

층상매질에서의 이차원 초음파음장 전파특성해석

윤혁준*, 하강열**, 김무준**, 이종규**

* 부경대학교 대학원 음향진동공학협동과정, ** 부경대학교 물리학과

Analysis of the Propagation Characteristics of Two Dimensional Ultrasonic Fields in Layered Media

Hyuck-Joon Yoon*, Kang-Lyeol Ha**, Moo-Joon Kim**, Jong-Kyu Lee**

* Dept. of Acoustics and Vibration Engineering, Graduate School, Pukyong Nat'l. Univ.

** Dept. of Physics, Pukyong Nat'l. Univ.

요약

고유음향 임피던스가 다른 물질이 층상구조를 이루고 있는 매질내에서 임의의 한 층에 형성된 이차원 초음파음장이 다른 매질로 전파될 때의 특성을 각스펙트럼법에 의해 해석하였다. 음원으로서의 baffle된 원형 트랜스듀서들, 층상구조 매질로서는 물과 생체조직(지방)의 경계를 각각 고려하였다. 해석에 있어서는 먼저 각스펙트럼 분해요소, 즉, 음원의 크기 및 거리에 의존하는 기준음장의 최적 크기와 샘플링 간격을 균질매질을 이용하여 결정한 다음, 그 요소를 층상매질에 적용하였다. 그 결과, 경계면에서의 입사각(공간주파수)에 의존하는 투과계수와 입사음장의 곱으로 나타내어지는 투과음장은 각스펙트럼법에 의해 짧은 시간내에 정도 높게 산출될 수 있음을 보인다.

ABSTRACT

The forward propagation of two-dimensional ultrasonic fields through layered media was theoretically investigated by the angular spectrum method(ASM). A baffled circular transducer and water/biological tissues were considered as source planes and stratified media respectively. The optimum spatial sampling intervals and the angular dimensions were obtained by the virtual boundaries supposed in homogeneous water. It is shown, as results, the forward propagated fields given by the incident fields and transmission coefficients are calculated rapidly by the ASM.

1. 서론

균질의 매질내에 형성되는 초음파음장의 해석에는 종래의 회절이론에 근거한 Rayleigh 적분식이나 그 Lommel 근사법이 주로 이용되어져 왔다.⁽¹⁾ 그러나, 비균질매질 내에서의 초음파음장 해석에는 일정 파수의 합수인 종래의 방법을 그대로 적용시킬 수 없으며 새로운 방법을 도입할 필요가 있다. 필자 등은 음향임피던스가 다른 매질이 평면의 경계를 갖는 층상 구조를 이루고 있을 때, 임의의 단면에서의 음장해석에 각스펙트럼법(Angular Spectrum Method: ASM)을 사용하기 위해 그 도입에 따른 유효성과 오차의 정도를 균질 매질에서의 가상경계를 설정하여 분석, 보고한 바 있다. 본 연구에서는 앞 방향으로 전파하는 2차원 음장이 각스펙트럼 분해요소, 즉, 표본화 주파수, 기준음장 크기 등에 의해 받는 영향을 분석한 뒤 최적의 요소를 결정하고, 그 값을 이용하여 물과 생체가 경계를 이루고 있는 층상의 비균질매질에서의 투과음장을 해석하였는바, 그 결과에 대해 보고한다.

II. 각스펙트럼 해석 및 분해요소 결정

매질이 경계가 없는 균질의 물질 경우, 그림 1의 좌표계에서 나타낸 바와같이 반경 a 인 원형의 트랜스듀서로부터 중심축상에서 $z=z_0$ 거리에 있는 xy 단면 D_1 의 음장 $u_1(x_1, y_1, z_1)$ 은 음원평면상의 한 점의 좌표를 $P_0(x_0, y_0, 0)$ 관측점의 좌표를 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 두점간의

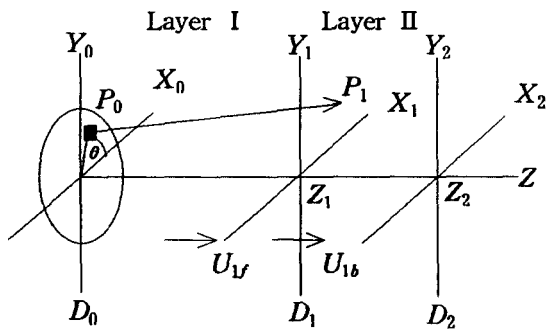


그림 1 층상매질의 좌표상의 표현

거리를 r_{01} 이라고 하면 Rayleigh-Sommerfeld 회절공식⁽²⁾에 의해

$$u_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{j\lambda_w} \iint_S u_0(x_0, y_0, 0) \times \frac{e^{jk_w r_{01}}}{r_{01}} ds \quad (1)$$

로 나타내어진다. 여기서, λ_w 와 k_w 는 각각 수중에서의 파장 및 파수, $u_0(x_0, y_0, 0)$ 는 트랜스듀서면상의 음장이며, ds 는 그 면상의 미소면적으로, $\rho = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ 및 $\theta = \tan^{-1}(y_0/x_0)$ 에 의해 $ds = \rho d\rho d\theta$ 둘 수 있다. 트랜스듀서를 피스톤음원으로 가정하여 $u_0(x_0, y_0, 0) = 1$ 로 두고, z_1 이 x, y 좌표 및 ρ 에 비해 충분히 크면(2)식은

$$u_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{2\pi}{j\lambda_w z_1} e^{jk_w(z_1 - \frac{1}{2z_1}(z_1^2 + \rho^2))} \int_0^{\rho} e^{-jk_w \frac{\rho^2}{2z_1}} \times J_0(-k_w \rho x_1 \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{z_1}) \rho d\rho \quad (2)$$

가 된다.⁽³⁾ 여기서, $J_0()$ 는 Bessel 함수이다.

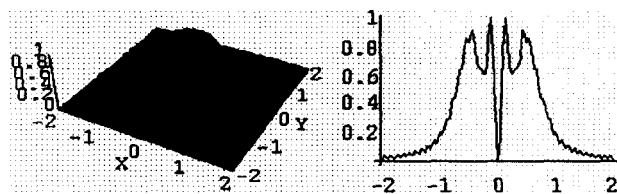


그림 2(a) Z=0.25 (12480초) N=121개

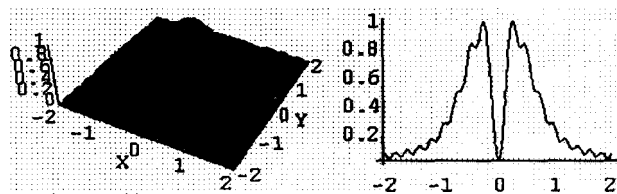


그림 2(b) Z=0.5 (9844초) N=121개

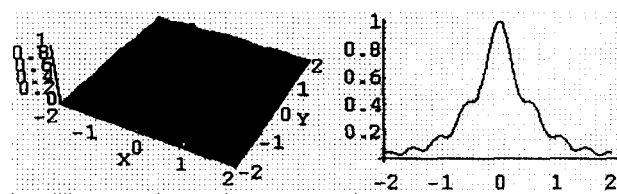


그림 2(c) Z=1 (5232초) N=121개

그림 2는 물에서 주파수 $f=8\text{kHz}$, $a=1.5\text{cm}$ 인 원형 초음파 트랜스듀서가 만드는 xy 음장을 나타낸 것이며, 각각 $Z=0.25, 0.5, 1.0$ 일 때를 Rayleigh-Sommerfeld 회절공식으로 계산한 것이다. 그림에서는 $X=x/a$, $Y=y/a$, $Z=\lambda z/a^2$ 를 사용하여 좌표축을 규준화 하였는데, $Z=1$ 이 트랜스듀서로부터 33.3cm의 거리로서 근거리영역의 한계에 해당된다.

그림 1에서 $z=z_1$ 인 평면의 음장 $u_1(x_1, y_1, z_1)$ 는 각스펙트럼법을 적용하면 다음과 같이 구해진다.^(2,3) 먼저, 트랜스듀서면상의 각스펙트럼 $U_0(k_x, k_y; 0)$ 은

$$U_0(k_x, k_y; 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0(x_0, y_0, 0) e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} dx_0 dy_0 \quad (3)$$

즉, 트랜스듀서면상의 음장 $u_0(x_0, y_0, 0)$ 이 이차원 푸리에 변환으로 주어지는데, 여기서, k_x 및 k_y 은 각각 매질 I에서의 x 및 y 방향에 대한 파수이다. 이로부터 $z=z_1$ 인 단면 D_1 에의 입사음장 $u_1(x_1, y_1, z_1)$ 의 각스펙트럼 $U_1(k_x, k_y; z_1)$ 은,

$$U_1(k_x, k_y; z_1) = U_0(k_x, k_y; 0) H(k_x, k_y; z_1) \quad (4)$$

이 된다. 여기서, $H(k_x, k_y; z_1)$ 는 음원평면의 중심점에 존재하는 점음원에 의하여 $z=z_1$ 인 거리에 있는 평면에 만들어지는 음장 $h(x_1, y_1, z_1)$ 이 이차원 푸리에 변환이다. 따라서, D_1 평면의 음장 $u_1(x_1, y_1, z_1)$ 는 $U_1(k_x, k_y; z_1)$ 의 이차원 푸리에역변환, 즉, 다음과 같이 구해진다.

$$u_1(x_1, y_1, z_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(k_x, k_y; 0) \times e^{j(k_x x_1 + k_y y_1)} dk_x dk_y \quad (5)$$

그림 3은 동일한 트랜스듀서에 대해 각스펙트럼법에 의해 산출한 $Z=0.25, 0.5, 1.0$ 인 단면 D_2 의 음장을 나타낸 것이다. 계산방법은 경계면 없이 각각의 거리에 대해 계산하고 Rayleigh-Sommerfeld 회절공식으로 계산한 것과 비교하여 유효성을 검토하였다. 그림 2와 3을 비교해 보면 외곽부분을 제외하고는 Rayleigh-Sommerfeld 회절공식에 의한 음장과 매우 유사하게 나타난다.

또한, $Z=0.25$ 에 대해 121×121 의 데이터를 이용하여 계산한 계산시간을 비교해보면 Rayleigh-Sommerfeld 회절공식에 의한 방법은 12480초, 각스펙트럼법에 의한 방법은 188초였다. 이로부터 각스펙트럼법은 계산시간을 상당히 단축시키는 잇점이 있다는 것을 확인하였다. 각스펙트럼법의 정확성은 기준음장의 크기 T 와 분해요소 N 의 갯수 N 에 의해서 결정된다.⁽⁴⁾ 분해요소의 갯수, 즉 샘플링갯수는 Nyquist 조건에 의해 최대 주파수의 2배 이상이 되도록 샘플링 해야한다.

$$f_s \geq 2f, \quad \frac{c}{\lambda_s} \geq 2\frac{c}{\lambda}, \quad \lambda_s \leq \frac{\lambda}{2}, \quad \delta \leq \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

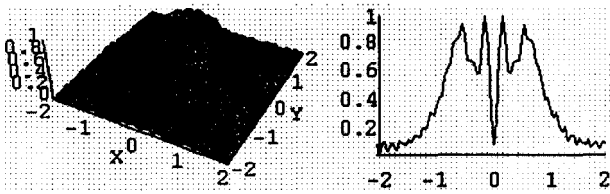


그림 3(a) Z=0.25 (188초) N=121개

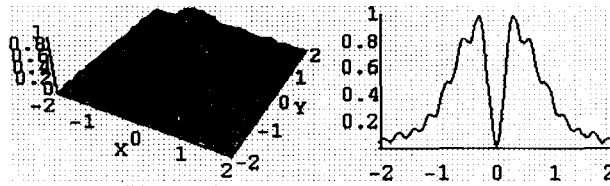


그림 3(b) Z=0.5 (204초) N=121개

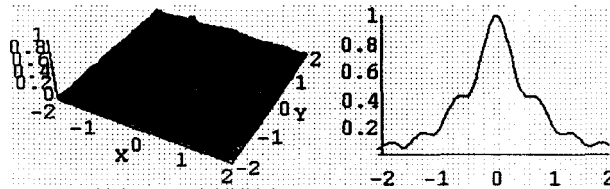


그림 3(c) Z=1 (187초) N=121개

여기서 f_s 는 샘플링주파수, λ_s 는 샘플링간격으로써 δ 로 나타낸다. 따라서, 샘플링갯수는

$$\delta N = T, \quad N = \frac{T}{\delta} \quad (7)$$

가 된다. 기준 음장의 크기 T의 결정은 T가 무한히 큰 평면이라면 푸리에 변환에 의한 오차가 생기지 않지만 수치해석이 불가능하므로 주어진 오차범위내의 값을 갖도록 적절한 크기를 선정해야 한다.

그림 3은 Z=0.25의 거리에서 T를 트랜스듀서 반경 a의 4배, 6배로 정하고 각각에 대해 샘플링갯수 N을 변화시키면서 계산한 음장의 단면도이다. 그림 3(d)와 3(h)는 T의 크기에 따라 Nyquist 조건을 만족하는 샘플링갯수로 계산된 음장의 단면도이다. T가 4배일 때는 적분계산결과와 잘 맞지 않고, 샘플링갯수에 대해 큰 변화가 없지만, T를 6배로 계산했을 때는 보다 적분계산결과와 잘 맞고, N이 Nyquist 조건을 만족하지 않으면 aliasing 오차가 많이 발생한다는 것을 알 수 있다.

따라서 본 연구에서는 동일한 트랜스듀서에 대한 이후의 모든 계산에 기준 음장 크기 T를 a의 6배로 하고 (8)과 (9)식을 이용하여 도출한 샘플간격 $\delta = 0.015$ 와 N=400개의 샘플링갯수를 계산의 기준값으로 이용하였다. 그리고, 계산된 음장의 좌, 우측 오차가 생기는 부분은 잘라내고 -2에서 2의 크기까지만 나타내었다

III. 층상 매질에 대한 각스펙트럼법의 적용

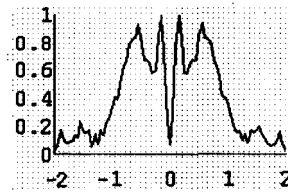


그림 4(a) T=1, N=81

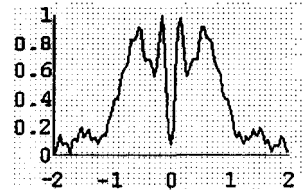


그림 4(b) T=4, N=101

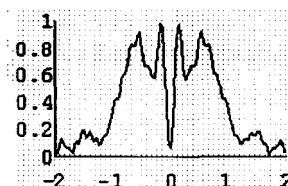


그림 4(c) T=4, N=121

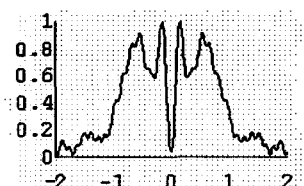


그림 4(d) T=4, N=281

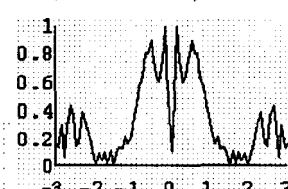


그림 4(e) T=6, N=81

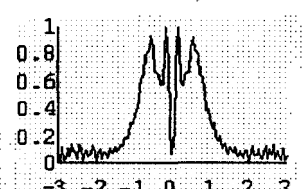


그림 4(f) T=6, N=121

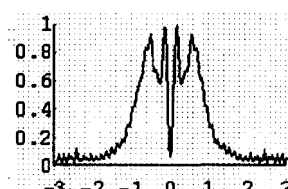


그림 4(g) T=6, N=181

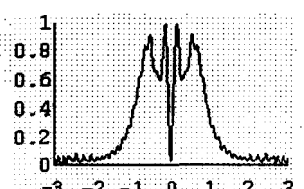


그림 4(h) T=6, N=401

그림 1에서 $z = z_1$ 불연속적인 경계면이라고 가정하였을 때, 경계를 통과한 $z = z_2$ 인 평면의 음장 $u_2(x_2, y_2, z_2)$ 에 각스펙트럼법을 적용해보면, $z = z_1$ 인 단면 D_1 을 통과한 투과음장의 각스펙트럼이 $U_{1b}(k_x, k_y; z_1)$ 이므로

$$U_{1b}(k_x, k_y; z_1) = U_{1a}(k_x, k_y; z_1) T(k_x, k_y) \quad (8)$$

이 되고, 여기서, $T(k_x, k_y)$ 는 D_1 단면에서의 투과계수로서 주파수의 함수이고 음원이 갖는 각주파수가 매질이 달라짐으로써 snell의 법칙에 의해 위상차가 생길 때의 위상정보를 포함한다⁽⁴⁾. 즉,

$$T(k_x, k_y) = 2 \frac{\cos(\theta_{out})}{\cos(\theta_{in})} \left(\frac{\cos(\theta_{out})}{\cos(\theta_{in})} + \frac{\rho_0 c_0}{\rho_1 c_1} \right) = \frac{2}{1 + \frac{\rho_0 \rho_0 \sqrt{k^2 - (c_1/c_0)^2 k_x^2 - (c_1/c_0)^2 k_y^2}}{\rho_1 c_1 \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}} \quad (9)$$

로 나타내어진다. $U_{1b}(k_x, k_y; z_1)$ 로부터 $z = z_2$ 인 단면 D_2 의 각스펙트럼은

$$U_2(k_x', k_y'; z_2) = U_{1b}(k_x, k_y; z_1) H(k_x', k_y'; z_2) \quad (10)$$

으로 주어진다. 따라서, D_2 평면의 음장 $u_2(x_2, y_2, z_2)$ 는 $U_2(k_x', k_y'; z_2)$ 의 이차원 푸리에역변환, 즉,

$$u_2(x_2, y_2, z_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U_2(k_x', k_y'; z_2) \times e^{i(k_x'x + k_y'y)} dk_x' dk_y' \quad (11)$$

에 의해 구해진다. 매질이 여러 경계층을 갖는 다층구조일 경우에는 위의 과정을 반복적용하면 임의 지점에서 음장산출이 가능하게 된다.

IV. 해석결과 및 고찰

그림 5는 $Z=0.25$ 에 경계층이 있어서 $Z < 0.25$ 인 곳은 매질이 물이고, $Z > 0.25$ 인 곳은 물, 지방, 임의의 매질이라고 하였을 때 투과계수를 써서 $Z=0.5$ 면에서의 음장을 각각 계산한 결과이다. 그림 5(a)는 물을 $Z=0.25$ 에서 경계로 나누어 계산한 것이고, (b)는 물(음속: 1500m/s, 밀도: 1000g/cm³)과 지방(음속: 1570m/s,

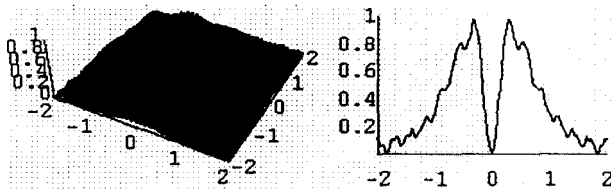


그림 5(a) 물에서 가상경계를 두고 투과함

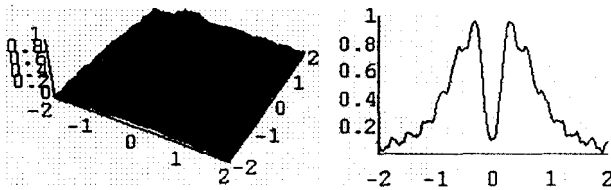


그림 5(b) 지방을 투과함

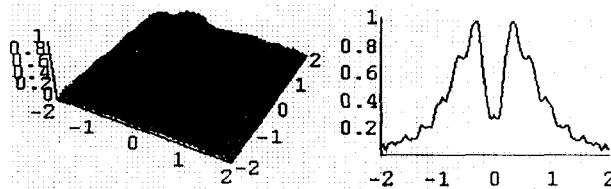


그림 5(c) 임의의 매질을 투과함

밀도: 1015g/cm³)을 투과했을 때, (c)는 밀도와 음속이 지방보다 더 큰 임의의 매질(음속: 1700m/s, 밀도: 1100g/cm³)을 투과했을 때를 계산하였다.

여기서 투과음장에 대한 유효성을 계산상으로 좀 더 확실히 알아보기 위해 매질을 투과할 때 생기는 굴절과 k 의 경로를 기하학적으로 계산하였다. 그림 6에서는 매질 II를 투과함으로써 생기는 진행경로와 매질 II를 투과

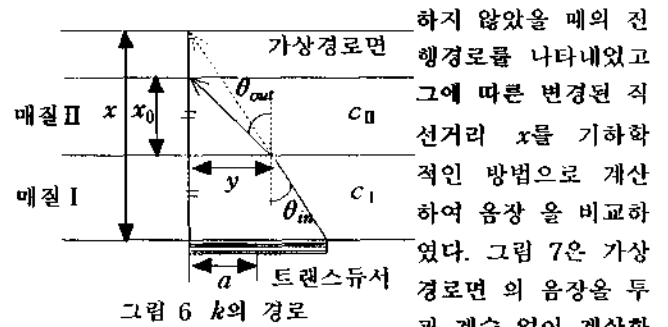


그림 6 k 의 경로

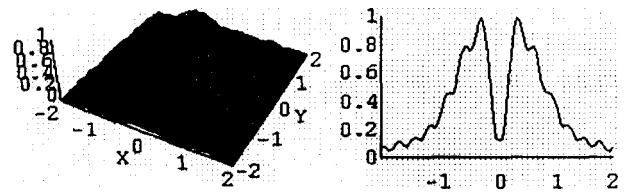


그림 7(a) $z=17.0613$ cm

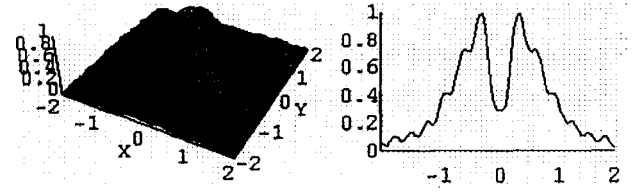


그림 7(b) $z=17.7948$ cm

V. 결론

음장해석에 있어서 각스펙트럼법의 유효성과 정확성에 대한 중요한 요소인 기준음장의 크기 및 Nyquist조건에 따른 샘플링 수에 대해 검토하였고, 층상매질에서 공간적 투과계수를 이용하여 투과음장을 해석하였다. 금 후 좀 더 실제적인 매질에 대한 실험적인 확인과 검증을 통해 수정, 보완된 모델로서 계속적인 연구를 수행할 예정이다.

참고문헌

1. M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics," Pergamon Press, 5ed, pp. 435-449, 1975.
2. J.W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics," McGraw-Hill Co., pp. 42-54, 1968.
3. 김정순, 김동현, 김무준, 하강열, "각스펙트럼법을 이용한 초음파 음장형성에 미치는 수은 경계층의 영향 해석", 한국음향학회 학술발표회 논문집, pp. 401-405, 1996
4. P.T. Christopher and K.J. Parker, "New Approaches to the Linear Propagation of Acoustic Fields," J. Acoust. Soc. Am. 90(1), pp. 507-521, 1991.