

# 조화 가진에 의한 원통형 음향 방사기의 방사 효율 특성

## The Characteristic of Radiation Efficiency from Harmonic-excited Cylindrical Radiator

김관주\*\* · 최승권\*  
Kwanju Kim · Sungkwon Choi

**KEYWORDS** : Radiation Efficiency(방사효율), Axial Wavenumber(축방향 파동수)  
Cylindrical Radiator(원통형 음향 방사기)

### ABSTRACT

Radiation efficiency of a cylindrical shell whose surface vibrates under harmonic distribution is investigated by theoretical solutions and Boundary Element Method. The vibration modes of a cylindrical shell is determined from experiment and is compared with the result of Finite Element Method. Harmonic vibration response of the cylindrical shell under the point excitation and the radiation phenomena from its response is analyzed by Finite Element Method and Boundary Element Method.

### I. 서론

소리를 수월하게 방사하는 방사기(radiator)의 형태는 기본적으로 평판 음향 방사기(plate sound radiator), 원통형 음향 방사기(cylindrical sound radiator) 그리고 구형 음향 방사기(spherical sound radiator)로 나누어 볼 수 있다. 이 세 가지 중 종(bell)의 음향 특성을 알아 보기 위하여 원통형 음향 방사기의 음향 특성에 대해 알아보도록 한다. 이에 일차적으로 원통형 음향 방사기로 볼 수 있는 강(鋼) 파이프의 자유 진동(free vibration) 특성에 대해 실제

실험과 더불어 유한 요소 해석으로 비교해 보며, 다음으로는 원통 표면의 속도가 조화 함수로 분포하고 있을 때의 방사 효율을 경계 요소 해석으로 살펴보고 이론에 의한 방사 효율과 비교해 보고, 강(鋼) 파이프에 대해 점 가진(point excitation)에 의한 조화 진동 응답(harmonic vibration response)과 그 응답에 의한 소리의 방사 효율 특성을 유한 요소 해석과 경계 요소 해석을 병행하여 살펴보고자 한다.

### II. 원통(Cylindrical Shell)의 공진 주파수와 모드 형상

- (1) 자유 지지(free boundary condition) 원통(Cylindrical Shell)의 모드(mode)

\*\* 홍익대학교 기계공학과

\* 홍익대학교 일반대학원 기계공학과

1) 충격 해머 실험에 의한 모드

실험에 사용한 강(鋼) 파이프의 제원은 Table 1에 나타나 있다. 자유 지지 조건을 만족시키기 위해 탄력이 좋은 고무줄을 이용하여 파이프를 수평으로 달고 실행하였다. 실험에 사용한 가속도계는 DYTRAN사(社) 제품 3100B와 PCB사(社)의 제품 A353B17 두 가지를 사용하였으며, 충격 해머는 PCB사(社)의 353B03, 분석기로는 Hewlett Packard사(社)의 35655A 8CH FFT 분석기를 사용하였다.

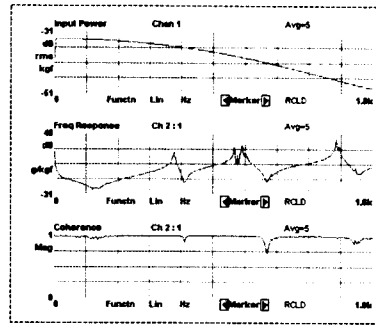


Fig. 3 Driving Point FRF

Table 1 Property of a Steel pipe

	크기 (외경×길이×두께)	물성치		경계 조건
		탄성 계수(E)	밀도(ρ)	
파이프	100mm×1000mm×3.55mm	200 GPa	7830 kg/m <sup>3</sup>	양단 자유 지지

Fig. 2는 파이프의 절점들을 보여 주고 있으며 실험 방법은 가속도계를 17번 절점에 위치시키고 충격 해머로 파이프 위의 40점을 가진하면서 각 절점에 대한 주파수 응답 함수를 측정하였다.

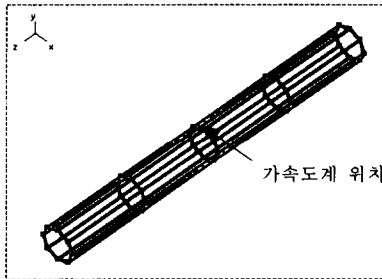


Fig. 2  
Measure point of Steel pipe

Fig. 3은 구동점(driving point)인 17번 절점에서의 충격 해머 입력 파워와 주파수 응답 함수, 상관 함수(Coherence)를 보여주고 있다. 이러한 충격 가진으로 구한 강(鋼) 파이프의 모드 형상의 처음 2개를 도시하면 Fig. 4와 같다. 왼쪽 그림인 첫 번째 모드 형상은 길이 방향 일차 굽힘이며 두 번째는 축방향 중심으로 약 45° 회전한 첫 번째 모드 형상과 동일한 일차 굽힘 형상이 나타났다. 이것은 뒤에 유한 요소 해석의 결과에서도 볼 수 있는 현상이다.

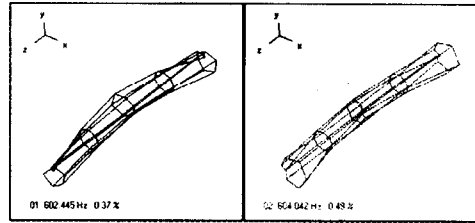


Fig. 4 First two Mode shape

2) 유한 요소 해석(FEM)에 의한 모드

유한 요소 해석 프로그램으로는 ANSYS V5.3을 사용하였으며, 실제 강(鋼) 파이프의 크기를 기반으로 구성된 모델의 요소 개수와 종류는 Table 2와 같다.

Table 2 Property of FE Model

	절점 개수	요소 개수 (요소 종류)
모델	1800	1764 (SHELL63)

실험에 의해 사용된 강(鋼) 파이프는 모든 원주에 대해 균일한 길이와 두께를 갖지 않았다. 물론 실험을 수행하는 데 있어서 큰 오차를 야기할 만큼 크지는 않았다. Fig. 5는 두 번째 모

드 형상을 보여주고 있다. 강(鋼) 파이프 유한 요소 모델이 축대칭의 형태이므로 같은 주파수에서 길이 방향(z축 방향)을 중심으로 45° 회전한 동일한 모드 형상이 나타나는 것을 해석 결과로 알 수 있었으며 한 개의 공진 주파수가 나타나는 경우는 비틀림 모드 형상(torsional mode shape)임을 볼 수 있었다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 실험에 의한 모드 형상과 동일한 현상임을 알 수 있다. 그러나 실제의 강(鋼) 파이프는 완벽한 축대칭이 아니므로 이런 현상이 같은 주파수에서 나타나지 않고 근접한 주파수 영역에서 축방향 중심으로 약 45° 회전한 모드 형상이 존재하는 것이다. 유한 요소 해석으로 구한 공진 주파수 중 여덟 번째까지를 Table 3에 정리하였다.

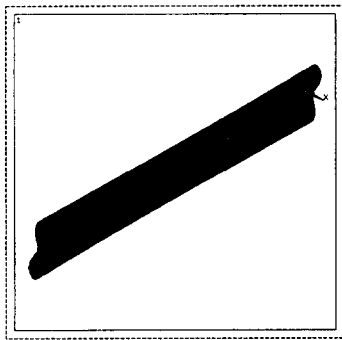


Fig. 5  
Second Mode shape of FEA

Table 3 Resonance Frequency of FEA

공진 주파수(Hz)	비 고	
1	597.82 Hz	두 개씩 나타남
2	910.96 Hz	"
3	914.66 Hz	"
4	950.68 Hz	"
5	1095.2 Hz	"
6	1417.8 Hz	"
7	1489.9 Hz	"
8	1572.9 Hz	하나만 나타남

(2) 유한 요소 해석과 실험과의 비교

실험으로 구한 공진 주파수와 유한 요소 해석에 의한 공진 주파수를 비교해 보면 다음 Table 4와 같다. 오차는 실험에 의한 공진 주파수를 참값으로 보고 계산한 상대 오차이다.

Table 4 Comparison of Natural Frequencies

공진 주파수(실험)	공진 주파수(유한요소해석)	오차 (%)	
1	602.445 Hz	597.82 Hz	0.7677
2	604.042 Hz	597.82 Hz	1.0301
3	904.542 Hz	910.96 Hz	-0.7095
4	908.359 Hz	910.96 Hz	-0.2863
5	920.142 Hz	914.66 Hz	0.5958
6	922.494 Hz	914.66 Hz	0.8492
7	944.311 Hz	950.68 Hz	-0.6745
8	957.326 Hz	950.68 Hz	0.6942
9	1091 Hz	1095.2 Hz	-0.3849
10	1102 Hz	1095.2 Hz	0.6171
11	1416 Hz	1417.8 Hz	-0.1271
12	1426 Hz	1417.8 Hz	0.5750

III. 원통형 음향 방사기의 방사 효율

(1) 축방향을 고려하지 않은 원통형 음향 방사기의 방사 효율 특성

1) 이론에 의한 방사 효율

Fig. 6과 같은 원통형 좌표계에서 축방향으로 일정한 속도로 진동하는 원통형 음향 방사기는 다음과 같은 속도를 갖고 표면이 진동하는 음원으로 볼 수 있다.

$$v(\phi) = v_n \cdot \cos n\phi \quad (1)$$

여기서,  $v_n$ 은 속도의 크기를 의미한다. 식 (1)은 축방향  $z$ 는 고려하지 않은 것을 볼 수 있는데, 다시 말하면 음원을 모든 축방향에 대해 동일한 형태로 진동하는 튜브 형태로 볼 수 있다. 여기서 파동 방정식 (2)를 만족시키는 음압 분포를 구해야 하고 이 음압 분포는 매우 멀리 떨어진 거리에서  $e^{-jkr}$ 의 형태로 확산되는 파동으로 감소한다. 또한 원통의 표면인  $r=a$ 에서는 식 (1)에서 주어진 속도를 갖게 된다. 축방향  $z$ 를 고려하지 않은 원통 좌표계에서의 파동 방정식은

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + k^2 p = 0 \quad (2)$$

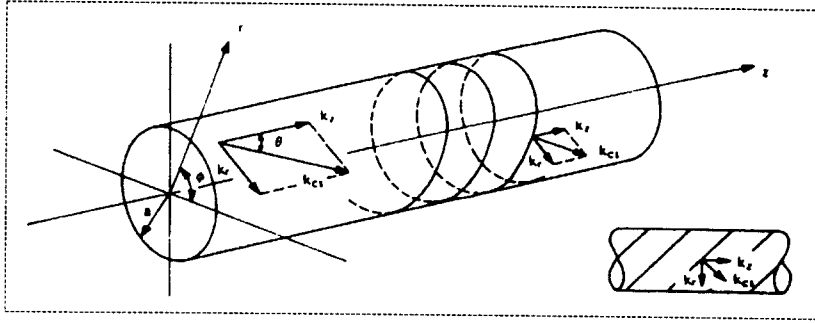


Fig. 6 Cylindrical Coordinate

이 되고, 만약 원통형 음향 방사기 주위의 매질이 소리에 의해 방해받지 않는다고 보면 음압  $p(r, \phi)$ 는 다음과 같은 조건을 만족해야만 한다.

$r \rightarrow \infty$  에서 경계 조건은

$$p(r, \phi) \sim \frac{e^{jkr}}{\sqrt{kr}} \quad (3)$$

$r = a$  에서 경계 조건은

$$-j\omega\rho v(\phi) = \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

식 (2)의 일반해는 임의의  $n$  차 Bessel 함수와  $n$  차 Neumann 함수의 선형 조합으로 쓸 수 있다. 이러한 모든 조합에서 경계 조건  $r \rightarrow \infty$  을 만족하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(r, \phi) &= p_n \cos n\phi [J_n(kr) - jN_n(kr)] \\ &= p_n \cos n\phi H_n^{(2)}(kr) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $H_n^{(2)}$  은  $n$  차 제2종 Hankel 함수를 나타낸다. 아직 미지수로 남아 있는  $p_n$  을 구하기 위해  $r = a$  일 때의 경계 조건(식 (4))에 대입하여 풀면,

$$p_n = -\frac{j\rho c v_n}{H_n^{(2)'}(ka)} \quad (6)$$

여기서,  $H_n^{(2)'}(ka)$  은  $r = a$  에서  $kr$  에 대한 편미분  $\frac{\partial H_n^{(2)}(kr)}{\partial(kr)}$  을 의미한다. 따라서, 식 (6)에 의한 음압은 다음과 같다.

$$p(r, \phi) = -v_n \frac{j\rho c}{H_n^{(2)'}(ka)} \cos n\phi H_n^{(2)'}(kr) \quad (7)$$

식 (8)을 이용하여 단위 축방향 길이당 원거리 음장(far field)에 방사되는 음향 파워는

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\rho c} \int_0^{2\pi} |p(r, \phi)|^2 r d\phi \\ &= |v_n|^2 \frac{\rho c}{|H_n^{(2)'}(ka)|^2 \epsilon_n} \end{aligned} \quad (8)$$

이 되고, 속도 경계 조건이 식 (1)과 같을 때 방사 효율  $\sigma_n$  은 아래와 같다.

$$\sigma_n = \frac{P}{2\pi\rho c \bar{v}^2} = \frac{1}{\pi} \frac{2}{ka |H_n^{(2)'}(ka)|^2} \quad (9)$$

여기서, 평균 제곱 속도  $\bar{v}^2$  은

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v_n|^2 \cos n\phi d\phi \quad (10)$$

그리고,  $\epsilon_0 = 0.5, n = 1, 2, 3, \dots$  에 대해  $\epsilon_n = 1$  을 의미한다.

## 2) SYSNOISE를 이용한 방사 효율

앞에서 언급한 축방향을 고려하지 않은 원통형 방사기에 대해 표면의 속도 분포가 식 (1)과 같은 경우의 방사 효율을 음향 해석 프로그램인 SYSNOISE로 계산해 보았다. 모델의 해석 방법 및 크기 그리고 절점과 요소의 수 등을 Table 5에 요약하였다. Fig. 7은  $n = 1 \sim 4$ 에 대해 모델의 원형과 입력된 속도 분포에 의해 변형된 모습을 나타낸 것이다.

Table 5 Property of Model

모 델	해석 방법	차원	크기	절점 개수	요소 개수	Fmax <sup>1)</sup>
	경계 요소 해석(BEM)	2차원	반지름 1m	360	359	3246.8 Hz

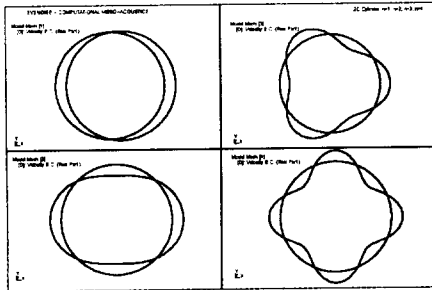


Fig. 7  
Shape of Velocity Boundary Condition and Original Model Shape

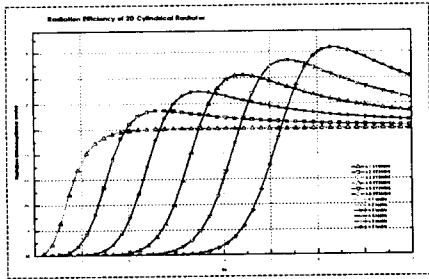


Fig. 8  
Radiation Efficiency of Theoretical Solution and SYSNOISE

1) Fmax(Frequency maximum)은 SYSNOISE에서 제공하는 해석값을 신뢰할 수 있는 상한 주파수 범위를 말한다.

이론에 의한 방사 효율과 SYSNOISE를 이용한 방사 효율을 linear scale로 비교해 본 그림이 Fig. 8이다. 이론에 의한 방사 효율과 SYSNOISE를 이용한 방사 효율이 무시할 수 있는 미소한 오차 범위 내에서 잘 맞는 것을 볼 수 있으며, 반경 방향 모드 개수인  $n$ 이 커질 수록 그에 따라 방사 효율도 증가하는 것을 알 수 있다. 가진 주파수( $k$ )가 올라가면 다시 1의 값에 수렴해 가고 있음을 볼 수 있다.

## (2) 축방향을 고려한 원통형 음향 방사기의 방사 효율 특성

### 1) 이론에 의한 방사 효율

길이가 무한하고 축방향 속도 분포를 고려한 완전한 원통형 음향 방사기의 방사 효율은 축방향의 파동수(wavenumber)를  $k_z$ 라 할 때 다음과 같은 속도 분포로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} v(\Phi, z) &= v(\Phi) e^{jk_z z} \\ &= v_n \cos n\Phi e^{jk_z z} \end{aligned} \quad (11)$$

이에 상응하는 방사 효율은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_n(k_z) &= 0 \quad (k_z > k, \text{ 즉 } \lambda_z < \lambda \text{ 인 경우}) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{k}{k_r^2 a |H_n^{(2)}(k_r a)|^2} \\ &\quad (k_z < k, \text{ 즉 } \lambda_z > \lambda \text{ 인 경우}) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,  $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$  이다.

이 식 (12)은 축방향의 파장  $\lambda_z$ 가 음향 방사기 주위 매질에서의 파장  $\lambda$ 보다 작은 경우 소리가 방사되지 않는 반면, 주위 매질의 파장보다

축방향의 파장이 큰 경우의 음향 파워는 원거리 음장(far field)까지 방사된다는 것을 의미하고 있다.

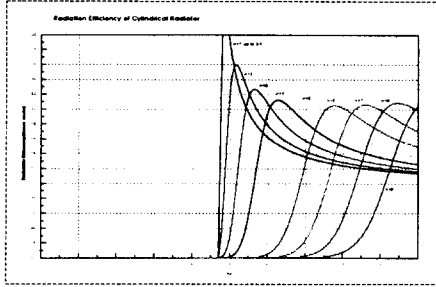


Fig. 9  
Radiation Efficiency of Theoretical Solution which considered axial direction

식 (12)에서  $k_z = 0$  이라 놓으면 식 (9)로 나타나는 것을 알 수 있다. Fig. 9는 식 (12)에 의해 구한 방사 효율을 linear scale로 도시한 것이다. 축방향 길이가 무한하다고 가정할 때 원통의 반지름은 1m, 속도 크기  $v_n = 1$  로 설정하였으며,  $k_z = 3\pi/2a$  이다. 식 (12)에서 볼 수 있듯이 가진 주파수  $k$ 가  $k_z$  보다 크게 되는 순간에 방사 효율이 급격히 증가한 후 가진 주파수가 더 증가하면서 1에 수렴해 가는 것을 볼 수 있다.

## 2) SYSNOISE를 이용한 방사 효율

축방향 길이가 긴 원통형 음향 방사기의 방사 효율을 SYSNOISE로 모의 실험을 해 보았다. 원통의 반지름  $a$ 는 축방향을 고려하지 않은 모델과 동일하게 1m로 설정하였으며 모델의 형태는 Fig. 10과 같으며, 모델의 제원은 다음과 같다.

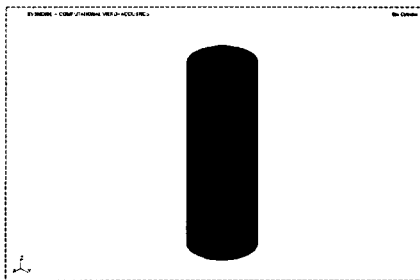


Fig. 10 Cylindrical Radiator Model

Model Size : 1m×6m (radius( $a$ )×height)

Total Number of Element : 2772

Fmaximum : 487.63 Hz

$$k_z = 3\pi/2a = 255.06 \text{ Hz}$$

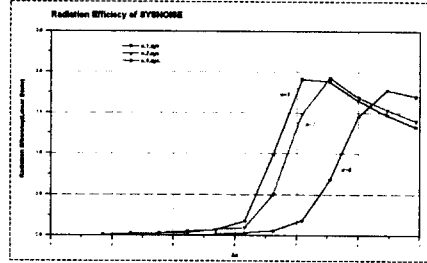


Fig. 11  
Radiation Efficiency of SYSNOISE

무한한 길이를 갖는 원통형 음향 방사기에 대한 방사 효율이므로 경계 요소 모델을 길게 만들수록 그 방사 효율이 이론해에 근접해 감을 알 수 있었다. Fig. 12는 이론에 의한 방사 효율과 SYSNOISE를 이용한 방사 효율을 비교한 것이다.

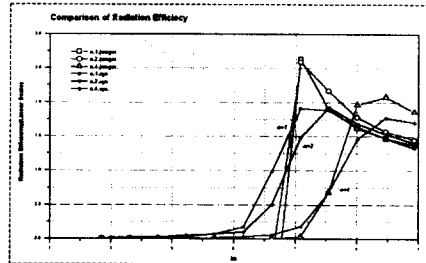


Fig. 12  
Radiation Efficiency of Theoretical solution and SYSNOISE

## IV. 강(鋼) 파이프의 방사 효율

(1) 조화 가진에 의한  
강(鋼) 파이프의 방사 효율

### 1) SYSNOISE를 이용한 방사 효율

SYSNOISE 모델의 가운데 절점 901번에 조화 가진 경계 조건을 주고 방사 효율을 구해 보았다. 방사 효율은 시간 평균, 공간 평균된 속도 분포와 음압 파워로 구할 수 있다.

SYSNOISE 모델과 해석 방법은 Table 6에 나타난 바와 같은 두 가지를 사용하였다.

Table 6 Models of SYSNOISE

	해석 방법	절점 수	모드 개수	경계 조건	Fmax(Hz)
모델 I	INDIRECT + FEM STRUCTURE	1800	50	절점 901에 1N의 힘으로 조화 가진	2776.7
					4165.0
모델 D	DIRECT COUPLED	1990	50	절점 901에 1N의 힘으로 조화 가진	2776.7
					4165.0

Fig. 14는 VARIATIONAL METHOD로 해석한 모델 I의 방사 효율과 COLLOCATION METHOD로 해석한 모델 D의 방사 효율을 보여주고 있다. 보인 바와 같이 2000Hz와 3300Hz에서 그 값이 맞지 않음을 볼 수 있는데 그 이유가 무엇인지는 아직 모르고 있다.

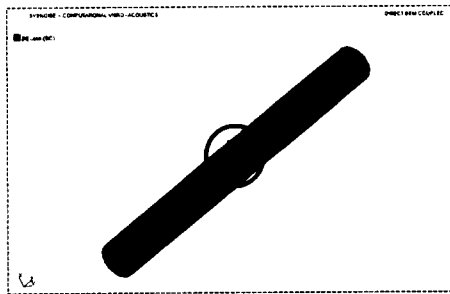


Fig. 13  
Harmonic Excitation Boundary Condition and Model I

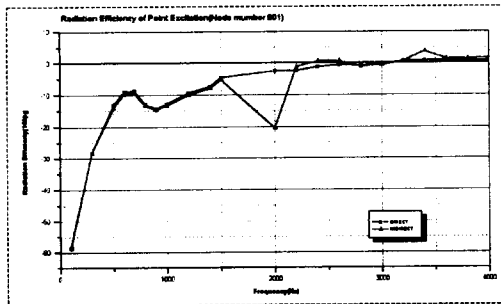


Fig. 14  
Radiation Efficiency of Model I and Model D

2) ANSYS 조화 응답을 이용한 방사 효율

앞에서 보인 해석 방법은 SYSNOISE가 갖고 있는 자체의 유한 요소 해석 모듈을 사용하여 조화 응답을 구하고 그 응답이 경계 요소 모델에 속도 경계 조건으로 입력되어 음향 해석을 하는 것이었다. SYSNOISE의 유한 요소 해석 모듈의 정확도는 다른 전용 유한 요소 해석 소프트웨어와 비교하여 크게 뒤떨어지지 않음을 볼 수 있었지만 보다 더 신뢰도가 높고, 각각의 전용 해석 소프트웨어를 통한 다양한 방법으로 앞으로 이루어질 실험을 통한 원통형 음향 방사기의 방사 효율과 비교·검증을 위해 조화 응답은 유한 요소 해석 프로그램인 ANSYS를 이용하여 구한 후 그 결과를 경계 요소 모델의 속도 경계 조건으로 입력하여 방사 효율을 계산해 보았다. 그 결과는 아래 그림과 같다.

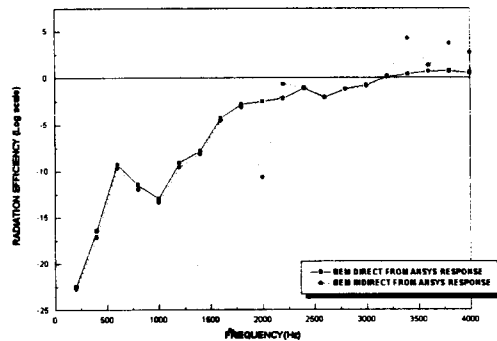


Fig. 15  
Radiation Efficiency of Steel pipe from ANSYS Harmonic Response Data

앞에서 SYSNOISE의 유한 요소 모델을 이용하여 해석한 방사 효율 그래프 Fig. 14를 보면 VARIATIONAL 방법으로 해석한 경우 2000 Hz와 3300 Hz에서 그 값이 이상하게 변화하는 것을 볼 수 있었는데 Fig. 15에서도 그와 마찬가지로 현상이 나타나는 것이 눈에 띈다. 이것은 앞서 밝힌 바와 같이 그 이유를 정확히 알지 못하고 있으므로 실험을 통한 검증이 필요할 것이다. 여기서 SYSNOISE를 이용하여 구한 방사 효율과 ANSYS와 병행하여 구한 방사 효율을 비교해 본 그래프는 Fig. 16과 같다. 저주파수 영역에서 차이를 보이고 있음을 볼 수 있다. 한가지 인지해야 할 것은 해석 주파수 구간이 서로 일치하지 않는다는 것이다. 즉, SYSNOISE만을 이용한 해석은 구간을 100 Hz로 하였고, ANSYS와 병행한 해석은 200 Hz로 하여 해석한 결과이다.

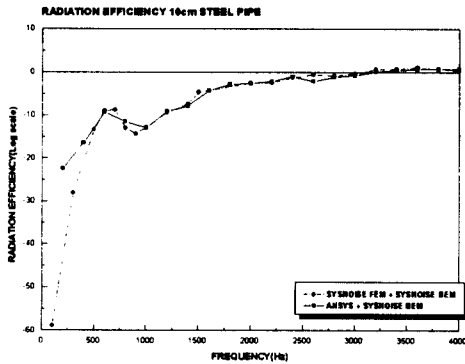


Fig. 16 Comparison of Radiation Efficiency

#### IV. 결론

앞에서 살펴본 원통형 음향 방사기의 방사 특성을 정리해 보면 다음과 같다.

1. 축방향 파동수  $k_z$ 가 주위 매질의 파동수  $k$ 보다 큰 경우, 즉 축방향 파장  $\lambda_z$ 가 매질의 파장  $\lambda$ 보다 작은 경우에는 소리의 방사가 일어나지 않는다.
2. 반경 방향 모드의 변화는 원통의 진동 에너지를 변화시켜 방사 효율을 감소시키게 된다. 즉  $n = 2$ 인 모드에서  $n = 3$ 인 모드로 바뀌는 주파수에서 방사 효율이 감소하게 된다.
3. 자유 지지 경계 조건의 원통을 임의의 힘으로 과도 진동시켰을 때 방사되는 음향은 반경

방향 모드  $n = 2$  (4-0 모드)와  $n = 3$  (6-0 모드)의 주파수 성분을 갖고 있었다. 이것은 종 (bell)의 음향 방사에 주된 영향을 미치는 반경 방향 모드와 동일하다.

지금까지 언급한 원통형 음향 방사기의 방사 효율 특성은 그 실험이 함께 수행되지 않고 단지 수치 해석 방법에 한정되어 있어 그 결과의 신뢰도가 낮고 특이한 결과(떨어지는 방사 효율)에 대한 논리적 분석이 불가능하다. 이에 원통형 음향 방사기의 방사 효율 실험을 시행하여 해석 결과와의 비교와, 보다 효과적인 방사 효율 특성 예측에 대해 연구해 보고자 한다.

#### 참고문헌

1. Miguel C. Junger, David Feit, 1994, "Sound, Structures, and Their Interaction", The MIT Press
2. L. Cremer, M. Heckle, 1988, "Structure-Borne Sound (Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies)", Springer-Verlag
3. Frank Fahy, 1985, "Sound and Structural Vibration (Radiation, Transmission and Response)", Academic Press
4. NIT, "SYSNOISE REV 5.3A User's Manual"
5. NIT, "SYSNOISE Reference Manual"
6. ANSYS, "ANSYS Dynamics User's Guide for Revision 5.2"