

주기적으로 불균일한 원형막대에서 전파하는 비틀림 탄성파

김진오
 숭실대학교 기계공학과

Torsional Elastic Waves Propagating in a Periodically-Nonuniform Circular Rod

Jin O. Kim
 Department of Mechanical Engineering, Soongsil University
 E-mail : jokim@saint.soongsil.ac.kr

ABSTRACT

The paper describes a theoretical and experimental study on the speed of the torsional elastic waves propagating in an axisymmetric waveguide whose cross-sectional area varies periodically as an harmonic function of the axial coordinate. The approximate solution of the phase speed has been obtained using the perturbation technique for sinusoidal modulation of small amplitude. The experiment verifying the theoretical result consists of transmitting and receiving torsional waves by magnetostriction and measuring the wave speed in the waveguides with threaded surfaces.

I. 서론

유체에 잠해 있는 고체에서 전단운동을 하며 전파하는 탄성파의 전파특성에 미치는 인접 점성유체의 영향을 규명한 결과[1,2]로부터, 단면이 원형인 탄성막대에서 전파하는 비틀림 탄성파가 유체 점성 측정 센서로 활용될 가능성이 확인된 바 있다[3,4]. 그 원리는 비틀림 탄성파의 전파속도 및 감쇠가 인접 점성유체의 점도에 의해 달라지는 현상에 근거한 것으로서, 원형막대 형태의 탄성 도파관(waveguide)에서 전파하는 비틀림 탄성파의 전파시간과 진폭이 인접 점성유체가 없을 때를 기준으로 점성유체의 영향에 의해 변화하는 양을 측정함으로써, 점도를 정량적으로 구해내는 것이다. 도파관의 단위길이당 표면적이 클수록 유체점성의 영향이 커지고 전파적으로 센서의 감도가 향상되므로, 원형막대의 표면에 돌너치럼 나사면을 형성하였는데, 이 경우에는 매끈한 막대의 경우와 달리 비틀림 탄성파의 전파특성이 이론적으로 규명되어 있지 않았다.

본 논문은 Fig. 1에 보인 바와 같이 표면에 나사면을 가진 원형 도파관에서 전파하는 비틀림 탄성파의 전파특성에 관한 연구로서, 길이방향으로 조화함수

형태로 변화하는 단면적을 가진 원형 막대에서의 비틀림 탄성파의 전파속도를 대상으로 한다. 주기적인 미소한 단면변화를 섭동(perturbation) 기법에 의해 다루어 전파속도의 이론적 근사해를 구한다. 이론적 결과를 검증하기 위한 실험으로서 자왜(magnetostriction) 현상에 의해 비틀림파를 발생시키고 전파시간을 측정함으로써 전파속도를 계측한다.

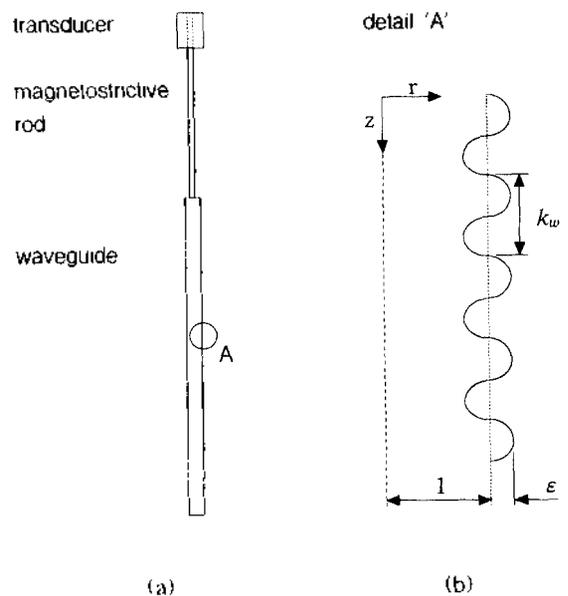


Fig. 1 Schematic description of the modulated waveguide and the experimental setup. (a) magnetostriuctive transducer and waveguide, (b) periodically modulated surface of the circular waveguide.

II. 문제의 정식화

단면의 반경 r_0 가 Fig. 1(b)에 보인 바와 같이 길이방향 좌표 z 의 함수로 $r_0 = R_0[1 + \epsilon \sin(2\pi z/\lambda)]$ 와 관계로 변화하는 원형막대에서 진파하는 비틀 단성좌를 대상으로 수학적 모델을 설정한다. 반경방향 좌표 r , 길이방향 좌표 z , 시간 t 에 종속인 원주방향 변위 $u_\theta(r, z, t)$ 로써 비틀좌의 운동방정식이 다음과 같이 표현된다.[5]

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (1)$$

$0 \leq r < R_0[1 + \epsilon \sin(2\pi z/\lambda)]$

여기서 $c_T = (G/\rho)^{1/2}$ 이고, G 와 ρ 는 각각 막대 재료의 횡단상계수와 밀도이다. 표면에서 응력이 없다는 조건 $\tau_r = \tau_{rz} \cdot dr/dz$ [6]과 중심에서의 연속성에 따라 경계조건이 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \quad \text{at } r = R_0[1 + \epsilon \sin(2\pi z/\lambda)] \quad (2)$$

$$u_\theta = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad (3)$$

변위를 $u_\theta(r, z, t) = u(r, z) \exp(i\omega t)$ 로 변수 분리하여 식(1)에 대입한 후, 기준길이 R_0 와 기준속도 c_T 를 사용하여 식(1) (3)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$Lu = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right) u = 0 \quad (1')$$

$$B(r)u = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) u = \epsilon k_w \cos k_w z \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{at } r = 1 + \epsilon \sin k_w z \quad (2')$$

$$u = 0 \quad \text{at } r = 0 \quad (3')$$

식(1') (2')에서 L 과 $B(r)$ 은 각각 선형 미분연산자를 정의하며, 식(1')부터 모든 변수들은 무차원화된 양이다.

III. 섭동법에 의한 근사해

식(1')-(3')으로 정의된 경계치 문제의 엄밀해를 구할 수 없으므로, 근사해를 구하는 섭동기법[7,8]을 채택한다. 이를 위해 변위 u 를 다음과 같이 섭동량 ϵ 의 급수로 전개한다.

$$u(r, z, \epsilon) = u_0(r, z) + \epsilon u_1(r, z) + \epsilon^2 u_2(r, z) + O(\epsilon^3) \quad (4)$$

식(4)를 식(1') (3')에 대입하고 ϵ 의 오름차순으로 정리하여, ϵ 의 차수별 운동방정식과 경계조건에 대해 다음과 같이 단계적으로 해를 구한다.

3.1 $O(\epsilon^0)$ 해

선도 차수 $O(\epsilon^0)$ 에 대해서 고전적인 비틀 운동방정식, $Lu_0 = 0$ 과 경계조건 $B(1)u_0 = 0$ 및 $u_0(0) = 0$ 을 얻는다. 이 문제의 해는 잘 알려진 대로 다음과 같다. [5]

$$u_0 = U_0 F_{0,n}(r) \exp[i k_{0,n} z] \quad (5)$$

여기서 $i = (-1)^{n/2}$ 이고, U_0 는 파동의 진폭으로서 초기 조건에 달려있는 양이다. 그리고 $k_{0,n}$ 은 다음과 같이 ϵ 의 급수로 전개되는 n 번째 모드 파수 k_n 에 대한 선도 차수 항이다.

$$k_n = k_{0,n} + \epsilon k_{1,n} + \epsilon^2 k_{2,n} + O(\epsilon^3) \quad (6)$$

식(5)의 $F_{0,n}$ 과 $k_{0,n}$ 은 기본 모드($n=0$)에 대해서

$$F_{0,0}(r) = 2r, \quad k_{0,0} = \omega \quad (7)$$

이고, 고차 모드($n>0$)에 대해서

$$F_{0,n}(r) = \sqrt{2} J_1(\rho_n r) / J_2(\rho_n)$$

$$k_{0,n} = (\omega^2 - \rho_n^2)^{1/2} \quad (8)$$

이다. 여기서 J_k 는 k 차 Bessel 함수이고, $\rho_n (\neq 0)$ 은 다음 식의 근이다.

$$J_1(\rho_n) - \rho_n J_0(\rho_n) / 2 = 0 \quad (9)$$

즉 $\rho_1 = 5.136$, $\rho_2 = 8.417$, $\rho_3 = 11.62$ 등이다. 위에서 구한 해 $F_{0,n}(r)$ ($n=0, 1, 2, \dots$)의 크기는 다음과 같이 r 에 대한 정규직교성(orthonormality)을 만족한다.

$$\langle F_{0,m}, F_{0,n} \rangle = \int_0^1 r F_{0,m}(r) F_{0,n}(r) dr = \delta_{mn} \quad (10)$$

여기서 δ_{mn} 은 Kronecker 델타이다.

3.2 $O(\epsilon^1)$ 해

제1차수 $O(\epsilon^1)$ 에 대한 경계치문제는 u_1 에 대한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$Lu_1 = 2k_{0,n} k_{1,n} U_0 F_{0,n}(r) \exp[i k_{0,n} z] \quad (11)$$

$$B(1)u_1 = U_0 \exp[i k_{0,n} z] \{ ik_{0,n} k_w F_{0,n}(1) \cos(k_w z) + F_{0,n}'(1) \sin(k_w z) \} \\ = (i/2) U_0 [k_{0,n} k_w F_{0,n}(1) + F_{0,n}''(1)] \exp[i(k_{0,n} + k_w)z] \\ + (i/2) U_0 [k_{0,n} k_w F_{0,n}(1) - F_{0,n}''(1)] \exp[i(k_{0,n} - k_w)z] \quad (12)$$

$$u_1(0) = 0 \quad (13)$$

식(12)에서 (')은 r 에 대한 미분을 나타낸다. 식(11) -(13)의 해를 구하기 위하여 u_1 을 식(12)의 우변에서 암시된 바대로 다음과 같이 세 개의 항으로 분해한다.

$$u_1 = G_a(r) \exp[i k_{0,n} z] + G_b(r) \exp[i(k_{0,n} + k_w)z] + G_c(r) \exp[i(k_{0,n} - k_w)z] \quad (14)$$

이에 따라 G_a, G_b, G_c 에 관한 경계치문제 세 개가 얻어진다.

이중 G_a 에 관한 문제는 다음과 같다.

$$L_n G_a = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} + \omega^2 - k_{0,n}^2 \right) G_a = 2k_{0,n} k_{1,n} U_0 F_{0,n}(r) \quad (15a, b, c)$$

$$B(1)G_a = 0, \quad G_a(0) = 0$$

식(15)는 u_0 에 관한 경계치문제와 일치한다. 이에 해당하는 해결조건(solvability condition)[9]은 다음과 같다.

$$\langle L_n G_a(r), F_{0,n}(r) \rangle = B(1)G_a \cdot F_{0,n}(1) \quad (16)$$

$$\text{즉 } 2k_{0,n} k_{1,n} U_0 \langle F_{0,n}(r), F_{0,n}(r) \rangle = F_{0,n}(1) \cdot B(1)G_a = 0 \quad (17)$$

$$= F_{0,n}(1) \cdot B(1)G_a = 0$$

여기서 $\langle F_{0,n}, F_{0,n} \rangle \neq 0$ 이므로, $k_{1,n} = 0$ 임을 알게된다. 따라서 파수 k_n 에 대한 섭동량을 구하기 위해서는 제2차수 $O(\epsilon^2)$ 으로 진전해야 한다. 그에 앞서, u_1 에 관한 해를 구하기 위하여 G_a, G_b, G_c 에 관한 해를 각각 구하면 다음과 같다.

$$G_a = U_1 F_{0,n}(r), \quad G_b = i \xi_{b,n} U_0 J_1(\alpha_{b,n} r),$$

$$G_c = i \xi_{c,n} U_0 J_1(\alpha_{c,n} r) \quad (18a, b, c)$$

여기서 U_1 은 미지의 상수이고, α 와 ξ 는 다음과 같다.

$$\alpha_{b,n}^2 = \omega^2 - (k_{0,n} + k_w)^2 \quad (19a)$$

$$\alpha_{c,n}^2 = \omega^2 - (k_{0,n} - k_w)^2 \quad (19b)$$

$$\xi_{b,n} = \frac{1}{2} \frac{k_{0,n} k_w F_{0,n}(1) + F_{0,n}''(1)}{\alpha_{b,n} J_0(\alpha_{b,n}) - 2J_1(\alpha_{b,n})} \quad (19c)$$

$$\xi_{c,n} = \frac{1}{2} \frac{k_{0,n} k_w F_{0,n}(1) - F_{0,n}''(1)}{\alpha_{c,n} J_0(\alpha_{c,n}) - 2J_1(\alpha_{c,n})} \quad (19d)$$

Bessel 함수의 괄호 안의 양은 $\alpha_{b,n}$ 이나 $\alpha_{c,n}$ 에 따라서 허수일 수도 있는데, 이때에는 Bessel 함수 J 가 수정된 Bessel 함수 I 로 대체된다.

3. 3 $O(\epsilon^2)$ 해

제2차수 $O(\epsilon^2)$ 에 대한 경계치문제는 u_2 에 관한 문제로서 다음과 같이 정리된다.

$$Lu_2 = 2k_{0,n}k_{2,n}U_0F_{0,n}(r)\exp[ik_{0,n}z] \quad (20)$$

$$B(1)u_2 = \xi_{a,n}U_0\exp[ik_{0,n}z] + i\xi_{b,n}U_1\exp[i(k_{0,n}+k_w)x] + i\xi_{c,n}U_1\exp[i(k_{0,n}-k_w)z] + \xi_{d,n}U_0\exp[i(k_{0,n}+2k_w)z] + \xi_{e,n}U_0\exp[i(k_{0,n}-2k_w)z] \quad (21)$$

$$u_2(0) = 0 \quad (22)$$

$$\text{여기서 } \alpha_{d,n}^2 = \omega^2 - (k_{0,n} + 2k_w)^2 \quad (23a)$$

$$\alpha_{c,n}^2 = \omega^2 - (k_{0,n} - 2k_w)^2 \quad (23b)$$

$$\xi_{a,n} = \zeta_{b,n}[-2\alpha_{b,n}J_0(\alpha_{b,n}) - (\alpha_{b,n}^2 - 3)J_1(\alpha_{b,n}) - (k_{0,n} + k_w)k_wJ_1(\alpha_{b,n})]/2 - \zeta_{c,n}[-2\alpha_{c,n}J_0(\alpha_{c,n}) - (\alpha_{c,n}^2 - 3)J_1(\alpha_{c,n}) + (k_{0,n} - k_w)k_wJ_1(\alpha_{c,n})]/2 - [F_{0,n}''''(1) - F_{0,n}''(1)]/4 \quad (24a)$$

$$\xi_{b,n} = [F_{0,n}''(1) + k_{0,n}k_wF_{0,n}(1)]/2 \quad (24b)$$

$$\xi_{c,n} = [-F_{0,n}''(1) + k_{0,n}k_wF_{0,n}(1)]/2 \quad (24c)$$

$$\xi_{d,n} = -\zeta_{b,n}[-2\alpha_{b,n}J_0(\alpha_{b,n}) - (\alpha_{b,n}^2 - 3)J_1(\alpha_{b,n}) + (k_{0,n} + k_w)k_wJ_1(\alpha_{b,n})]/2 + [F_{0,n}''''(1) - F_{0,n}''(1)]/8 + k_{0,n}k_wF_{0,n}(1)/4 \quad (24d)$$

$$\xi_{e,n} = \zeta_{c,n}[-2\alpha_{c,n}J_0(\alpha_{c,n}) - (\alpha_{c,n}^2 - 3)J_1(\alpha_{c,n}) - (k_{0,n} - k_w)k_wJ_1(\alpha_{c,n})]/2 + [F_{0,n}''''(1) - F_{0,n}''(1)]/8 - k_{0,n}k_wF_{0,n}(1)/4 \quad (24e)$$

식(20)-(21)의 형태는 u_2 의 해가 다음과 같은 형태임을 암시한다.

$$u_2 = H_a(r)\exp[ik_{0,n}z] + H_b(r)\exp[i(k_{0,n}+k_w)z] + H_c(r)\exp[i(k_{0,n}-k_w)z] + H_d(r)\exp[i(k_{0,n}+2k_w)z] + H_e(r)\exp[i(k_{0,n}-2k_w)z] \quad (25)$$

이에 따라 H_a, H_b, H_c, H_d, H_e 에 관한 경계치문제 다섯 개를 얻게된다.

이중 H_a 에 관한 경계치문제는 다음과 같다.

$$L_nH_a = 2k_{0,n}k_{2,n}U_0F_{0,n}(r) \quad B(1)H_a = \xi_{a,n}U_0, \quad H_a(0) = 0 \quad (26a,b,c)$$

이에 대한 해결조건

$$\langle L_nH_a(r), F_{0,n}(r) \rangle = B(1)H_a \cdot F_{0,n}(1) \quad (27)$$

로부터

$$2k_{0,n}k_{2,n}\langle F_{0,n}(r), F_{0,n}(r) \rangle = \xi_{a,n}F_{0,n}(1) \quad (28)$$

을 얻으므로 파수 k_n 에 대한 보정치 $k_{2,n}$ 을 다음과 같이 얻어진다.

$$k_{2,n} = \xi_{a,n}F_{0,n}(1)/(2k_{0,n}) \quad (29)$$

3. 4 전파 속도

지금까지 얻은 결과로부터 비틀과 전파속도에 대한 근사해를 구성한다. n 번째 모드의 전파속도 c_n 은 ω/k_n 이므로 다음 식을 얻는다.

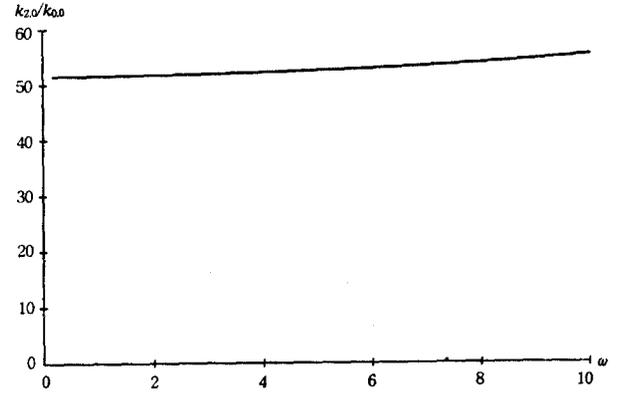


Fig. 2 Fundamental mode speed correction $k_{2,0}/k_{0,0}$ depicted as a function of ω for $k_w = 50$.

$$c_n = \frac{\omega}{k_{0,n}} \left(1 - \epsilon^2 \frac{k_{2,n}}{k_{0,n}} \right) + O(\epsilon^3) \quad (30)$$

식(30)을 살펴보면 막대 표면의 주기적 굴곡으로 인해 비틀과의 전파속도가 매끈한 막대의 경우에 비해 줄어들을 알 수 있다.

기본 모드($n=0$)의 경우에 표면 굴곡으로 인한 전파속도 차이를 계산하기 위하여 식(30)에 식(7)을 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$1 - c_0 \approx \epsilon^2 \frac{\xi_{a,0}}{\omega^2} \quad (31)$$

식(31)에서 $\xi_{a,0}$ 는 식(24a)와 식(19)로부터 계산되는 양으로서, 무차원 주파수 ω 와 표면굴곡 주기 k_w 의 함수이다. 따라서 전파속도 c_0 가 파동의 주파수에 따라 다른 값을 갖게 되리라 예상되는데, $k_w = 50$ 인 경우에 ω 의 함수로 $\xi_{a,0}/\omega^2$ (즉 $k_{2,0}/k_{0,0}$)을 계산해 본 결과 Fig. 2에 보인 바와 같이 거의 일정한 값을 나타내고 있다.

다음절에서 기술하는 실험결과와 비교하기 위하여 $\epsilon = 0.087$ 및 $\omega = 0.269$ 에 대해서 k_w 가 13.6과 15.8 일때의 $(1 - c_0)$ 를 각각 계산한 결과가 Table 1에 기재되어 있다.

Table 1 Speed corrections for the torsional elastic waves along the modulated waveguides. The theoretically predicted results are compared with the experimental observations.

thread		nondimensional frequency, ω	1 - c_0 (%)	
ϵ	k_w		calculated	measured
0.087	13.6	0.269	11.6	12.8
0.087	15.8	0.269	13.3	10.6

IV. 실험

앞에서 구한 이론적 근사해를 검증하기 위하여 실험을 행하였다. 이론적 모델에 유사한 주기적 굴곡을 원형막대에 만드는 방법으로 나사면을 형성하였다.

4. 1 실험장치

비틀림 탄성파를 발생시키고 수신하는 방법으로 'Wiedemann 효과'[10]라는 자왜(magnetostriction)현상에 근거한 트랜스듀서[11]를 사용하였다. 비틀림과 발생 및 수신 원리는 다른 문헌[12]에 자세히 설명하였다. 전기적 펄스 신호가 Fig. 1(a)에 보인 바와 같은 장치에서 자왜막대의 한쪽에 비틀림 탄성파로 변환되어 전파하고, 도파관(waveguide)으로 전달되어 전파하고 되돌아와 트랜스듀서에서 다시 전기신호로 변환된다.

이와 같은 과정에서 수신된 신호를 오실로스코프에서 관찰한 예가 Fig. 3에 보여있다. 자왜막대에서 도파관으로 파동이 전달될 때, 일부는 경계면에서 반사되어 트랜스듀서로 바로 돌아간다. 이 신호는 그림에서 'A'로 표시한 부분이다. 도파관으로 전달된 파동이 도파관 끝에서 반사되어 트랜스듀서로 돌아가 변환된 신호는 'B'로 표시되어 있다. 두 신호 간의 시간 간격을 측정하고 도파관의 길이와 연관시켜, 파동의 진파속도를 얻는다. 실험에서 두 피크 간의 시간 간격을 5 ns의 정밀도로 측정하였다.

4. 2 실험 결과

사용된 도파관은 길이 $L = 306$ mm이고 단면 반지름 $R_0 = 1.22$ mm인 알루미늄으로서, 재료의 물성치는 밀도 $\rho = 2.70 \times 10^3$ kg/m³이고 횡탄성계수 $G = 2.59 \times 10^{10}$ N/m²이다. 매끈한 원형 도파관에서 측정된 비틀림 전파속도 cT 는 3009 m/s와 3015 m/s로서, 물성치를 $(G/\rho)^{1/2}$ 에 내입하여 얻는 수치 3097 m/s와 3% 오차범위 이내로 잘 일치한다.

도파관 표면에 표준 나사 다이(die)를 이용하여 나사면을 형성하였다. 표준 나사는 NC-UNC 3-48과 NC-UNC 3-56으로서, 이에 대응하는 k_w 값은 각각 13.6과 15.8이다. 그리고 ϵ 의 크기는 공통적으로 $0.087 + 0.002$ 이다. 사용한 펄스신호의 중심주파수는 90 kHz이므로, 무차원 주파수는 $\omega = 0.269$ 이다. 이와 같이 표면에 나사면이 형성된 도파관에서 비틀림 전파속도를 측정할 결과를 Table 1에 기재하였고, 이와 비교하여 이론적 결과의 경향을 검증하였다. 이에 따르면, 표면에 주기적 굴곡을 가진 도파관에서의 비틀림 전파속도는 매끈한 도파관에서의 전파속도에 비해 8~10% 느린 것으로 나타났다.

V. 결론

원형 막대에서 전파하는 비틀림 탄성파를 다음에 있어서, 표면이 길이방향으로 주기적인 굴곡을 갖는 막대에서의 전파속도를 근사치로 구하였다. 도파관 역할을 하는 막대의 주기적인 미소한 반경 변화를 섭동법에 의해 다루어 해석한 결과, 전파속도는 섭동량의 제곱에 비례하는 양만큼 감소하는 경향이 나타났다.

이러한 이론적 경향은 자왜 트랜스듀서로 비틀림을 전파시키고 나사면을 가진 탄성 도파관에서 전파속도를 측정하는 실험으로 검증하였다.

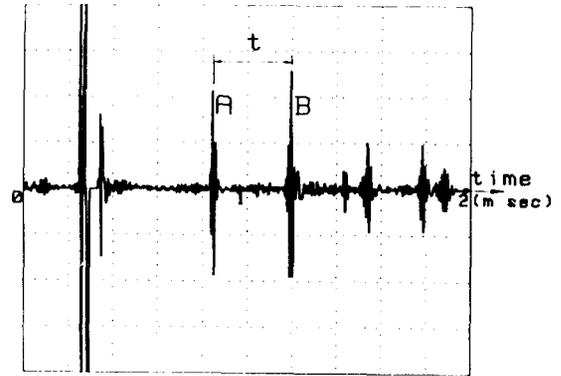


Fig. 3 Signal trace of the waves reflected at the front and the end of the waveguide.

참고 문헌

1. 김진오, "고체 매질의 탄성파와 인접 점성유체 간의 상호작용", 1997년도 한국음향학회 학술발표대회 논문집, 제16권 제1(s)호, pp. 123-128 (1997).
2. J. O. Kim, Y. Wang, H. H. Bau, "The effect of an adjacent viscous fluid on the transmission of torsional stress waves in a submerged waveguide", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 89, pp. 1414-1422, 1991.
3. H. H. Bau, J. O. Kim, L. C. Lynnworth, T. H. Nguyen, "Torsional wave fluid sensor and system", United States Patent 4,893,496, 1990.
4. J. O. Kim, H. H. Bau, Y. Liu, L. C. Lynnworth, et al., "Torsional sensor applications in two-phase fluids", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, Vol. 40, No. 5, pp. 563-576, 1993.
5. J. D. Achenbach, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam, 1975, p. 241.
6. S. P. Timoshenko, J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 341-343.
7. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press, Stanford, California, 1975, pp. 36-37.
8. A. H. Nayfeh, *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley and Sons, New York, 1981, pp. 418-426.
9. I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1979, pp. 207-209.
10. N. S. Tzannes, "Joule and Wiedemann effects - The simultaneous generation of longitudinal and torsional stress pulses in magnetostrictive materials", IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU-13, No. 2, pp. 33-41, 1966.
11. L. C. Lynnworth, "Slow torsional wave densimeter", United States Patent 4,193,291, 1980.
12. J. O. Kim, H. H. Bau, "On-line, real-time densimeter - Theory and optimization", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 85, pp. 432-439, 1989.