

특이성이 제거된 경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피에 의한 음원 진동장 재구성에 관하여

강 승 천, 이 정 권
한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구 센터

On the Reconstruction of Vibrating Source by using the Nearfield Acoustic Holography based on the Nonsingular BEM

Sung-Chon Kang and Jeong-Guon Ih
NoViC, Department of Mechanical Engineering, KAIST
(e-mail : ihih@sorak.kaist.ac.kr)

요약문

경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피의 재구성 정확도 향상을 위해서는 근접 음장에서의 음압 측정용 수반한다. 이에 따라 비전파음 성분이 측정에 포함되어 전달행렬의 특이성에 의한 오차를 줄일 수 있다. 그러나, 전달행렬 구성을 위해서 사용되는 일반적인 경계요소법은 Kirchhoff-Helmholtz 방정식의 기본해가 갖는 특이성 때문에 근접음장에서 큰 수치 오차를 유발하는 문제가 있다. 특이성이 제거된 경계 적분 방정식을 도입하여 음향 홀로그래피를 수행함으로써 근접 음장에서의 수치오차 문제를 극복하고 정확한 음장 예측 및 전달 행렬을 구성할 수 있다. 본 연구에서는 단순한 수치 해석 모델을 이용하여 음향 홀로그래피 계산을 수행하였고, 일반 경계요소법을 사용한 경우와 비교하여 향상된 결과를 얻을 수 있음을 밝혔다.

1. 서 론

음향 홀로그래피는 음장 내 일정한 공간에서 음압을 측정하고, 이를 이용하여 음원 방향이나 외부 공간 방향으로의 음향학적 정보를 재구성하는 기법을 말한다. 이 기법은 그 접근 방법에 따라 Helmholtz 방정식으로부터 구한 해의 공간 푸리에 변환(spatial Fourier transform)을 이용하는 방법[1]과 음향 경계 요소법을 이용하는 방법[2,3,4]으로 구분할 수 있다. 경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피는 음장 음압과

음원 표면 속도 사이의 관계를 표현하는 전달행렬 (transfer matrix)을 경계요소법으로 구하고, 음장음압을 측정하여 음원에 관한 정보를 재구성하는 방법이다.

최근에는 Kim과 Ih가 EII기법(effective independence method)을 이용하여 다수의 음장 음압 측정점 후보군으로부터 전달행렬의 웨이브 벡터 사이의 선형 독립성이 상대적으로 좋게 확보되는 최적의 음압 측정점 선정 방법과 최적 설계된 웨이브 벡터 필터를 적용하여 전달행렬의 역행렬을 정규화함으로써 계산 과정에서 발생하는 오차의 영향을 줄이는 연구 결과를 발표하였다. [5] 이러한 음향 홀로그래피는 가능하면 음원에 가까운 공간에서 음장 음압을 측정해 재구성 작업을 수행하여야 음원 근처에만 존재하는 비전파음들이 측정에 포함되어 재구성 계산의 정확도를 높일 수 있게 된다.

한편, 음향 경계요소 해석법은 K-H 적분방정식에 포함되는 Green 함수와 그 미분항이 특이성을 갖고 있어 음원의 경계면 근처에서는 해가 불안정해지고 수치 적분과정에서 오차가 증가하는 문제가 있다. 이러한 경계면 근처에서의 해의 불안정성을 해결하는 방법으로서 Ku, Lee와 Ih가 제안한 특이성이 제거된 경계 적분방정식(non-singular boundary integral equation)이 있다.[6] 이 방법은 Green 함수의 특이성 제거를 위하여 음향 문제의 지배 방정식을 만족하는 평면파의 전파 모우드를 이용한다. 그 결과 경계 적분 방정식에 포함된 특이성이 완전히 제거되어, 경계면 근처에서의 해의 불안정성 문제가 없어지고 근접 음장에서의 정확한 음압 계산이 가능해지는 효과가 있다.

본 연구에서는 이러한 특이성이 제거된 경계

요소법을 이용하여 음향 홀로그래피를 수행함으로써, 근접음장에서 전달행렬 예측치와 음원 재구성의 정확도를 향상시키고자 한다.

2. 본론

2.1. 경계적분 방정식

경계 S_0 로 둘러싸인 영역 V 가 열전달이 없고, 균질하며, 비점성, 압축성이고 유동이 없는 유체에 질로 차 있을 때, 이 음장에 대한 K-H 적분 방정식은 다음과 같다.

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = \int_{S_0} \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \frac{\partial p(\mathbf{r}_0)}{\partial n(\mathbf{r}_0)} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n(\mathbf{r}_0)} p(\mathbf{r}_0) \right] dS \quad (1)$$

여기서 n 은 경계면 S_0 에서 영역 V 의 외부로 향하는 단위 법선 벡터이고, $\partial/\partial n$ 은 음장 외부로의 법선 방향 미분을 나타내며, \mathbf{r}_0 는 경계 표면 S_0 위에 있는 점의 위치 벡터이다. 또한 G 는 자유음장에 대한 Green 함수로서 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \exp(-ikR)/4\pi R$ 로 정의되며, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ 은 \mathbf{r}_0 에 있는 음원과 음장 내 \mathbf{r} 에 있는 점 사이의 거리이다. 따라서 (1)식은 경계면에서의 음압과 속도 분포를 이용하여 음장 내에 있는 \mathbf{r} 점에서의 음압을 구할 수 있음을 의미한다. 음향 경계요소법은 (1)식을 적절히 이산화하여 수치 해석적으로 음향 문제를 풀게 된다.

한편, (1)식의 우변 적분식 내 첫번째 항은 $1/R$ 에 비례하고, 두 번째 항은 $1/R^2$ 에 비례하므로, 경계면 상의 적분점 \mathbf{r}_0 가 음압을 구하고자 하는 점 \mathbf{r} 에 근접하게 되면 R 이 매우 작은 값이 되어 수치 적분 과정에서 해가 불안정해지는 특이성 (singularity) 문제가 발생한다.

이러한 문제는 평면과 성분을 이용한 특이성 제거 기법을 이용하면 다음과 같은 특이성이 제거된 경계 적분방정식을 구해 해결할 수 있다.[8]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) = & -j \int_{S_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) [\rho_0 \omega V_n(\mathbf{r}_0) \\ & + kn(\mathbf{r}_0) \cdot \{ \mathbf{h}(\mathbf{y}) \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}), p(\mathbf{y})) - \mathbf{h}(\mathbf{y}) \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}), q(\mathbf{y})) \\ & + \mathbf{n}(\mathbf{y}) \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{n}(\mathbf{y}), q(\mathbf{y})) \}] dS(\mathbf{r}_0) \quad (2) \\ & - \int_{S_0} \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}{\partial n(\mathbf{r}_0)} [p(\mathbf{r}_0) - \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}), p(\mathbf{y})) \\ & - \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y}), q(\mathbf{y})) + \hat{p}(\mathbf{r}_0; \mathbf{y}, \mathbf{n}(\mathbf{y}), q(\mathbf{y}))] dS(\mathbf{r}_0) \end{aligned}$$

여기서, \mathbf{y} 는 임의의 기준점으로서 $\mathbf{r} \in S_0$ 이면 $\mathbf{y} = \mathbf{r}$ 로 정의되고, $\mathbf{r} \in V$, $\mathbf{r} \notin S_0$ 이면 \mathbf{y} 는 경계면에 있으면서 \mathbf{r} 에 가장 근접한 점으로 정의된다. 또한, $\mathbf{n}(\mathbf{y})$, $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ 은 기준점 \mathbf{y} 에서의 법선 벡터와 접선 벡터이며,

$q(\mathbf{y}) = -\rho_0 c V_n(\mathbf{y})$ 이다. 이 식은 적분 방정식이 가지고 있는 모든 특이성이 제거된 형태로서, 경계면이 비교적 부드러운 법선 벡터 $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ 가 정의될 수 있는 모델에 대해 성립한다. 또한 외부 공간에 대한 식으로서 무한 경계면에 대한 음향학적 처리 결과를 포함하고 있다.

2.2. 음향 홀로그래피 방정식

앞의 (2)식에 정상함수(shape function)를 도입하여 이산화 작업을 수행하고 정리하면 다음과 같은 행렬/벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{p}_r = \mathbf{D}_r \mathbf{p}_s + \mathbf{M}_r \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{r} \in V, \quad \mathbf{r} \notin S_0 \quad (3)$$

$$\mathbf{D}_s \mathbf{p}_s = \mathbf{M}_s \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{r} \in S_0 \quad (4)$$

여기서 \mathbf{p}_r 와 \mathbf{v}_s 는 각각 경계면에서의 음압 벡터와 표면 속도 벡터이고, \mathbf{p}_r 는 음장점에서의 음압 벡터이며, \mathbf{D}_s , \mathbf{M}_s , \mathbf{D}_r , \mathbf{M}_r 는 경계면 및 음장점에 대한 단극 음원 행렬 및 쌍극 음원 행렬이다. (4)식을 (3)식에 대입하면 다음과 같은 음향 경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피 방정식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{p}_r = (\mathbf{D}_r \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{M}_s + \mathbf{M}_r) \mathbf{v}_s \equiv \mathbf{G}_v \mathbf{v}_s \quad (5)$$

여기서 \mathbf{G}_v 는 경계면의 진동 속도와 음장 음압 사이의 전달행렬이며, 이 방정식은 \mathbf{D}_s^{-1} 이 존재하면 해를 구할 수 있다. 여기서 음장 음압에 대한 정보가 m 개, 경계면의 속도 정보가 n 개일 때 특이치 분리기법 (singular value decomposition)을 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\mathbf{v}_s = (\mathbf{G}_v^H \mathbf{G}_v)^{-1} \mathbf{G}_v^H \mathbf{p}_r = \mathbf{W}_v \Lambda_v^{-1} \mathbf{U}_v^H \mathbf{p}_r \quad (6)$$

여기서, $\mathbf{G}_v = \mathbf{U}_v \Lambda_v \mathbf{W}_v^H$ 로써, Λ_v 는 대각선요소가 특이치로 구성된 $m \times n$ 의 특이치 행렬이며, \mathbf{U}_v , \mathbf{W}_v 는 각각 column 벡터가 우측 및 좌측 특이치 벡터로 구성된 $m \times m$ 및 $n \times n$ 의 행렬이다. 또한 H 는 Hermitian 행렬을 의미한다.

만일 전달함수 \mathbf{G}_v 를 특이성이 제거된 경계 요소법으로 모델링하고, 음장 음압 \mathbf{p}_r 를 측정으로 구한다면 (6)식을 이용하여 음원 표면의 진동 속도 \mathbf{v}_s 를 구할 수 있게 된다.

3. 제안된 방법의 특성 검증

3.1. 특이성이 제거된 경계요소법의 특성

특이성이 제거된 적분 방정식을 이용하여 만든 전달행렬의 정확도 검증은 위하여, 이론해가 알려진 맥동하는 구(pulsating sphere)에 적용하여 이론적인 음장

음압 분포와 두 가지의 경계요소법을 이용하여 구한 음장 음압을 비교하였다.

표면이 균일한 속도분포 $Ue^{j\omega t}$ 로 진동하는 반경 a 인 구가 무한하고 균질한 매질 내에 있을 때, 이 구의 중심으로부터 r 만큼 떨어져 있는 외부 음장에서 이론 음압은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$p(r) = \rho_0 c U \frac{a(ka)^2 + jka}{r(1+(ka)^2)} \exp\{-jk(r-a)\} \quad (7)$$

경계요소 계산을 위해서 반경 50 mm인 구를 98 개의 절점과 48 개의 삼각형 요소로 구성하였다.

그림 1은 경계면으로부터의 거리 증가에 따라 이론해와 경계요소법으로 구한 음압 크기 사이의 오차율을 비교한 것이다. 특이성이 제거된 경계요소법을 이용한 결과는 $ka=1$ 보다 작은 경우 오차율이 0.3 % 이내이며, 경계면으로부터의 거리 증가에 대해서도 큰 변화가 없다. 그러나 주파수가 증가하여 $ka=10$ 일 때는 특이성이 제거된 경계요소법의 계산 결과도 이론해 대비 오차가 크게 발생하고 있다.

그림 2는 특성길이(L)와 파장(λ)의 비에 따른 음장 음압 오차율을 비교한 것이다. 특이성이 제거된 경계요소법으로 계산한 음압의 경우 $L \leq \lambda/4$ 이면 0.16 %, $L \leq \lambda/3$ 이면 0.27 % 정도의 오차율을 보이고 있다. 이 계산은 요소 모델에 2차 형상함수를 쓴 결과로서 오차가 적으려면 한 개의 파장을 표현하는데 6 - 8 개 이상의 절점이 필요함을 알 수 있다. 한편 $L \geq \lambda/2$ 이상에서는 오차율이 2%를 초과하고 있으며 그 경향도 일관성이 없어 음향 해석에 사용하기 부적절 하다.

다음은 방향에 따른 오차율을 검토하기 위하여, 경계면으로부터 일정한 거리 ($(r-a)/L = 0.01, 0.1$) 만큼 떨어진 거리에 원주 방향으로 음장점을 배치하고 음장 음압의 이론해에 대한 오차율을 비교하였다. 그림3은 $ka=1$ 일 때의 계산 결과로서, 특이성이 제거된 경계요소법을 이용한 계산 결과는 이론해 대비 오차율이 음장점의 거리에 무관하게 1 % 이내 이나, 일반 경계요소법의 계산 결과는 거리가 가까울수록 원주 방향의 오차율이 매우 크고, 그 경향도 매우 복잡함을 확인할 수 있다.

3.2. 특이성이 제거된 경계요소법에 의한 음향 홀로그래피를 이용한 음장 재구성

특이성이 제거된 경계요소법에 기초한 음향 홀로그래피를 음장 재구성에 적용하였을 때의 효과를 검증하기 위하여 경계면으로부터 0.1 L 과 L 만큼 떨어진 위치에 각각 98개의 음압 측정점을 배치하고 $ka=1$ 일 때 이 점들에서의 음압과 이 모델에 대한

전달행렬을 구하였다.

표 1은 위와 같이 두 가지 방법으로 구한 음장 음압과 전달행렬을 상호 교환 조합하여 재구성 오차를 비교한 결과이다.

일반 경계요소법으로 구한 음장 음압과 특이성이 제거된 방법으로 구한 전달행렬을 이용하여 음원 표면의 진동 속도를 재구성한 결과, 음장점이 경계면으로부터 0.1 L 거리에 있는 경우는 재구성 오차율이 매우 크게 발생한다. 이것은 전달행렬은 실제의 값을 정확히 반영하는 반면에 음장 음압은 실제 음압과 오차를 갖기 때문에 발생한 결과이다. 그러나 경계면으로부터의 거리가 L 이 되면 재구성 오차는 0.241 %로 감소하게 된다.

4. 결론

특이성이 제거된 음향 경계요소법 이론을 사용하여 근접음장에서도 음장 음압과 전달행렬 추정치의 정확도가 향상된 음향 홀로그래피 방정식을 만들었다. 이 식을 이용하여 구 모델에 대한 수치 해석을 수행하였다.

특이성이 제거된 경계요소법을 사용한 결과와 일반적인 경계요소법을 이용한 경우를 근접장에서 비교한 결과, 이론치와 비교한 음향 정보들의 오차가 크게 개선되었다. 음향 홀로그래피 구현에 있어서도 특이성이 제거된 경계요소법을 이용하면, 일반 경계요소법 사용시 발생하는 근접장에서의 큰 오차 문제의 해결이 가능함을 확인할 수 있다.

향후는 이 기법의 효과를 실험적으로 확인하고 그 제한조건에 대한 연구를 수행할 예정이다.

참고 문헌

- [1] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, *J. Acoust. Soc. Am.* **78**, 1395-1413 (1985).
- [2] K. Gardner and R. J. Bernhard, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.* **110**, 84-90 (1988).
- [3] W. A. Veronesi and J. D. Maynard, *J. Acoust. Soc. Am.* **85**, 588-598 (1989).
- [4] M. R. Bai, *J. Acoust. Soc. Am.* **92**, 533-549 (1992).
- [5] B.-K. Kim and J.-G. Ih, *J. Acoust. Soc. Am.* **100**, 3003-3016 (1996).
- [6] B.-U. Koo, B.-C. Lee and J.-G. Ih, *J. Sound and Vib.* **192**(1), 263-279(1996).

표 1. 구 모델에 대한 전달행렬과 음장음압의 예측 방법에 따른 오차율 비교. (구의 반경 $a = 50$ mm, 특성길이 $L = 52.14$ mm, freq. = 1093.4Hz, $k = 20$, $ka = 1$)

field	transfer	(r-a)/L=0.1	(r-a)/L=1
-------	----------	-------------	-----------

pressure	matrix	iterations	time
conventional	nonsingular	8,393.09 %	0.241 %
nonsingular	conventional	149.57 %	5.04 %

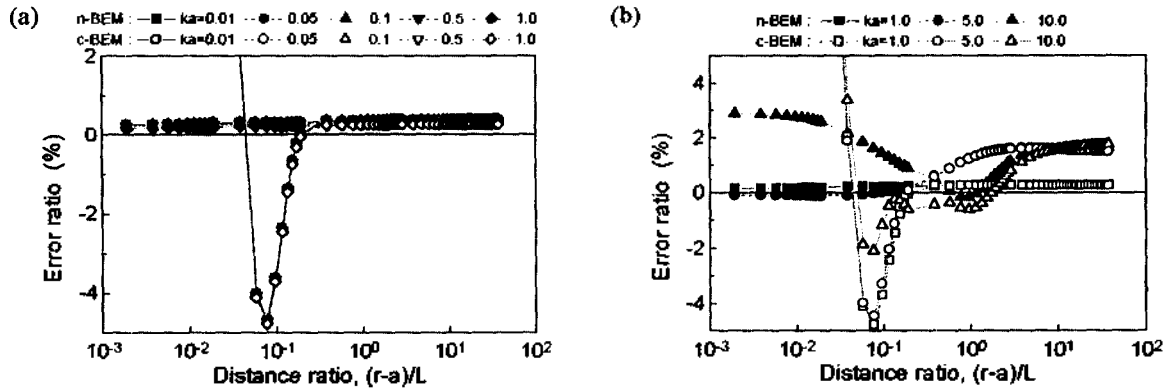


그림 1. 구(sphere) 모델에 대하여 특이성이 제거된 경계요소법(n-BEM)과 일반 경계요소법(c-BEM)으로 계산한 음장점의 거리에 따른 음압 오차율 비교. (a) $ka = 0.01 - 1.0$ 일 때, (b) $ka = 1.0 - 10$ 일 때.

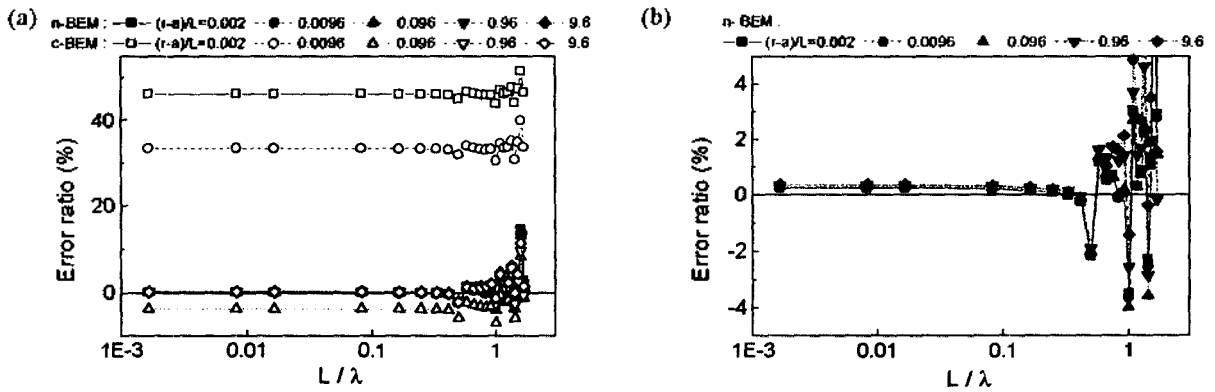


그림 2. 구(sphere) 모델에 대한 파장에 따른 음압 오차율 비교. (a) 특이성이 제거된 경계요소법(n-BEM)과 일반 경계요소법(c-BEM)으로 계산한 결과의 비교, (b) 특이성이 제거된 경계요소법(n-BEM)에 의한 계산 결과의 확대도.

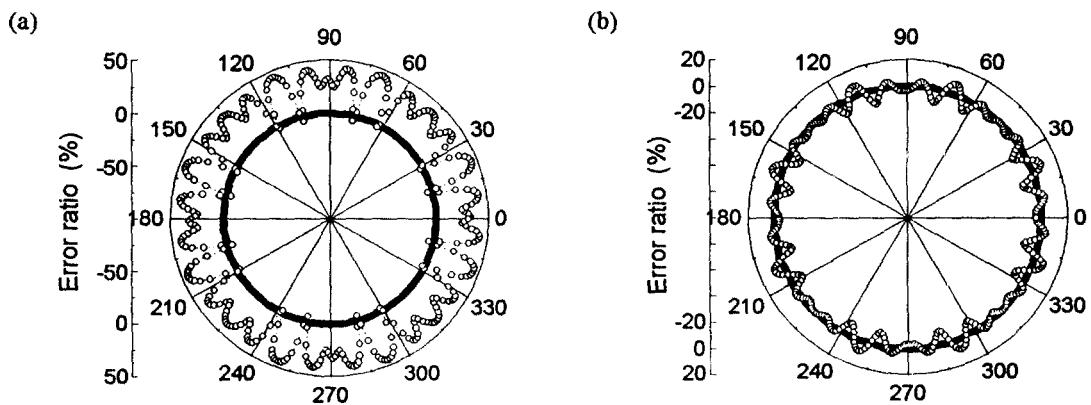


그림 3. 구(sphere) 모델에 대하여 특이성이 제거된 경계요소법과 일반 경계요소법에 의해 계산한 방향에 따른 음압 오차율 비교. $ka=1$ 일 때. (a) $(r-a)/L=0.01$ 일 때, (b) $(r-a)/L=0.1$ 일 때. ●, 특이성이 제거된 경계요소법; ○, 일반 경계요소법.