

A. 계수벡터의 교란에 의한 오차의 전파제한 분석

k_0 시간에서 발생된 충격성 잡음으로 인한 계수벡터의 교란은 다음과 같이 수식적으로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{a}(k_0) = \boldsymbol{a}(k_0) + \boldsymbol{\delta a}(k_0) \tag{5}$$

여기서, $\boldsymbol{\delta a}(k_0)$는 충격성 잡음에 의한 계수벡터의 교란을 나타낸다. 만일 칼만필터의 다른 변수가 적절히 수행된다고 가정하면[5]

$$\boldsymbol{\delta a}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k,k_0)\,\boldsymbol{\delta a}(k_0), \quad (k \geq k_0) \tag{6}$$

가 되고, $\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)$는 천이 행렬이고 식(7)로 표현되고 오차의 전파에 대해 중요한 역할을 한다[5].

$$\boldsymbol{\Phi}(k,k_0) = \lambda^{k-k_0}\boldsymbol{C}^{-1}(k),\ \boldsymbol{C}(k_0) \tag{7}$$

여기서 $\boldsymbol{C}(k) = \boldsymbol{P}^{-1}(k)$로 공분산 행렬이다. 입력신호가 충분히 큰 시간 k에 대해 계속적으로 여기 된다면 $\boldsymbol{C}(k) \geq \alpha\boldsymbol{I}$ 인 $\alpha > 0$을 만족하는 α가 존재한다. 이것은 $\boldsymbol{C}(k)$가 positive definite 성질을 갖는다는 것을 의미한다. 벡터 norm의 성질 $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$을 이용하여 식(7)로부터 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\|\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)\| \leq \lambda^{k-k_0}\|\boldsymbol{C}^{-1}(k)\|\|\boldsymbol{C}(k_0)\| \leq \frac{\lambda^{k-k_0}}{\alpha}\|\boldsymbol{C}(k_0)\| \tag{8}$$

그러므로, 계수벡터의 동요로 인한 오차는 식(9)가 된다.

$$\|\boldsymbol{\delta a}(k)\| \leq \|\boldsymbol{\Phi}(k,k_0)\|\|\boldsymbol{\delta a}(k_0)\| \leq \frac{\lambda^{k-k_0}}{\alpha}\|\boldsymbol{C}(k_0)\|\|\boldsymbol{\delta a}(k_0)\| \tag{9}$$

$0<\lambda<1$인 망각인자를 사용하면 $\boldsymbol{\delta a}(k)$는 λ의 지수함수적으로 감소하게되며 이를 지수함수적인 안정성이라 한다[5]. 식(9)을 통해 충격성 잡음에 의해서 계수벡터의 동요가 발생되더라도 그 오차는 적절한 망각인자를 도입하여 오차가 전파되는 것을 배제할 수 있음을 알 수 있다.

B. 충격성 잡음에 의한 오차의 전파 제한

망각인자의 도입으로 충격성 잡음에 의한 오차의 전파를 제한할 수 있음은 식(9)를 통해 증명하였다. 보다 효과적으로 충격성 잡음에 의한 오차가 향후 추정에 영향을 미치는 것을 제한하려면 적응적으로 적절한 망각인자를 구해야 할 필요가 있다. 그러므로 칼만필터의 비용함수를 다음과 같이 시간에 따라 가변인 망각인자를 도입한 형태로 변경하여야 한다.

$$J_k = \sum_{j=1}^{k} u(j,k)R^{-1}(j)(s(j) - \boldsymbol{s}^T(j-1)\boldsymbol{a}(j))^2 \tag{10}$$

여기서 $u(j,k)$는

$$u(j,k) = \begin{cases} \prod_{i=j+1}^{k}\lambda(i) & 1 \leq j \leq k-1 \\ 1 & j \geq k \end{cases} \tag{11}$$

의 값을 갖는 가변망각계수이다[4]. 가변망각인자는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$u(k,k) = 1\ ,\ u(k-1,k) = \lambda(k) \tag{12}$$

일반적으로 $0 \leq \lambda(k) \leq 1$의 값을 가지며 만약 모든 k값에 대하여 $\lambda(k) = \lambda$가 되면 망각계수는 $u(j,k) = \lambda^{k-j}$가 되어 고정망각계수를 갖는 칼만필터링과 동일하게 된다[3]. 식(11)를 이용하여 식(10)을 회귀식으로 나타내면

$$J_k = \lambda(k)J_{k-1} + u(k,k)R^{-1}(k)\,(s(k) - \boldsymbol{s}^T(k-1)\,\boldsymbol{a}(k))^2. \tag{13}$$

식(13)을 $\lambda(k)$에 대해 정리하면

$$\lambda(k) = \frac{J_k}{J_{k-1}} - \frac{R^{-1}(k)}{J_{k-1}}(s(k) - \boldsymbol{s}^T(k-1)\,\boldsymbol{a}(k))^2. \tag{14}$$

한편, 칼만 알고리듬의 변수 갱신식에 의하면

$$\boldsymbol{a}(k) = \boldsymbol{a}(k-1) + \boldsymbol{K}(k)e(k). \tag{15}$$

여기서 $\boldsymbol{K}(k)$는 칼만이득, $e(k)$는 추정오차 이다. 계수추정오차를

$$e(k) = s(k) - s^T(k-1)\,a(k-1) \tag{16}$$

라고 정의하고, 식(15)와 식(16)을 이용하여 정리하면

$$s(k) - s^T(k-1)\,a(k) = e(k)(1 - X^T(k)\,G(k)) \tag{17}$$

와 같이 표현되고 식(14)에 의해 식(18)과 같이 가변 망각인자가 표현된다.

$$\lambda(k) = \frac{J_k}{J_{k-1}} - \frac{R^{-1}(k)}{J_{k-1}}\,e^2(k)(1 - s^T(k)\,K(k))^2 \tag{18}$$

식(18)에서 $\lambda(k)$의 계산을 간단히 하기 위한 방법으로 $J_k = J_{k-1} = \cdots = J_1$와 같이 할 수 있다[4]. 이것은 k번째 구간에서 가장 최근의 관측치의 오차정보를 위해 망각인자가 보상함을 의미하며 칼만 추정기가 수렴된 이후를 의미한다. 이러한 가정을 사용하면 식(18)는 식(19)와 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\lambda(k) = 1 - \frac{R^{-1}(k)}{J_1}\,e^2(k)(1 - s^T(k)\,K(k))^2 \tag{19}$$

충격성 잡음이 존재하는 경우에는 그 스텝이후 과거 충격성 잡음이 포함된 관측신호의 참조로 인해 순시 추정오차 $e(k)$가 커지게 되기 때문에 식(19)의 가변 망각인자의 값이 0으로 수렴되게 된다. 그러므로 충격성 잡음인 경우, 망각인자로 인해 과거 참조신호가 자동적으로 줄어들면서 충격성 잡음이 포함된 관측신호의 영향이 없어진다. 충격성 잡음의 영향이 없어지면 추정오차 $e(k)$는 줄어들기 때문에 가변 망각인자의 값은 다시 1로 수렴하게 된다. 결국, 과거 관측신호의 참조길이의 증가로 추정오차 $e(k)$는 더욱 줄어 들게되기 때문에 고정 망각인자를 사용하거나 망각인자를 사용하지 않는 경우보다 더 빠르게 충격성 잡음의 영향에서 벗어날 수 있다.

식(19)로 유도된 가변 망각인자는 충격성 잡음환경이나 정규확률분포를 가진 잡음환경 모두에 적응적으로 동작하기 때문에 충격성 잡음으로 인한 추정오차가 향후 추정시에 그 영향이 전파되는 것을 제한하는데 효과적임을 알 수 있다.

C. 충격성 잡음에 의한 추정계수 동요의 제한

보다 효과적으로 충격성 잡음에 대응하기 위해서는 충격성 잡음의 크기를 제한하는 과정이 필요하다. 식(15)를 보면 변수의 갱신은 추정오차 $e(k)$에 비례한다. 그러므로 추정된 변수의 동요는 충격성 잡음에 의한 오차에 직접 비례하게 된다. 그러므로 충격성 잡음에 강인하기 위해 비용함수의 도함수인 영향함수 측면에서 Huber함수를 사용하여 추정오차를 제한하여야 하며 사용된 Huber 함수는 다음과 같이 수식으로 표현된다[1,2].

$$\Psi_H(x) = \begin{cases} x & |x| \le \tau \\ \tau \cdot sgn(x) & |x| > \tau \end{cases} \tag{20}$$

여기서 $sgn(t)$는 signum 함수이고 τ는 정규분포일 때 성능이 저하되지 않도록 선택된다[2].
식(20)를 사용하여 변수 갱신식 식(15)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a(k) = a(k-1) + K(k)\,\Psi_H(e(k)) \tag{21}$$

이상의 수식과 결과를 이용하여 가변 망각인자를 이용한 강인 칼만 시변 주파수 추정 알고리듬은 다음과 같다.

$$e(k) = s(k) - s^T(k-1)\,a(k-1) \tag{22}$$

$$K(k) = \frac{P(k-1)s(k-1)}{\lambda(k-1)R(k) + s^T(k-1)P(k-1)s(k-1)} \tag{23}$$

$$\lambda(k) = 1 - \frac{R^{-1}(k)}{J_1}\,e^2(k)(1 - s^T(k-1)\,K(k))^2 \tag{24}$$

$$a(k) = a(k-1) + K(k)\,\Psi_H(e(k)) \tag{25}$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda(k)}[\,P(k-1) - K(k)\,s^T(k-1)\,P(k-1)] \tag{26}$$

여기서 $P(k)$은 오차 공분산 행렬, $e(k)$은 추정 오차이다.

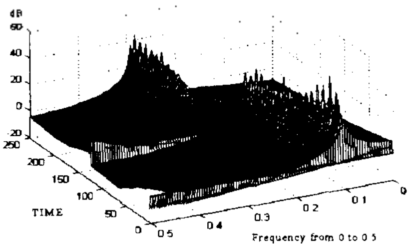
III. 모의실험

제안한 알고리듬의 성능을 보이기 위하여 두가지 경우의 실험을 수행하였고 모의실험에 사용된 강인 칼만 필터링을 위한 초기조건은 다음과 같다.

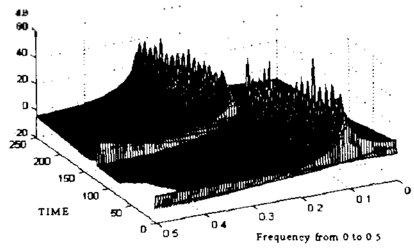
$$P(0) = 100 \times I\ ,\ R(0) = 10^{-3}\ ,\ a(0) = 0\ ,\ \tau = 2.5.$$

Example 1 : 제안한 알고리듬과 기존의 칼만 필터링 알고리듬을 비교하기 위하여 주파수가 정규화된 값으로 0.1에서 0.3으로 시간에 따라 선형적으로 변하는 chirp 신호에 125번째 sample에서 신호의 최대 크기의 10배 되는 충격성 외곽자가 존재하는 경우를 가정하였고 가우시안 잡음의 신호대 잡음비는 30dB이었다. 그림1부터 그림3을 통해 살펴보면 가변망각인자 칼만 필터, 강인 칼만 필터 모두 충격성 잡음이 존재하는 구간에서는 주파수추정을 제대로 하지 못하였고 제안하는 알고리듬의 경우는 충격성 잡음에 의한 영향이 많이 줄어 들었음을 알 수 있다.

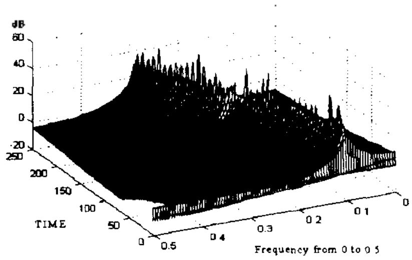
Example 2 : 평균제곱오차(Mean Square Error)를 비교하기 위하여 주파수가 정규화된 값으로 0.1로 시간에 따



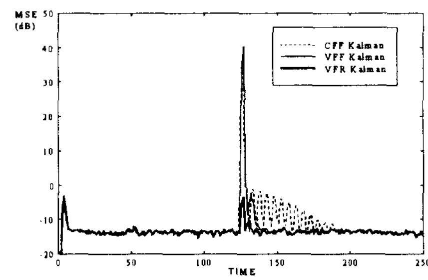
<그림1> 고정 망각인자 칼만 추정기의 추정결과
(outlier at 125th snapshot, $\lambda = 0.927$)



<그림2> 가변 망각인자 칼만 추정기의 추정결과
(outlier at 125th snapshot)



<그림3> 가변 망각인자 강인 칼만 방위 추정기의 추정결과 (제안하는 방법)
(outlier at 125th snapshot)



<그림 4> 각 알고리듬에 따른 추정 자승 오차 결과
CFF Kalman - Kalman with Constant Forgetting Factor
VFF Kalman - Kalman with Variable Forgetting Factor
VFR Kalman - Robust Kalman with VFF

라 일정한 정적 신호에 신호대 잡음비는 20dB이고 125번째 sample에 가산 백색 가우시안 잡음의 분산값의 200배가 되는 크기로 외곽자를 랜덤하게 발생시켰다. 평균제곱오차를 구하기 위하여 100번의 독립 수행을 하였다. 그림 4를 보면 충격성 잡음이 존재하지 않는 구간에서는 모두 비슷한 평균제곱오차를 보임을 알 수 있다. 그러나 충격성 잡음이 존재하는 125번째 구간에서 제안하는 알고리듬은 충격성 잡음에 의한 추정오차의 변동을 제한하고 또한 향후 추정시 가변 망각인자를 통해 적응적으로 충격성 잡음에 의한 오차의 전파를 제한하여 다른 알고리듬 보다 좋은 성능을 보임을 알 수 있다.

IV. 결론

본 논문에서는 가변 망각인자를 강인 칼만 시변 변수 추정기법에 도입하여 정적신호와 비정적신호 뿐만 아니라 외곽자(outlier)와 같은 충격성 잡음환경하에서도 효과적으로 시변 변수를 추정할 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 가변 망각인자 강인 칼만 시변수 추정기법은 적응적으로 시변 변수를 추정하거나 외곽자의 효과를 제거하기 위해서 가변 망각인자를 도입하였고 수정된 자승평균 비용함수를 통해 구현되었다. 외곽자로 인한 효과를 제거하기 위하여 제안한 방법은 Huber함수를 통해 추정된 변수의 동요를 적게하였고 가변 망각인자를 통해 외곽자로 인한 오차가 향후 추정에 미치는 영향을 제한하였다. 모의실험을 통해 제안하는 방법이 기존의 다른 방법보다도 충격성 잡음이 존재하는 시변수 추정에 더 효과적임을 알 수 있었다.

V. 참고문헌

1. S. V. Vaseghi, *Advanced Signal Processing and Digital Noise Reduction*, Wiley and Teubner. 1996,
2. Han-Su Kim, Koeng-Mo Sung, "Kalman based time varying DOA estimation robust to impulsive noise," *Proc. 16th ICA/135th ASA*, Vol. 1. pp. 1327-pp.1328, June. 1998.
3. G.A. Mack, V. K. Jain,"Speech Parameter Estiamtion by Time-Weighted-Error Kalman Filtering ", *IEEE Trans. on ASSP*, vol.31, No.5, pp.1300-1303, October, 1983.
4. D. G. Childers, J. C. Principe, Y. T. Ting, "Adaptive WRLS-VFF for Speech Analysis", *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, vol.3, no.3, pp.209-213, May 1995.
5. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs ,NJ : Prentice Hall, 1991, 2nd edition.