

# 선배열 기포의 결합진동에 의한 음향방사에 관한 고찰

최복경, 김봉채, 윤석왕\*

한국해양연구소 해양물리연구부 해양음향연구실  
\*성균관대학교 물리학과 음향학연구실

## Study of sound radiation from coupled oscillations of a line array of bubbles

B. K. Choi, Bong-Chae Kim and S. W. Yoon\*

Physical Oceanography Division, Korea Ocean Research and Development Institute,  
Ansan P. O. Box 29, 425-600, Kyungki-do, Korea

\*Acoustics Research Laboratory, Department of Physics, Sung Kyun Kwan University,  
Suwon 440-746, Kyungki-do, Korea

### 요 약

수중에서 발생된 기포들의 상호작용에 의한 방출주파수의 변화를 알아보기 위해 선배열 기포에 대해 이론적으로 연구하였다. 기포들의 결합진동에 의한 방출주파수는 가능한 가장 저주파수의 음파가 발생됨을 설명하였으며, 일부의 기포가 음원역할을 하는 실제적인 선배열 기포의 경우는 방출주파수가 기포의 총 개수보다는 음원기포의 개수와 기포간 거리에 좌우됨을 밝혔다. 이러한 이론결과는 참고문헌[6]의 실험결과에 비교적 잘 일치하였다. 이것은 기포간의 결합진동은 기포들의 초기 발생조건에 따라 이론적으로 다르게 다루어야 함을 의미한다.

### I. 연구동기

수중에서 기포는 외부로부터의 압력교란을 받게 되면 각자 자신의 반경에 반비례하는 공진주파수를 가지는 음파를 효율적으로 방출하게 된다. 기포가 집단으로 형성되어 있는 경우에 기포 집단에 의해 방출된 음파는 개개 기포의 공진주파수보다 낮은 주파수를 가진다는 사실이 최근에 이론 및 실험적으로 연구되었으며[1,2], 이에 따른 방출주파수는 근사적으로 기포 집단의 전체 크기에 반비례하고, 기포 집단의 기체함유비에 의존한다는 결과가 도출되었다. 그러나, 수십 또는 수백개의 유한한 개수로 형성된 기포들을 기포 집단의 해석 방식으로 접근하기에는 기포집단의 크기가 작고 공기함유비를 명확하게 결정하기가 어렵게 된다. 유한한 개수의 기포들의 결합진동에 관한 연구로서는 1차원 배열을 갖는 기포들의 방출 음향에 대한 연구[3-5] 등이 이론적으로 진행되어 왔으며, 최근 기포들간의 간격 및 기포 개수의 함수로 기포 배열의 방출 음향 주파수의 변화를 제시하는 논문[6,7]이 발표되었다.

본 고찰의 목적은 기포들의 상호작용으로 인한 발생하는 음파의 주파수변화를 기포간의 결합진동으로 최와 윤의 논문[6]과 Feuillade의 논문[7]에서 다루어진 내용용 토

대로 두 개 또는 세 개의 기포에 대한 결합진동을 논하고, 특히 선배열의 경우 음원기포의 개수에 따라 결합진동주파수의 변화가 달라짐을 제시하고자 한다.

### II. 기포간 결합진동의 이론 전개

#### II-1. 한 개 기포의 진동

물 속에서 발생된 기포는 기포의 크기에 반비례하는 주파수에서 공진현상을 가진다는 특징이 있다. 기포가 고유진동수나 또는 그에 가까운 주파수의 음파를 감지하게 되면 그 기포는 공진을 일으켜 음파를 강하게 흡수 또는 산란시킨다.

구형 기포의 경우 기포를 역학적 조화진동자로 다루면, 기포진동의 운동방정식은 다음으로 주어진다.

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + k\xi = 0 \tag{1}$$

여기서  $\xi$ 는 기포반경의 변위이고, 원점자의 점표시는 시간에 대한 미분을 표현한다.  $m$ 은 기포진동의 유효질량,  $b$ 는 감쇠상수,  $k$ 는 힘상수이다. 편의상 기포의 감쇠를 무시한 다음 정리하면 기포의 공진주파수는 다음과 같이 구해진다[8].

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma P}{\rho}} \tag{2}$$

여기서 힘상수는  $k = 12\pi\gamma Pa$ , 유효질량은  $m = 4\pi a^3\rho$ 로 주어지며,  $P$ 는 주변 매질의 평형 압력,  $\gamma$ 는 기포 내부 기체의 비열비,  $a$ 는 기포의 반경,  $\rho$ 는 물의 밀도이다. 물 속의 주변 압력이 1기압인  $P \approx 10^5$  [Pa]일 때, 기포의 공진주파수는  $f_0 \approx 3.3/a$ 로 주어지며, 방출음파의 파장은  $\lambda \approx 460 a$ 로서 기포반경의 약 460배나 크게 주어진다.

## II-2. 두 기포의 결합진동

같은 크기의 두 기포가 있는 경우, 이들은 스프링에 질량이 매달린 역학적 진동자와 같이 직렬로 연결된 두 개의 동인 조화진동자의 결합으로 다룰 수 있다. 그러나, 물속에 만들어진 기포들은 실제로는 얼마간의 거리만큼 떨어져 있고 그들 사이에는 매개체인 물이 있으므로, 그들은 조화진동자들의 단순한 직렬 연결과는 다른 상태이다. 이러한 기포들 간의 상호작용을 고려해 보기 위해, 한 개의 기포가 진동하여 방출음파가 구면형태로 주위로 퍼져 나가는 경우를 생각하면,  $x$ -축상으로 두 기포가 배열된 1차원인 경우에 대해 한 기포로부터 발생한 음파의 거리  $x$ 에서의 음압  $p(x)$ 는 (3)식으로 주어진다.

$$p(x) = \frac{a}{x} P_o(a) \quad (3)$$

여기서  $P_o(a)$ 는 반경이  $a$ 인 기포의 기포 표면에서의 음압이다. 따라서, 첫번째 기포가 거리  $x$ 만큼 떨어져 있는 같은 크기의 기포에 미치는 음압은 (3)식으로 나타낼 수 있다. 그러므로 (3)식을 거리  $x$ 에서의 힘  $F(x)$ 로 나타내면,

$$F(x) = \frac{a}{x} F_o(a) \quad (4)$$

여기서  $F_o(a) = -k\xi$ 는 기포 표면에서의 복원력과 같게 표현된다. 두 기포 중심 사이의 거리가  $d$ 인 경우, 거리  $d$ 에 위치한 두 번째 기포에 작용되는 힘은

$$F(d) = \frac{a}{d} F_o(a) = -\frac{a}{d} k\xi \equiv -\alpha_o k\xi \quad (5)$$

로 주어지며, 이것은  $d$  만큼 떨어진 거리에 있는 기포는 옆의 기포에 의해  $F(d)$ 만큼의 힘을 받는다는 것을 뜻하며, 위상관계까지 고려한 유효결합상수  $\alpha$ 는 다음과 같이 된다.

$$\alpha = \alpha_o \cos(k_0 d) = \frac{a}{d} \cos(k_0 d) \quad (6)$$

여기서  $k_0$ 는 음파의 파수이며,  $\cos(k_0 d)$ 항이 의미하는 바는 한 기포에서 발생한 음파가 거리  $d$ 만큼 떨어진 기포에 영향을 줄 때에 진동위상이  $k_0 d$ 의 차이를 가지고 영향을 주기 때문이다. 또한 이 식에서 기포들 사이에 상호작용은 기포의 반경과 두 기포간의 거리에 관계됨을 알 수 있다. 각각 고유 힘상수  $k$ 를 가지는 기포 두 개가 그 사이의 상호작용으로 유효결합상수  $\alpha$ 만큼 서로 영향을 주고 있음을 나타내며, 기포 두 개가 초기에 같은 진폭으로 각각 진동한다고 생각하면 이러한 상호작용을 고려한 운동방정식은 다음과 같다.

$$m \ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 + \alpha k\xi_2 \quad (7)$$

$$m \ddot{\xi}_2 = +\alpha k\xi_1 - k\xi_2 \quad (8)$$

여기서  $\xi_1$ 은 첫번째 기포 표면의 진동변위,  $\xi_2$ 는 두번째 기포 표면의 진동변위이다. (7)식에서 보면, 첫번째 기포가 받는 힘은 자신의 진동변위와 인접한 두번째 기포의 진동변위에 관계하고 있음을 알 수 있다.  $\alpha$ 의 부호가  $k$ 와 반대인 이유는 첫 번째 기포가 팽창할 때 첫 번째 기포에 작용하는 복원력의 방향은 팽창과 반대 방향이지만, 두 번째 기포는 전파된 음압에 의해 팽창하는 힘을 두 번째 기포의 복원력으로 작용하기 때문이다. 운동방정식인 (7)과 (8)식의 연립방정식을 행렬형태로 표시하면 다음과 같다.

$$K[X] = w^2 M[X] \quad (9)$$

여기서,  $X$ 는 기포들의 진동형태를 나타내는 고유벡터이며,  $w$ 는 공진 각진동수를 나타내는 고유값이다.  $K$ 와  $M$ 은 다음과 같다.

$$K = k \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, 힘상수 행렬  $K$ 의 행렬요소를 보면 각 기포 사이에  $\alpha$ 라는 유효 결합상수가 관계하고 있음을 나타낸다. 운동방정식 (10)식의 해는  $(K - w^2 M)[X] = 0$ 을 만족하는 고유값  $w$ 와 고유벡터  $X$ 로 주어지고,  $f = w/2\pi$ 가 결합 공진주파수로 아래와 같이 구해진다.

$$\frac{f_{N=2}}{f_o} = \sqrt{1 - \alpha}, \sqrt{1 + \alpha} \quad (11)$$

여기서, 첫 번째 해는 저주파수 성분(대칭모드)을, 두 번째는 고주파수 모드(반대칭 모드)를 나타낸다.

그림 1에 두 기포의 결합진동에 의한 방출 주파수의 주파수의 변화를 두 기포간의 간격의 함수로 나타내었다.

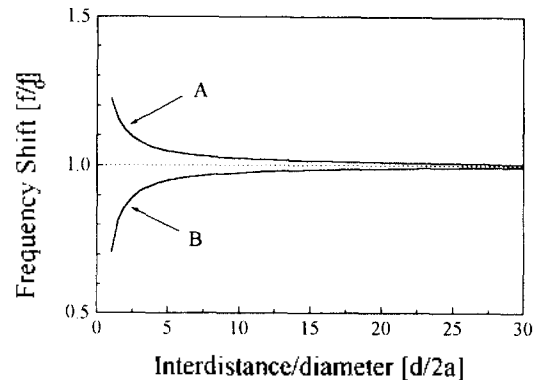


그림 1. 두 기포의 결합진동에 의한 방출주파수의 변화 (A: 반대칭모드 [⊖⊖], B: 대칭모드 [⊕⊕])

곡선 A는 기포의 위상이 ⊖⊖인 경우(반대칭 모드)로서

기포간격이 좁아질수록 기포 개개의 고유공진주파수  $f_0$  보다 높은 주파수로 편이되고 있으며, 이것은 두 기포가 동시에 반대의 위상으로 진동하고 있는 경우를 나타낸다. 즉, 이 경우 두 기포는 서로 진동을 상승시킴으로서 더욱 빠르게 진동하여 방출음파의 주파수가 높아지는 것을 뜻한다. 곡선 B는 기포의 위상이  $\oplus\oplus$ 인 경우(대칭모드)로서 두 기포가 동시에 동일 위상으로 진동하는 현상을 나타내며, 두 기포는 서로의 진동을 억제하여 진동이 느리게 일어남으로서 방출음파의 주파수가 낮아지는 것에 해당된다. 또한 기포들 사이의 거리가 무한대로 떨어져 있는  $d \rightarrow \infty$ 인 경우에는 개개 기포의 독립된 진동을 기대할 수 있는데, 이것은 유효 결합상수  $a$ 가 0으로 갈수록 기포들 사이의 연결상태가 약하다는 뜻이며, 개개 기포의 공진주파수로 접근한다.

### II-3. 세 기포의 결합진동

세 기포가 등간격 상태로 나란히 발생되었을 경우, 행렬  $K$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = k \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & -a \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 첫 번째 기포가 세 번째 기포에 주는 영향은 고려되지 않았다. 그 이유는 두 번째 기포에 의해 음파가 차폐되어 많은 에너지를 잃어버려 세 번째 기포에 미치는 영향이 매우 작기 때문이다. 해는 다음식으로 주어진다.

$$\frac{f_{N=3}}{f_0} = \sqrt{1 - \sqrt{2}a}, 1, \sqrt{1 + \sqrt{2}a} \quad (13)$$

그림 2에 세 기포의 결합진동에 의한 방출 음파의 주파수의 변화를 기포간 거리의 함수로 나타내었다. 곡선 A와 B는 기포간격이 좁아질수록 기포 개개의 고유공진주파수  $f_0$ 보다 높은 주파수로 편이되고 있으며, A는 기포의 위상이  $\oplus\ominus\oplus$ 인 경우(반대칭 모드)를 나타낸다. 즉, A의 경우 세 기포는 서로 진동을 상승시킴으로서 더욱 빠르게 진동하여 방출음파의 주파수를 높인다. 곡선 C는 세 기포가 동시에 동일 위상인  $\oplus\oplus\oplus$ 의 상태로 진동하는 경우(대칭 모드)로서, 세 기포는 서로의 진동을 억제하여 진동이 느리게 일어남으로서 방출음파의 주파수가 낮아지는 것에 해당된다. B의 경우 일부는 진동을 상승시키고 일부는 진동을 억제하여 주파수 편이가 나타나지 않는다.

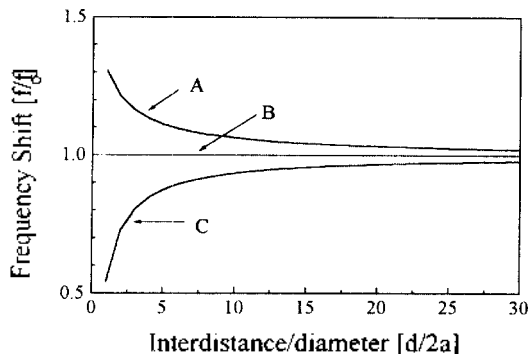


그림 2. 세 기포의 결합진동에 의한 방출주파수의 변화 (A: 반대칭모드  $[\oplus\ominus\oplus]$ , C: 대칭모드  $[\oplus\oplus\oplus]$ )

## III. 선배열 기포의 결합진동 결과 및 비교

### III-1. 모든 기포가 음원인 선배열 기포의 결합진동

기포의 개수가  $N$ 인 일차원 선배열로 이루어진 기포들의 경우로 확장하면 행렬  $K$ 는  $N \times N$  행렬로서 다음의 (14)식으로 확장된다.

$$K = k \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a & 1 & -a & \cdots & \vdots \\ 0 & -a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & -a & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$N$ 개의 기포에 대한 해는 (14)식을 (9)식에 대입하여  $N$ 개의 고유값을 구함으로써 유효 결합 조화진동자의 결합공진주파수들을 찾을 수 있다. 기포의 진동으로 방출되는 음파의 파장은 기포반경의 약 460배가 되므로, 배열기포의 총 거리가 각 기포의 고유파장의 460배보다 작으면, 주된 진동모드는 대칭모드( $\oplus\oplus\oplus\oplus \cdots$ )가 가장 들뜨게 되며, 주파수는 항상 가장 작은 저주파수가 효율적으로 방출되게 된다. 이 경우에 해당하는 가장 낮은 방출주파수  $f_L$ 는 미약한 고차항 ( $O(a^2)$ )을 무시할 경우에 다음으로 주어진다.

$$\frac{f_L(N)}{f_0} \approx \sqrt{1 - a\sqrt{N-1}} \quad (15)$$

반면에 이 이외의 다른 주파수들은 잘 발생되지 않는 결합진동모드이므로 실질적으로도 관측하기 어렵게 된다.

그림 3은 기포들 사이의 거리에 따른 최저 공진주파수의 변화를 계산한 결과이다. 기포의 개수가 늘어남에 따라 최저 공진주파수가 급격하게 감소함을 알 수 있다.

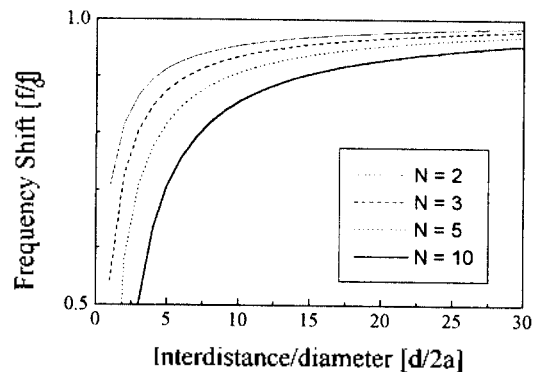


그림 3. 기포의 개수별 기포간 간격에 따른 최저 공진주파수의 변화(모든 기포가 음원일 경우).

### III-2. 음원기포가 한 개 또는 두 개인 경우에 대한 선배열 기포의 결합진동

위의 선배열 기포의 진동은  $N$ 개의 기포들이 각각 초기에 같은 진폭으로 진동할 경우를 상정하고 전개한 것이다. 그러나 실제로는 수중에서 노즐을 통해 기포를 일렬로 순차적으로 발생시키는 수직선배열 기포의 경우에 음

원은 항상 노즐에서 마지막으로 분출된 기포가 된다. 이 경우 첫 번째 기포에서 방출된 음파가 순차적으로 다른 기포들에 영향을 주게 되고, 또한 영향을 받은 각각의 기포들은 또다시 주변 기포들에 영향을 주게 된다. 이것을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$K = k \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha^2 & 1 & -\alpha^2 & \dots & \vdots \\ 0 & -\alpha^3 & 1 & -\alpha^3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\alpha^N \\ 0 & \dots & \dots & -\alpha^N & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 행렬  $K$ 의 첫 번째 행은 첫 번째 기포가 두 번째 기포에  $-\alpha$ 만큼의 영향을 주고 있으며, 두 번째 행에서 보면 두 번째 기포는 첫 번째 기포로부터 받은 영향을 다시 주변기포에  $-\alpha^2$ 만큼 영향을 주게 됨을 나타내고 있다. 그 다음도 마찬가지로 순차적으로 그 영향이 전개되고 있다. 이 경우에 해당되는 가장 낮은 방출주파수  $f_L$ 는 근사적으로 다음식으로 정리된다.

$$\frac{f_L(N)}{f_0} \approx \sqrt{1 - \sqrt{\alpha^3 \sum_{n=2}^N \alpha^{2(n-2)}}} \sim \sqrt{1 - \sqrt{\alpha^3}} \quad (17)$$

이 식에서 보면 기포의 개수에 의한 차이가 매우 작음을 알 수 있다. 음원역할을 하는 기포가 두 개일 경우는 (17) 식의 두 번째 항에  $\alpha^2$ 이 첨가된다. 그림 4에 이 경우에 대한 거리에 따른 주파수 변화를 나타내었으며, 원표시(O)는 참고문헌 [6]에 따른 실험결과이다. 음원기포가 두 개일 경우의 결과가 실험값에 비교적 잘 일치하고 있다. 모든 기포가 초기에 같은 진폭으로 진동을 한다면 그림의 점선과 같이 표시되며 실험과 상당한 차이를 보임을 알 수 있다. 이와같이 초기에 우세한 진동을 하는 기포의 개수에 의존하여 결과가 달라지고 있으므로 실제의 상황의 조건과 맞게 이론을 적용해야 할 것이다.

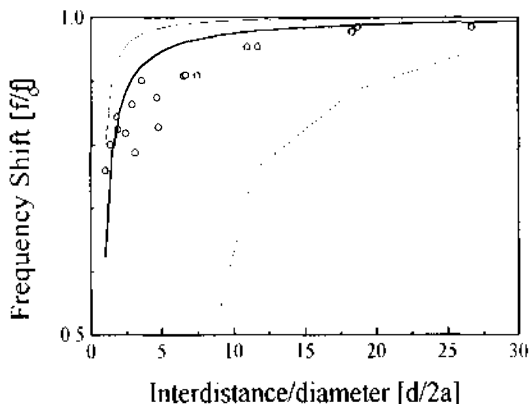


그림 4. 기포간 간격에 따른 최저 공진주파수의 변화 (실선: 한 음원기포, 굵은 실선: 두 음원기포, 점선: 모든 기포가 음원역할, O: 실험값)

그림 5에 각 모드에 대한 방출음압의 주파수 스펙트럼을 나타내었다(참고문헌 7 참조).

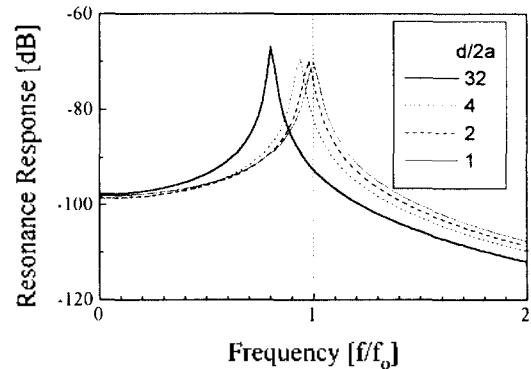


그림 5. 기포간 거리에 따른 방출음압의 주파수 스펙트럼

## V. 결론

수중에서 발생된 기포들의 상호작용에 의한 방출주파수의 변화를 알아보기 위해 두 개, 세 개 기포에 대해, 그리고 선배열 형태의 기포에 대해 이론접근을 시도하였다. 우선 기포들의 결합진동에 의한 방출주파수는 가능한 가장 저주파수의 음파가 발생됨을 설명하였다. 그리고 선배열 기포의 경우, 한 개 또는 두 기포가 음원역할을 하는 실제적인 경우에 대해 이론을 전개하였으며, 기포의 총 개수의 영향은 매우 작음을 밝혔다. 이러한 결과는 참고문헌[6]의 실험결과에 비교적 잘 일치하였다. 그러므로 수중에서 노즐로 일정간격으로 발생된 선배열 기포의 경우, 음원기포의 조건에 따라 어느 주파수로 이하로는 더 이상 저주파수 성분이 발생되지 않음을 주장할 수 있다. 이러한 결과는 기포간의 결합진동을 다룬 경우에 기포들의 초기 운동상태의 조건에 따라 들뜨는 주파수 성분들이 다양하게 변할 수 있으므로, 기포발생조건에 따라 기포간 결합진동을 이론적으로 다르게 다루어야 함을 의미한다.

## 참고문헌

1. S. W. Yoon, L. A. Crum and A. Prosperetti, "An experimental investigation of bubble clouds as sources of ambient noise," *J. Acoust. Soc. Am.* **86**, S88 (1989).
2. S. W. Yoon, L. A. Crum, A. Prosperetti and N. Q. Lu, "An investigation of the collective oscillations of a bubble cloud," *J. Acoust. Soc. Am.* **89**, 700-706 (1991).
3. I. Tolstoy and A. Tolstoy, "Line and plane arrays of resonant monopole scatterers," *J. Acoust. Soc. Am.* **87**, 1036-1043 (1990).
4. A. Akay, "Radiation from a finite array of simple sources," *J. Acoust. Soc. Am.* **87**, 1449-1454 (1990).
5. Y. A. Ilinskii and E. A. Zaboloskaya, "Cooperative radiation and scattering of acoustic waves by gas bubbles in liquids," *J. Acoust. Soc. Am.* **92**, 2837-2841 (1992).
6. 최복강, 윤석왕, "수중 공기방울의 선형배열에 의한 음향 방출", *한국음향학회지* 제13권 3호, 71-77, 1994.
7. C. Fouillade, "Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances," *J. Acoust. Soc. Am.* **98**, Pt. 1, 1178-1190 (1995).
8. C. S. Clay and H. Medwin, *Acoustical Oceanography: Principles and Applications* (John Wiley & Sons, Inc., N.Y. 1977), pp.194-203.