

## Fourier 방법을 이용한 불균일 고체의 탄성과전달해석

김현실, 김재승, 강현주, 김상렬(한국기계연구원 음향연구그룹)

### An analysis of elastic wave propagation in inhomogeneous solids using the Fourier method

Hyun-Sil Kim, Jae-Seung Kim, Hyun-Joo Kang, and Sang-Ryul Kim(KIMM)

(E-mail : hskim@mailgw.kimm.re.kr)

#### ABSTRACT

Wave propagation in inhomogeneous elastic media is studied by using the Fourier method, where the spatial derivatives are computed by the FFT algorithm, while the time derivatives are expanded into the second order finite different expansion. For numerical examples, wave propagation in the layered half-plane are investigated. The comparisons of numerical and analytic results shows good agreement.

과장당 최소 9개의 절점이 필요하며 인위적인 분산(dispersion)이 불가피한데 Fourier 방법은 최소 2개까지 줄일 수 있으며 분산현상이 없으므로 기억용량 및 계산시간의 절감, 정확성 등에서 매우 유리하다. 본 논문은 음향파의 전달을 다룬 참고문헌[2]의 후속편으로 밀도, 음파의 속도가 위치에 따라 다른 탄성체내의 음파전달을 Fourier 방법을 이용하여 해석하였다. 예제로 유한한 두께의 탄성층이 반 무한 탄성평면과 접한 경우를 해석하여 엄밀해와 결과를 비교하였으며 잘 맞음을 알 수 있었다.

#### I. 서론

불균일 매질의 음파전달은 여러 가지 지층구조로 이루어진 지반의 지진파해석이나 음파의 전파속도가 수표면으로부터의 깊이에 따라 변하는 해양의 음파전달해석 등에 이용되는 실용적인 문제로 극히 특별한 구조외에는 수치해석적인 접근이 불가피하다. 밀도와 음파의 전파속도 등 물성치의 변화와 더불어 복잡한 형상을 갖는 경우의 파동전파를 해석하기 위해 여러 가지 방법이 이용되어 왔는데 대표적인 방법으로 유한요소법(FEM), 유한차분법(FDM), 경계요소법, 음선추적법(sound ray tracing method) 등을 들 수 있다. 지금까지는 지배방정식 중 공간에 대한 미분항은 FEM 또는 FDM[1]을 이용하여 처리하였는데 최근에는 Fourier 방법을 도입한 해석이 널리 활용되고 있다. FEM 또는 FDM은

#### II. 지배방정식

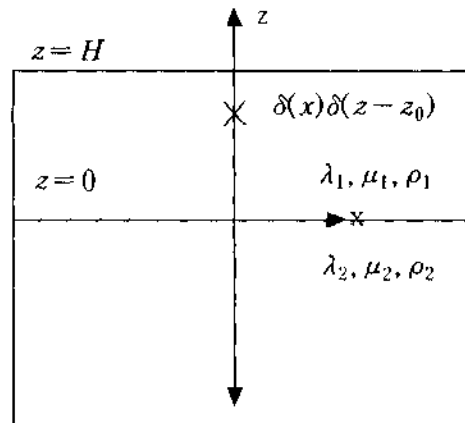


Fig. 1 A layered elastic plane

그림 1과 같이  $(x, z)$  평면에서 탄성파의 지배방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho f_x \quad (1a)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (1b)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도이며  $u$ 와  $w$ 는 각각  $x$  및  $z$  축으로의 변위이며  $f_x, f_z$ 는 가진력을 나타낸다. 응력과 변위는 다음 식을 만족한다.

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2a)$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2b)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2c)$$

단,  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lamé의 상수이다. 매질이 반무한 또는 무한한 영역이라면 먼저 해석하고자 하는 영역을 선택하여야 하는데 Fourier 방법을 적용하기 위해서는 관심있는 영역을 충분히 포함하면서 직사각형(이차원인 경우)이 되도록 해야한다. 공간에 대한 미분항의 처리를 위해 Fourier 변환의 다음 특성을 이용한다.

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

$$(i\xi)^n F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx$$

먼저  $\partial \sigma_{xx} / \partial x$  항의 경우를 고려하면 다음과 같은 순서를 따른다.

- (1)  $u$ 를  $x$ 에 대해 Fourier 변환하여  $U^*(\xi, y, t)$ 를 구한다.
- (2)  $(i\xi)U^*$ 를 역 Fourier 변환하여  $\partial u / \partial x$ 를 구한다.
- (3) 같은 방법으로  $\partial w / \partial z$ 를 구한다.
- (4) 식 (2a)에 의해  $\sigma_{xx}$ 를 구하고 같은 방법으로 Fourier 변환 및 역변환하여  $\partial \sigma_{xx} / \partial x$ 를 구한다.

다른 항도 동일한 요령으로 처리하며 실제 계산 과정에서는 Fourier 변환 및 역 변환은 기존의 FFT 프로그램을 이용하였는데 효율성을 극대화하기 위해  $x$ 와  $y$ 방향으로의 요소수  $N$ 은  $2^n$ 개로 택하였다.

시간에 대한 미분항은 이차 유한차분법을 적용하였으며 지배방정식 (1a)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}))}{\Delta t^2} = f_x(x, y, t_n) + L_x \quad (3)$$

단,  $u_n$ 은  $t = t_n$ 에서의 값이며  $\Delta t$ 는 시간의 증분을 나타낸다.  $L_x$ 는 응력의 미분항을 나타내며 식 (1b)도 같은 방법으로 유한차분화 한다. 식 (3)의 해가 안정적으로 주어지기 위해서는 다음 관계를 만족하도록  $\Delta t$ 를 선택하여야 한다.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta_d} < \frac{\sqrt{2}}{\pi} (\approx 0.45)$$

단,  $\Delta_d$ 는 공간상에서의 절점간격으로 이는 음향파의 조건과 동일하며 실제로는  $c\Delta t / \Delta_d < 0.2$ 가 되도록 시간증분을 택한다.

무한영역 중 유한한 영역만 모델링함으로써 발생하는 가장 큰 문제는 경계에서의 인위적인 반사현상("wrap-around")으로 반사파를 제거해주지 않으면 시간이 흘러감에 따라 해는 완전히 반사파에 의해 오염되고 만다. 본 논문에서는 참고문헌 [2]와 동일한 방법을 사용하였다.

### III. 적층 탄성평면의 엄밀해

수치해석방법을 검증하기 위해서는 엄밀해와 비교하여야 하지만 탄성과해석은 엄밀해가 주어진 경우가 대단히 적으므로 본 연구에서는 그림 1과 같이 두께가  $H$ 인 탄성판이 반무한 탄성평면에 접한 경우에 대해 엄밀해를 유도하였다. 포인트 하중이 판에 가해지는 경우를 고려하였다. 두 물체가 용접한 것처럼 붙어있는 경우를 가정하면 경계조건으로는 표면에서 응력이 없으며 연속면에서 변위와 응력이 같아야 한다.

경계조건:

$$\text{at } z = H : \quad \sigma_{zz}^1 = \sigma_{xz}^1 = 0$$

$$\text{at } z = 0 : \quad u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2$$

$$\sigma_{xz}^1 = \sigma_{xz}^2, \quad \sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2$$

식 (1)과 (2)의 지배방정식을 변위로만 표현한 후 시간에 대해서는 Laplace 변환을,  $x$ 축에 대해서는 Fourier 변환을 적용하면 적분변환된 변위는 아래의 식을 만족한다.

$$\beta_1^2 \frac{d^2 U_1^*}{dz^2} - (\xi^2 \alpha_1^2 + s^2) U_1^* + i\xi A \frac{d W_1^*}{dz} = -\delta(z-z_0)F_x(s) \quad (4)$$

단,  $A = a_1^2 - \beta_1^2$ ,  $\alpha_1^2 = (\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1$ ,  $\beta_1^2 = \mu_1/\rho_1$ . 식 (4)의 해는 두 가지로 나누어 주어진다.

$$U_1^* = U_p^* + pA_1 e^{-s\eta_a(H-z)} + pA_2 e^{-s\eta_a z} + \eta_p A_3 e^{-s\eta_a(H-z)} + \eta_p A_4 e^{-s\eta_a z} \quad (5)$$

단,  $\eta_a = \sqrt{p^2 + 1/\alpha_1^2}$ ,  $\eta_p = \sqrt{p^2 + 1/\beta_1^2}$ .  $U_p^*$ 는 식 (4)의 특별해(particular solution)로  $z < z_0$ 인 경우 다음과 같이 주어진다.

$$U_1^* = pG_a e^{-s\eta_a(z_0-z)} + \eta_p G_p e^{-s\eta_p(z_0-z)}$$

반부한 평면의 해는 아래로 전파하는 파만 포함한다.

$$U_2^* = pB_1 e^{-s\gamma z} + \gamma_p e^{-s\gamma z}$$

변위  $W_1^*$ 와  $W_2^*$ 도 비슷한 방법에 의해 구할 수 있다. 경계조건을 적용하여 미지수  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ 에 대한 조건식 6개를 구할 수 있으며 이를 변형하여 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\vec{Q} = \vec{S} \quad (6)$$

단,  $\mathbf{I}$ 는 unit 매트릭스,  $\mathbf{Q}$ 는 반사/투과계수에 지수함수( $e^{-s\eta_a H}$  등)가 곱해진 계수 행렬이며 벡터  $\vec{Q}$ 는 미지수를,  $\vec{S}$ 는 가진력항을 나타낸다. 식 (6)에서 미지수는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\vec{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{Q}^n \vec{S} \quad (7)$$

식 (7)은 소음원에서 관측점(receiving point)까지의 음선 경로(ray path)를 나타내는데 예로  $A_2 e^{-s\eta_a z}$ 를 전개하면 다음과 같이 된다.

$$A_2 e^{-s\eta_a z} = r_{PP}^0 G_a e^{-s\eta_a(z+z_0)} + r_{SP}^0 G_p e^{-s(\eta_a z + \eta_p z_0)} + \dots \quad (8)$$

우변의 처음 항은 그림 2와 같은 음선경로를 나타낸다.

식분변환된 변위들은 일반적으로 다음과 같은 형태로 표현이 가능하며

$$\sum_k (1/s) R_k(p) e^{-s g_k(p)} \quad (9)$$

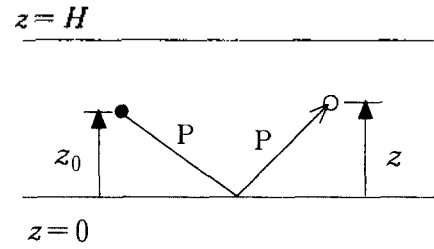


Fig. 2 Ray path for  $r_{PP}^0 e^{-s\eta_a(z+z_0)}$ .

$R_k, g_k$ 는  $p$ 만의 함수로 주어진다. 식 (9)의 역 Fourier 및 Laplace 변환은 Cagniard-de Hoop[3] 방법을 적용하여 구할 수 있으며 시간이 길어질수록 더해져야 할 항은 급격히 늘어나게 된다. 가진력을  $f_x = f_z = \delta(t)$ 라고 하면 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$j_k(t) = \frac{1}{\pi} \text{Re}[R_k(p) \frac{\partial p}{\partial t}] H(t - tm)$$

일반적인 외력  $f(t)$ 에 대해서는 컨볼루션 적분을 수행하여야 하며 또한 관련된 모든 음선(ray)에 대해 더해져야 한다.

$$(u, w) = \sum_k \int_{t=t_w}^t f(t-\tau) j_k(\tau) d\tau \quad (10)$$

#### IV. 수치해석에

수치해석 예로 다음과 같은 물성치를 고려하였으며  $f(t) = H(t)$  (Heaviside step 함수)를 고려하였다.

Layer:

$$\alpha_1 = 1.0 \text{ m/s}, \beta_1 = 0.6 \text{ m/s}, \rho_1 = 1.0 \text{ kg/m}^3$$

Half-plane :

$$\alpha_2 = 1.5 \text{ m/s}, \beta_2 = 0.8 \text{ m/s}, \rho_2 = 1.5 \text{ kg/m}^3$$

적층의 두께는  $H = 0.2 \text{ m}$ 이며 음원과 관측점은  $x_0 = 0, z_0 = 0.125 \text{ m}, x = z = 0.0938 \text{ m}$ 이다. 격자는  $-0.5 \text{ m} < x, z < 0.5 \text{ m}$ 인 면적을  $128 \times 128$ 개로 나누었으며 시간 증분은  $0.001 \text{ sec}$ 로 하였다. 응력이 제로인 공간을 표현하기 위해  $0.2 < z < 0.5$ 인 영역은 Lamé의 상수를 제로로 취하였다. 본 논문에서는 2번까지의 반사만 고려하였는데 3번의 반사가 일어나는 가장 빠른 경로는  $r_{PP}^H r_{PP}^0 r_{PP}^H$ 로  $t = 0.589 \text{ sec}$ 이다. 따라서 해석시간은 최대  $0.5 \text{ sec}$ 로 잡았다.

그림 3과 4에는 관측점에서의 시간에 따른 변위를 보였는데 실선은 식 (10)에 의해 구한 결과이며 심볼(circle)은 Fourier 방법에 의해 얻은 결과인데 잘 맞음을 알 수 있다.  $x$ 축 변위  $u$ 가  $z$ 축 방향 변위  $w$ 보다 잘 맞음은 상대식으로 더 여유 있는 공간을 모델링하였음에 기인한다. 그림 3과 4에서 점선으로 표시된 값은 직층의 두께가 무한대인(즉, 두 개의 반무한 평면이 접한 경우)경우를 나타내며 이는 식 (5)에서  $A_1, A_3$  성분을 제로로 하면 얻어진다. 그림 3과 4에서 두 결과(실선과 점선)가 갈라지는 시간은  $z=H$ 에서 P파의 반사가 처음으로 일어나는 지점( $t=0.204\text{sec}$ )에 해당한다.

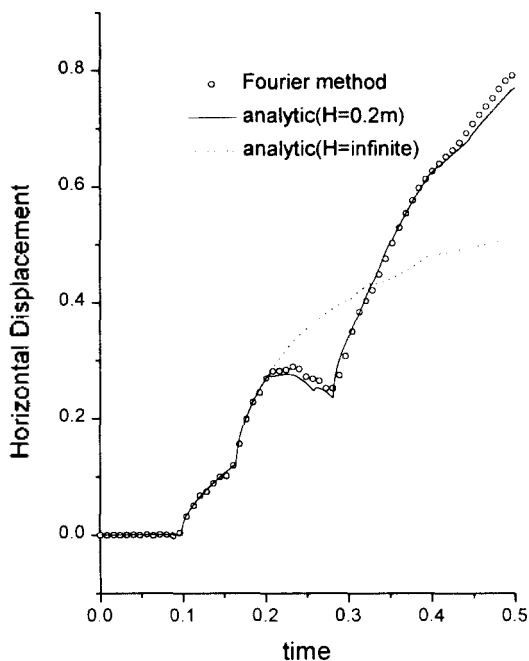


FIG. 3 Horizontal displacement

### V. 결론 및 검토

본 논문에서는 밀도 및 유속이 위치에 따라 변하는 불균일 고체내의 탄성과 진파를 Fourier 방법을 이용하여 해석하였으며 또한 임밀해를 별도로 유도하여 잘 맞음을 확인하였다. Fourier 방법은 유체와 탄성체가 접한 경우에도 적용이 되며 다양한 실제 문제에 응용을 할 수 있다. 또한 본 연구에서 유도한 임밀해도 여러종류의

직층매질에 대해 적용할 수 있으며 이는 자체로도 유용한 해석결과이면서 또한 새로운 수치해석방법의 검증 수단으로 활용된다.

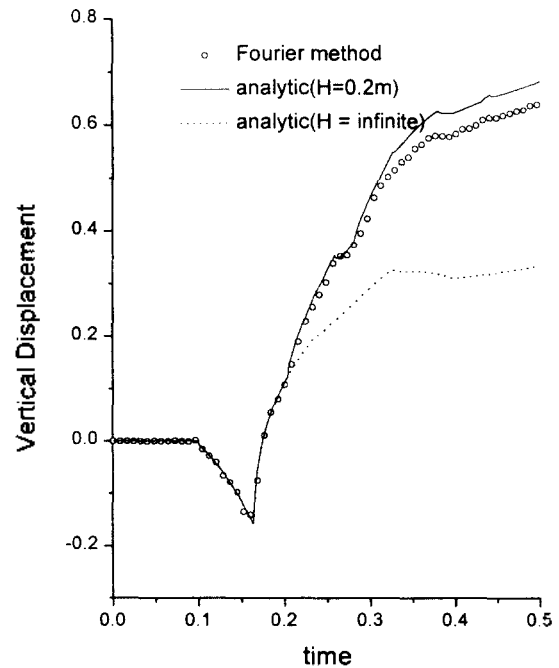


Fig. 4 Vertical displacement

### 후 기

본 연구는 과학기술처에서 지원한 기관고유 연구사업의 일환으로 수행된 것임을 밝힌다.

### 참 고 문 헌

1. K. R. Kelly, R. W. Ward, S. Treitel, and R. M. Alford, "Synthetic seismograms: a finite-difference approach", *Geophysics*, Vol. 41, 2-27, 1976.
2. 김현실, 김재승, 강현주, 김상련, "Fourier 방법을 이용한 불균일 매질의 음파진달해석", 1997년도 한국음향학회 학술발표회 논문집 제16권 2호, 167-170.
3. K. Aki and P. G. Richards, *Quantitative Seismology, Theory and Methods, Volume I*, Chap. 6.4, W. H. Freeman and Co., 1980.