

수중에서 구형 산란체에 의한 음의 산란 해석

The Scattering Analysis for the Sphere in Water

김관주* · 김재환** · 유상욱***

Kwanju Kim · Jaehwan Kim · Sangwook You

Key Words : Scattering(산란), Rigid Scatterer(강체 산란체), Elastic Scatterer(탄성 산란체), Backscattered point(후면 산란점), Plane wave(평면파)

ABSTRACT

The SONAR(SOund NAVigation and Ranging) is the system that detects objects and finds their locations in water by using the echo ranging technique. In this paper, the scattering phenomena for a rigid spherical scatterer will be analyzed using closed form solution, Boundary Element Method and Finite Element Method. Scattering analysis for an elastic spherical scatterer will be analyzed, later. In order to analyzing the sound wave scattering phenomena for an elastic scatterer in water coupled problem between acoustic and vibration, must be considered.

기 호 설 명	
a	: 구의 반지름
c	: 물에서의 음의 전파속도
c_p	: 구에서의 음의 전파속도
G	: Green 함수
h	: 구의 두께
h_n	: 제1종 구형 Hankel 함수
h_n'	: 제1종 구형 Hankel 함수의 미분치
j_n	: 제1종 구형 Bessel 함수
j_n'	: 제1종 구형 Bessel 함수의 미분치
k	: 파동수
p_i	: 입사파의 압력
p_n	: 구를 진동시키는 음향가진
p_r	: 구의 진동에 의해 발생된 파의 압력
p_{∞}	: 산란파의 압력
P_i	: 입사파의 압력크기
P_n	: Legendre 다항식(m=0)
\ddot{w}_i	: 입사파의 입자가속도
\ddot{w}_{∞}	: 산란파의 입자가속도
\ddot{W}_{mn}	: 회전 방향에 대한 입자가속도의 크기
z_n	: 음향 임피던스
Z_n	: 구조물의 임피던스
ρ	: 물의 밀도
ρ_s	: 구의 밀도
μ	: 구의 Poisson's ratio
ω	: 가진주파수
Ω_{n1}	: 구의 저주파 진동모드
Ω_{n2}	: 구의 고주파 진동모드
* 홍익대학교 기계공학과	
** 인하대학교 기계공학과	
*** 홍익대학교 대학원 기계공학과	

1. 서론

음향의 산란해석은 강제 산란체에 의한 것과 탄성 산란체에 의한 것으로 나눌 수가 있다. 전자의 경우는 공기 중에 있는 산란체를 생각할 수 있다. 일반적으로 공기와 산란체와의 밀도차가 크기 때문에 음향 전파에 대한 저항차가 커지게 된다. 따라서 공기 중에서의 음향가진에 의한 산란체의 움직임이 무시되어질 수가 있다. 그러므로 위의 문제를 강제 산란체에 의한 산란으로 해석할 수 있다. 한편 후자의 경우는 물 속에 있는 산란체에 의한 것을 생각할 수가 있다. 물의 밀도는 공기보다 대단히 크며 탄성 산란체와의 밀도차는 그렇게 크지 않다. 따라서 물 속에서의 음향가진은 산란체를 진동시키게 되고 이로 인해 탄성 산란체가 새로운 음원이 된다. 그러므로 탄성체의 경우에는 음향과 진동의 연속문제로 해석하여야 한다.

SONAR는 음향산란을 이용하여 수중에 있는 물체를 탐지하고 그 물체의 위치를 파악하는 시스템이다. 본 연구는 SONAR를 해석하는 전용 프로그램의 개발이 주요한 목적이다. 이에 기존에 사용되고 있는 상용 BEM 프로그램인 SYSNOISE를 이용하여 산란체에 의해 수중에서 음이 어떻게 산란되는가를 해석하고 그 결과들이 이론해와 얼마만큼 근사한가를 비교·검토한 후 전용 프로그램 개발에 어떻게 이용할 것인가를 연구할 것이다.

본 연구에서 사용되는 산란체의 형상은 축대칭의 특징을 가지는 반경 1m, 두께 30cm의 간단한 구형이고 재질은 알루미늄이다. 또한 음원은 크기가 1Pa인 조화평면파이다.

해석 단계는 우선 강체에 의한 산란해석을 수행하여 이론해와 비교하였고 다음으로 탄성체에 의한 산란해석을 수행하였다.

2. 강제 구에 의한 산란 해석

2.1 이론해

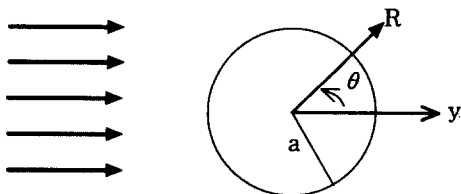


Fig. 1 Harmonic plane wave impinging spherical scatterer

Fig. 1과 같이 y방향으로 진행하는 조화평면파가 반지름이 a인 구형 산란체에 충돌한다고 가정하자. 구형 산란체에 충돌하는 평면파의 압력은 적절한 이론에 의해 다음과 같은 무한급수의 형태로 표현할 수가 있다.

$$p_i(R, \theta) = P_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) j_n(kR) \quad (1)$$

다음으로 산란음장에서의 압력을 고려하자. 구형 산란체가 강제인 경우 경계면상에 수직인 방향으로의 입자가속도는 0이 된다.

$$\ddot{w}_{\infty}(\theta) + \ddot{w}_i(\theta) = 0 \quad (2)$$

산란체가 존재하지 않을 때 검사표면상에서 관찰되는 경계면상에 수직인 방향으로의 입자가속도는 다음과 같다.

$$\frac{\partial p_i(R, \theta)}{\partial R} = -\rho \ddot{w}_i(\theta) \quad (3)$$

식(2)와 식(3)을 결합하면

$$\ddot{w}_{\infty}(\theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i(R, \theta)}{\partial R}, \quad R = a \quad (4)$$

이 되고, 식(1)을 식(4)에 대입하면 산란음장에서의 입자가속도를 얻게 된다.

$$\ddot{w}_{\infty}(\theta) = \frac{kP_i}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) j_n'(ka) \quad (5)$$

구형 산란체에 대하여 θ 에 대한 Legendre 함수와 ϕ 에 대한 cosine과의 곱을 급수형태로 표현함으로써 입자가속도를 나타낼 수 있다.

$$\ddot{w}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \ddot{W}_{mn} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (6)$$

식(5)와 식(6)을 비교해 보면 입자가속도의 크기를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{W}_{0n} &= P_i \frac{k}{\rho} (2n+1) i^n j_n'(ka) \\ \dot{W}_{mn} &= 0, \quad m > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

구형 방사체에 의해 형성되는 음장에서 음압분포는

$$\begin{aligned} p(R, \theta, \phi) &= -\rho a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi G\left(\frac{R, \theta, \phi}{a, \theta_0, \phi_0}\right) \\ &\quad \times \ddot{w}(\theta_0, \phi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\phi_0 \end{aligned} \quad (8)$$

이고, 식(8)을 급수형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(R, \theta, \phi) &= -\frac{\rho}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \dot{W}_{mn} \\ &\quad \times P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \frac{h_n(kR)}{h_n'(ka)} \end{aligned} \quad (9)$$

$m=0$ 인 경우 식(7)을 식(9)에 대입하면 산란에 의한 압력분포를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_{\infty}(R, \theta) &= -P_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n \\ &\quad \times P_n(\cos \theta) \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n(kR) \end{aligned} \quad (10)$$

그러므로 조화평면파가 강체 구형 산란체에 충돌하여 형성되는 음장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= p_i + p_{\infty} \\ &= P_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) \\ &\quad \times \left\{ j_n(kR) - \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n(kR) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$R=a$ 인 경계면상에서의 식(11)은

$$\begin{aligned} p(a, \theta) &= P_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) \\ &\quad \times \left\{ j_n(ka) - \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n(ka) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

이 되고, 식(12)를 간단히 하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p(a, \theta) &= \frac{iP_i}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n P_n(\cos \theta)}{h_n'(ka)} \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 경계요소법을 이용한 해석

Fig. 2는 Fig. 1의 경우를 경계요소법을 이용하여 해석하기 위한 모델이다. Fig. 2에서 구의 절점은 386개이고 구의 요소는 384개이다. 그러므로 해석주파수 한계는 약 990Hz가 된다.

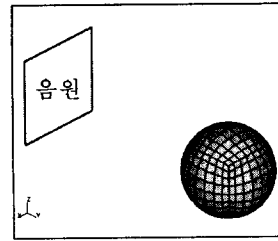


Fig. 2 BEM model

Fig. 3은 Fig. 2에 대하여 가진주파수 범위가 100~950Hz까지인 경우 Backscattered point에서의 압력변화이다. Fig. 3을 이론해와 비교하면 대단히 잘 일치함을 알 수 있다.

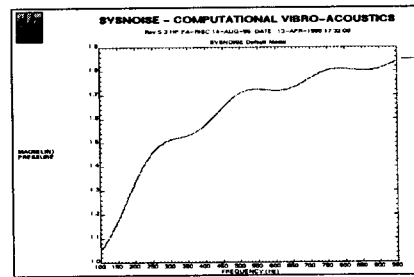


Fig. 3 Result by BEM(I)

본 연구에서 관심주파수 범위의 상한은 5000Hz이다. 그러므로 Fig. 3은 본 연구에서의 관심주파수 상한을 만족시키지 못한다. 이러한 문제는 구형 산란체의 Mesh를 좀더 자세하게 나눔으로서 해결할 수 있다. 그러나 해석주파수 한계가 관심주파수 범위를 포함하기 위해서는 많은 Mesh가 필요하기 때문에 계산에 소요되는 시간이 대단히 많아지며 또한 결과에 대한 용량도 매우 커지게 되어 비효율적이게 된다. 따라서 위의 문제를 보다 효율적으로 해결할 수 있는 방안이 모색되어져야 한다.

위에서 언급한 문제점에 대한 해결방안으로 생각되어진 것은 Symmetry와 Axisymmetry를 이용하는 것이다. 전자의 경우, Fig. 2의 모델을 생각할 때 단순히 Full-model을 대칭적으로 자르는 것에 불과하기 때문에 해석주파수 한계를 변화시키지 못한다. 물론 이러한 문제는 Full-model에서와 마찬가지로 Mesh를 좀더 자세히 나눔으로서 해결할 수 있다. 그러나 이러한 경우 해석주파수 한계가 증가함에 따라 요소의 수도 증가하기 때문에 결과에 대한 용량이 커지는 것은 마찬가지이다. 따라서 전자의 방법은 위의 문제점을 해결하는 데 효율적이지 못하다. 후자의 방법에서는 반원만 모델링하면 되기 때문에 해석주파수 한계가 관심주파수를 포함하도록 Meshing을 자세하게 한다고 하더라도 Full-model이나 Symmetric-model에 비해 Mesh 수의 증가가 크지 않다. 그러므로 Axisymmetry를 이용한 방법이 위의 문제를 해결할 수 있는 보다 효과적인 방법으로 선택되었다. 따라서 후자의 방법을 이용하여 위의 문제를 해석하였다. Fig. 4는 Axisymmetry를 이용한 해석결과로서 가진주파수 범위가 100~2800Hz인 경우 Backscattered point에서의 압력변화이다.

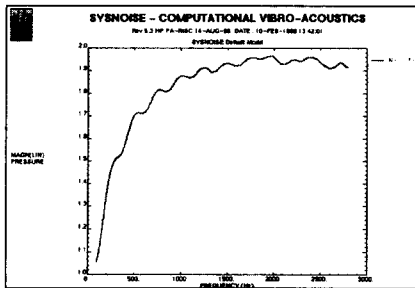


Fig. 4 Result by BEM(II)

경계요소법을 이용하여 Fig. 2에 대한 문제를 해석할 경우 Irregular Frequency라고 하는 알고리즘상의 오차가 발생하게 된다. 이는 경계요소법을 이용하여 외부음장에 대한 문제를 해석할 때 내부음장을 동시에 고려하기 때문에 발생하는 영향으로 특정주파수에서 예기치 못한 Peak을 발생시킨다. 그러나 이러한 Peak들은 실제 현상에서 나타나는 것이 아니기 때문에 제거되어야 한다. 이러한 문제에 대해 SYNOISE에서는 Overdetermine 명령을 사용함으로써 Irregular Frequency 영향을 제거할 수 있다. 실제로 Fig. 3과 Fig. 4의 결과는 Overdetermine 명령을 사용한 결과들이다.

2.3 유한요소법을 이용한 해석

위에서 말한 것처럼 경계요소법을 이용하여 문제를 해석할 경우 Irregular Frequency에 대한 영향을 제거해야 한다. 그러나 고주파수로 갈수록 이러한 영향을 제거하는 것이 매우 어렵다. 따라서 고주파수에 대해서는 다른 해석방법이 요구되어진다. 이에 대한 방법으로 연구되어진 것이 Infinite element를 이용한 유한요소방법이다. Infinite element는 유한요소법의 새로운 개척분야로서 해석하고자 하는 모델을 간략하게 모델링하고 나머지 외부음장을 하나의 요소로 모델링하여 Sommerfeld 조건을 만족시키도록 적절한 알고리즘을 적용하는 방법이다.

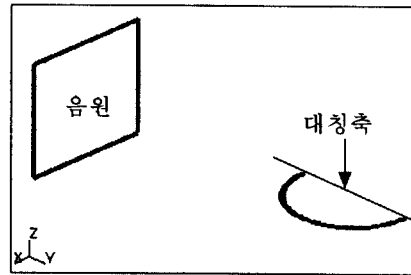


Fig. 5 Infinite element model

Fig. 5는 Infinite element를 이용한 방법에 사용된 모델이다. 모델의 안쪽은 산란체의 외부 경계면이고 나머지 부분은 외부음장이다. 모델의 중심을 기준으로 하여 바깥 면부터 무한대까지를 하나의 Infinite element로 모델링하였고 결과가 수렴하도록 적절한 알고리즘을 적용하였다. 또한 Axisymmetry를 사용하였다.

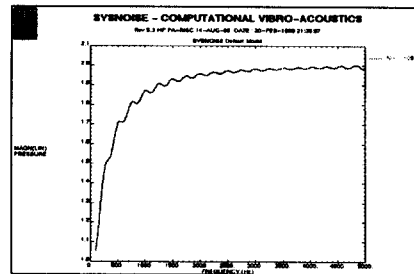


Fig. 6 Result by Infinite element

Fig. 6은 Infinite element를 이용하여 해석한 결과로서 가진주파수 범위가 100~5000Hz인 경우 Backscattered point에서의 음압변화이다.

2.4 결과검토

경계요소법을 이용한 해석에서는 주파수의 한계, 계산에 소요되는 시간, 결과에 대한 용량 등의 문제 때문에 Axisymmetric-model를 이용하였다. 그러나 고주파수 영역에 대하여 경계요소법을 이용한 방법에서 Irregular Frequency에 대한 영향을 제거하는 것이 매우 어렵기 때문에 유한요소 방법인 Infinite element를 이용하였다. 또한 계산시간을 단축하고 결과에 대한 용량을 줄이기 위하여 경계요소법에서와 마찬가지로 Axisymmetry를 사용하였다. Fig. 7은 이론해와 경계요소법 및 유한요소법을 이용한 결과를 비교한 것이다.

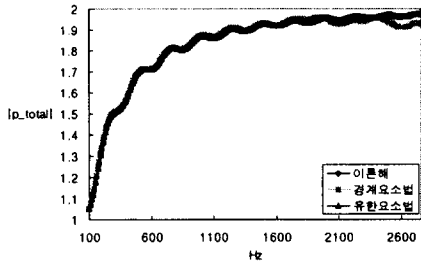


Fig. 7 Theoretical result vs. Analytic result

Fig. 7에서 유한요소법을 이용한 결과와 이론해와는 대단히 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 경계요소법을 이용한 결과와 이론해는 고주파수로 갈수록 오차가 커지는 것을 볼 수 있다. 이러한 오차는 Overdetermine point를 다소 부적절하게 선택하여 발생한 것이기 때문에 Overdetermine point를 보다 적절하게 선택함으로써 줄일 수 있다.

3. 탄성체 구에 의한 산란 해석

3.1 이론해

탄성체 구에서의 산란은 강체 구에서의 산란과는 약간 다르다. 강체 구에서는 구가 음향가진에 의해 움직이지 않기 때문에 입사파와 반사파만의 합수로서 외부음장이 표현되었다. 그러나 탄성체 구에서는 음향가진에 의해 구가 진동하기 때문에 구의 진동이 새로운 음원이 된다.

$$p = p_i + p_{se} = p_i + p_{\infty} + p_r \quad (14)$$

탄성체 구에 대하여 구를 가진하는 압력 p_n 은 입사파와 반사파의 합이다.

$$p_n = p_i + p_{\infty} \quad (15)$$

다음으로 표면 가진에 의한 spherical shell의 동적 응답은 다음과 같다.

$$p(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P_n(\cos \theta) \quad (16)$$

식(16)을 식(13)과 비교하면, 탄성체 구를 가진하는 압력은 다음과 같이 된다.

$$p_n = \frac{i P_i}{(ka)^2} \frac{(2n+1) i^n}{h_n'(ka)} \quad (17)$$

또한 음향가진에 의한 구의 진동응답을 속도로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{w}(\theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n P_n(\cos \theta)}{Z_n + z_n} \quad (18)$$

식(18)에서 Z_n 은 구조물의 모드와 관련된 임피던스이고

$$Z_n = \frac{i \rho_s c_p h}{\Omega} \frac{[\Omega^2 - \Omega_{n1}^2][\Omega^2 - \Omega_{n2}^2]}{\Omega^2 - (1 + \beta^2)(\mu + m - 1)}$$

여기서, $m = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$c_p = \sqrt{\frac{E}{(1 - \mu^2)\rho_s}}$$

$$\Omega = \frac{a\omega}{c_p}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2$$

z_n 은 외부 음장에서의 음향 임피던스이다.

$$z_n = \rho c [ka |h_n'(ka)|]^{-2} + i \frac{\rho c^2}{a} \frac{j_n'(ka)j_n(ka) + y_n'(ka)y_n(ka)}{|h_n'(ka)|^2}$$

여기서, ρc : 특성 임피던스

식(17)을 식(18)에 대입하면 외부 음향가진 p_n 에 의한 구조물의 진동응답을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{w}(\theta) &= -\frac{P_i}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^{n+1} P_n(\cos \theta)}{Z_n + z_n} \end{aligned} \quad (19)$$

식(19)에 대하여 $\ddot{w} = -i\omega\dot{w}$ 을 적용하면 속도에 대한 표현을 가속도에 대한 표현으로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{w}(\theta) &= -\frac{\omega P_i}{(ka)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n P_n(\cos \theta)}{Z_n + z_n} \end{aligned} \quad (20)$$

다음으로 식(20)을 식(9)에 대입하면 구의 진동에 의해 형성된 음장은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} p_r(R, \theta) &= -\frac{i\rho c e^{ikR} P_i}{kR} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) P_n(\cos \theta)}{(Z_n + z_n) [ka h_n'(ka)]^2} \end{aligned} \quad (21)$$

앞에서 언급하였듯이 탄성체 구에 의한 산란에서 산란음장에 대한 식은 식(14)와 같다. 따라서 식(12)와 식(21)을 결합하여 탄성체 구에 의해 산란된 음장을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= P_i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n P_n(\cos \theta) \\ &\times \left\{ j_n(kR) - \frac{j_n'(ka)}{h_n'(ka)} h_n(kR) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho c h_n(kR)}{(ka)^2 (Z_n + z_n) [h_n'(ka)]^2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

3.2 경계요소법을 이용한 결과

강체 구에 의한 산란에서와 마찬가지로 Fig. 2와 같이 모델링을 하고 구의 모델에 탄성체 조건을 대입하였다.

우선 유한요소법을 이용하여 1000Hz까지의 모드

를 구하였고 Modal Superposition을 이용하여 산란 해석을 수행하였다.

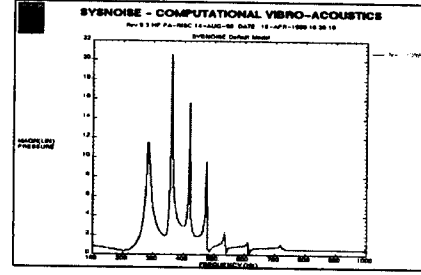


Fig. 8 Result for elastic sphere

Fig. 8은 탄성체 구에 대하여 가진주파수 범위가 100~1000Hz인 경우 Backscattered point에서의 압력변화이다. Fig. 8에서는 강체 구에 대한 해석과는 달리 특정주파수에서 매우 큰 압력값이 발생하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8을 보면 해석에서의 가진주파수를 1000Hz으로 제한하였다. 이는 탄성체 구에 대한 해석에서는 Symmetry나 Axisymmetry를 사용하는 것이 타당하지 않기 때문이다. - 위의 두 가지 방법은 음향 가진에 의한 구의 진동을 임의적으로 구속해 버리기 때문에 실제와는 다른 결과를 나타낼 수 있다. - 그렇기 때문에 탄성체 구에 대한 해석에서는 Full-model을 이용하였다. 따라서 Full-model을 이용한 강체 구에 대한 해석에서와 마찬가지로 가진주파수를 제한하였다.

3.3 결과검토

Fig. 8의 Backscattered point에서의 결과를 보면 특정주파수에서 Peak이 나타나는 것을 알 수 있다. 또한 이론해인 식(22)를 살펴보면 탄성 산란체에 의해 형성된 음장이 산란체의 고유 진동모드와 관련되어 있음을 알 수 있다.

No	Peak-frequency	고유진동수	오차
1	280Hz	305.35Hz	9.06%
2	360Hz	380.25Hz	5.63%
3	420Hz	434.30Hz	3.40%
4	480Hz	486.46Hz	1.35%
5	540Hz	546.69Hz	1.24%
6	610Hz	625.97Hz	2.62%
7	720Hz	737.39Hz	2.42%

Table 1 Peak-frequency and Natural frequency

Table 1은 Fig. 8에서 Peak이 발생하는 주파수와 수중에서 구의 고유진동수를 비교한 표이다. Table 1을 보면, 앞에서 언급하였던 Peak이 발생하는 주파수와 유한요소법 및 경계요소법을 이용하여 구한 수중에 있는 구의 고유진동수가 10% 오차범위 안에서 일치하고 있음을 알 수 있다.

4. 결론

서론에서 밝혔던 것처럼 본 연구의 목적은 경계요소법 및 유한요소법을 이용한 상용 프로그램들이 SONAR에 대한 문제를 얼마나 정확하게 계산할 수 있는가에 대하여 알아보는 것이다. 이에 손계산이 가능한 간단한 구형체를 이용하여 산란해석을 수행하였다.

먼저 강체 구에 대한 해석결과들을 살펴보면 경계요소법과 유한요소법을 이용한 결과들이 이론해와 대단히 잘 일치함을 알 수 있다.

탄성체 구에서 이론해를 보면 외부의 음향가진에 의해 구가 진동을 하고 이러한 진동에 의해 형성된 외부음장의 음압분포가 구의 고유진동수와 관련되어 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 경계요소법을 이용한 해석결과에서 Peak이 나타나는 주파수와 수중에서의 고유진동수가 비교적 잘 일치하고 있음을 통해서 확인할 수 있다.

SONAR는 수중에 있는 산란체이기 때문에 연성 문제로 계산되어야 한다. 또한 외부신호를 인식하는 장치(SONAR Array)가 SONAR Dome 내부에 존재하기 때문에 내부음장에 대한 해석이 요구된다. 그렇기 때문에 앞으로의 연구에서는 내부음장으로 유입되는 신호의 손실과 내부전파 및 구의 진동에 의해 발생된 음향의 내부전파 등이 고려되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- (1) Miguel C. Junger, David Feit, "Sound, Structures, and Their Interaction", The MIT Press (1994)
- (2) Werner Soedel, "Vibration of Shells and Plates" (1993)
- (3) Robert J. Urick, "Principles of Underwater Sound for Engineers", McGraw-Hill (1967)

- (4) Prem K. Kythe, "An Introduction to Boundary Element Methods", CRC Press (1995)
- (5) NIT, "SYSNOISE Rev 5.3 User's Manual",
- (6) R. J. Astley, J. P. Coyette, "Application of Wave Envelope Element to Acoustical Scattering"