

탄성적층보의 진동해석을 위한 스펙트럴요소 모델

°김주홍*, 이우식**

Spectral Element Model for the Vibration Analysis of Elastic Layered Beams

Joohong Kim and U. Lee

ABSTRACT

In this paper, the axial-bending coupled equations of motion for an elastic layered beam are derived. From this equation of motion, the spectral element is formulated for the vibration analysis by use of the spectral element method (SEM). The modal analysis methodology for the present coupled field equations of motion is then developed. As an illustrative example, a cantilevered beam is considered. The correctness of the equations of motion developed herein is verified by gradually reducing the thickness of upper elastic layer to converge to the single layered elastic beam solutions. Also, the accuracy of spectral element is confirmed by comparing its results with the result by modal analysis.

1. 서론

일반적으로 복합소재는 두 가지 이상의 소재로 구성되며, 이러한 복합소재를 이용한 보 구조물의 동특성 해석은 복합소재를 이루고 있는 개별소재의 물성치로부터 계산되어진 등가물성치를 사용하여 기존의 오일러 보 모델에 대해 수행되는 경우가 대부분이다. 이러한 경우, 해석과정이 단순해지고 기존의 해석이론을 적용할 수 있는 장점이 있다. 그러나, 등가물성치를 이용한 해석은 복합소재의 특성으로부터 발생하는 연성효과를 보 구조물의 동특성 해석과정에서 완전히 반영할 수 없을 뿐만 아니라, 기존의 해석기법을 이러한 구조물에 적용할 경우 실제의 상황과는 틀린 해석을 수행할 수 있다. 그러나, 유한요소법과 컴퓨터의 발달에 따라 이러한 문제점 중에서 일부분은 해결되었다고 할 수 있으나, 근본적으로 복합소재에 대한 적절한 모델링과 이러한 모델링을 높은 정확도로 해석할 수 있는 해석기법은 많은 연구가 수행되지

않았다. 따라서, 복합소재로 구성된 보 구조물의 정확한 해석을 위해서는 복합소재의 특성을 적절히 표현할 수 있는 운동방정식과 이러한 운동방정식을 높은 정확도로 해석할 수 있는 해석기법이 요구된다.

Timoshenko⁽¹⁾는 서로 다른 재질을 가지는 두 종류의 금속을 맞붙여서 사용하는 바이메탈에 대해서 가열에 의한 보의 변형에 대한 고찰을 수행하였다. 이와 같은 유형의 문제에 대해 Hess^(2,3)는 보의 끝이나 측면에 외력이 가해질 때 일반해를 유도하였다. 탄성소재가 적층된 형태가 아닌 경우에는 탄성소재 위에 점탄성 소재를 붙여서 사용하는 경우가 가장 많이 사용되고 있다. Kerwin⁽⁴⁾은 점탄성소재의 부착에 따른 굽힘파의 감쇠특성을 고찰하였다. DiTaranto⁽⁵⁾는 유한한 길이를 갖는 점탄성 적층보에 대해서 축방향과 굽힘방향의 운동을 연성시킨 축방향 운동에 대한 6차 운동방정식을 유도하였다. Mead와 Markus⁽⁶⁾는 DiTaranto의 연구결과에 기초해서 굽힘방향으로 표현된 6차 운동방정식을 유도하였다. Lu와 Douglas⁽⁷⁾는 실험을 통해서 Mead와 Markus⁽⁶⁾의 연구결과를 검증하였다. Yan과 Dowell⁽⁸⁾은 가상일의 원리를 이용해서 보와 평판에

* 인하대학교 대학원 기계공학과

** 정회원, 인하대학교 기계공학과

적용할 수 있는 다섯 개의 식으로 이루어지는 운동방정식을 유도하였다. Rao 와 Nakara⁽⁹⁾는 축방향, 굽힘방향, 회전에 의한 관성효과를 모두 고려한 운동방정식을 유도하였다. Mead⁽¹⁰⁾는 DiTaranto⁽⁵⁾, Mead 와 Markus⁽⁶⁾, Yan 과 Dowell⁽⁸⁾의 연구결과를 비교하고 각각의 특징을 분석하였다. Bai 와 Sun⁽¹¹⁾은 비선형 굽힘변형과 적층보의 불완전한 접착면에 대한 효과를 고려하였다. Baz⁽¹²⁾는 3 층으로 구성된 적층보의 가장 위층을 압전소자로 구성한 능동적층보(Active Constrained Layer Damping : ACLD)에 대한 개념을 제안하였다. Nostrand 와 Inman⁽¹³⁾은 능동적층보에 대한 유한요소법을 적용한 해석기법을 소개하였다. 이상에서 알 수 있듯이 탄성적층보의 동특성에 대한 연구는 그리 많은 연구가 진행되지 않았다.

따라서, 본 연구에서는 적층된 보 형태의 구조물 중에서 서로 다른 물성치를 가지는 2 단 탄성적층보에 대해서 (1)운동방정식을 유도하고, (2)모달해석을 수행하였으며, (3)유한요소법의 편리함과 고주파수에서의 높은 정확도를 보장하는 스펙트럴요소법^(14,15)(Spectral Element Method : SEM)을 위한 스펙트럴요소를 개발하였다.

2. 운동방정식

Fig. 1 에 나타낸 바와 같이 위층과 아래층사이의 관계는 다음과 같다.

$$u_b = u_a - \frac{(h_a + h_b)}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

식 (1)을 이용하여, 윗 층과 아랫 층에 대한 운동 에너지와 위치에너지는 다음과 같다.

$$V_a = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_a A_a \left(\frac{\partial u_a}{\partial x} \right)^2 + E_a I_a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx$$

$$V_b = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_b A_b \left(\frac{\partial u_b}{\partial x} \right)^2 + E_b I_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx$$

$$V = V_a + V_b$$

$$T_a = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_a A_a \left\{ \left(\frac{\partial u_a}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx$$

$$T_b = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_b A_b \left\{ \left(\frac{\partial u_b}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx$$

$$T = T_a + T_b$$

식 (2)에 확장된 Hamilton 의 원리를 적용한다.

$$\int_0^L (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (3)$$

여기서, L 은 보의 길이이다. 또한, 다음과 같은 변수들을 도입하여,

$$\alpha \equiv \rho_a A_a + \rho_b A_b, \quad \varepsilon \equiv \frac{E_b A_b h}{2}$$

$$\beta \equiv E_b A_b + E_a A_b, \quad \eta \equiv E_a I_a + E_b I_b + \frac{E_b A_b h^2}{4} \quad (4)$$

$$\gamma \equiv \frac{\rho_b A_b h}{2}, \quad \tau \equiv \frac{\rho_b A_b h^2}{4}$$

운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

$$\alpha \ddot{u}_a - \beta u_a'' - \gamma \dot{w}'' + \varepsilon w'''' = 0 \quad (5)$$

$$\alpha \ddot{w} + \eta w'''' - \tau \dot{w}'' + \gamma \dot{u}_a' - \varepsilon u_a'' = 0 \quad (6)$$

$$N = \beta u_a' - \varepsilon w'' \quad (7)$$

$$M = \eta w'' - \varepsilon u_a' \quad (8)$$

$$S = -\eta w''' + \varepsilon u_a'' - \gamma \dot{u}_a - \tau \dot{w}' \quad (9)$$

3. 스펙트럴요소

운동방정식으로부터 스펙트럴요소를 유도하기 위해서 식 (5)-(6)의 분산관계(Dispersion Relation)와 모우드형상함수(Modal Shape Function)를 유도해야 한다.

우선, 운동방정식의 해를 다음과 같이 조화해로 가정한다.

$$\begin{aligned} u_a(x, t) &= u_0 e^{kx/L + i\omega t} \\ w(x, t) &= w_0 e^{kx/L + i\omega t} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)를 식(5)-(6)에 대입하여 다음과 같은 주파수와 파수(Wave Number)의 분산관계식을 구할 수 있다.

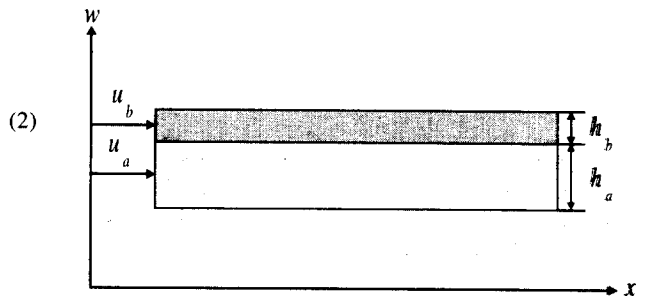


Fig. 1 Geometry of Layer Beam

$$\kappa^6 + \frac{L^2(2\gamma\epsilon - \alpha\eta - \beta\tau)\omega^2}{\epsilon^2 - \beta\eta} \kappa^4 + \frac{L^4\{\gamma^2\omega^4 + \alpha(\beta - \tau\omega^2)\}\omega^2}{\epsilon^2 - \beta\eta} \kappa^2 + \frac{L^6\alpha^2\omega^4}{\epsilon^2 - \beta\eta} = 0 \quad (11)$$

따라서, 임의의 주파수에 대한 파수는 식 (11)을 이용해서 구할 수 있다.

식 (10)의 가정된 해와 식 (11)의 해를 이용하면 모우드형상함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(x) = \sum_{i=1}^3 (B_i e^{\kappa_i x/L} + B_{2i} e^{-\kappa_i x/L}) \quad (12)$$

$$W(x) = \sum_{i=1}^3 (A_i e^{\kappa_i x/L} + A_{2i} e^{-\kappa_i x/L})$$

여기서, A_i 와 B_i 는 경계조건으로부터 구해지는 상수이다. 따라서, 식 (10)은 다음과 나타낼 수 있다.

$$u_a(x, t) = U(x) e^{i\omega t} \quad (13)$$

$$w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$$

식 (13)을 이용하여, 식 (5)~(6)의 일반해를 얻을 수 있다. 이때, A_i 와 B_i 의 관계는 다음과 같다.

$$B_i = (-1)^i \frac{(L^4\alpha\omega^2 + L^2\tau\omega^2\kappa_i^2 + \eta\kappa_i^4)}{L(L^2\gamma\omega^2 + \epsilon\kappa_i^2)} A_i \quad (14)$$

여기서, i 는 1, 2, ..., 6이다.

Fig. 2에 나타낸 자유물체도에 근거하여, 스펙트럴요소를 유도하기 위해 식 (7)~(9)와 식 (13), (14)를 이용하여 노드에서의 외력과 미지계수 A_i 의 관계를 다음과 같은 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{A}\} \quad (15)$$

같은 방법으로, 노드에서의 변위와 미지계수 A_i 의 관계를 다음과 같은 행렬식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\{\mathbf{Y}\} = [\mathbf{I}] \cdot \{\mathbf{A}\} \quad (16)$$

식 (15)와 (16)을 이용하여 미지계수 A_i 가 소거된

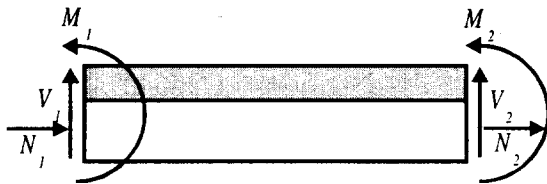


Fig. 2 Free Body Diagram

형태로 노드에서의 외력과 변위를 관계를 나타내는 스펙트럴요소를 유도할 수 있다.

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{D}] \{\mathbf{Y}\} \quad (17)$$

여기서, d_{ij} 는 일반적으로 간단한 보나 봉의 경우 이외에는 수식으로 표현하기가 어려우며, 수치적인 방법으로 처리한다.

4. 모달해석

모달해석^(16,17)을 수행하기 위해서는 고유진동수와 그에 해당하는 고유모우드를 알아야만 한다. 고유진동수는 식 (17)에 나타낸 스펙트럴요소를 이용하거나, 식 (13)와 (14)를 응용해서 계산할 수 있다. 그러나, 고유모우드는 모우드형상함수의 계수의 비로서 결정되기 때문에 적절한 정규화가 필요하다.

임의의 모우드에 대한 고유진동수를 ω_n 으로 가정하면, 식 (5)와 (6)은 식 (13)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$-\omega_n^2 \alpha U_n - \beta U_n'' + \omega_n^2 \gamma W_n' + \epsilon W_n'' = 0$$

$$-\omega_n^2 \alpha W_n + \eta W_n'''' + \omega_n^2 (\tau W_n'' - \gamma U_n') - \epsilon U_n'' = 0 \quad (18)$$

식 (18)은 식 (7)~(9)를 이용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega_n^2 (\alpha U_n - \gamma W_n') = -N_n' \quad (19)$$

$$\omega_n^2 (\alpha W_n + \gamma U_n') = M_n'' + \omega_n^2 \tau W_n'' \quad (20)$$

식 (19)와 (20)에 고유진동수 ω_n 과 다른 고유진동수 ω_m 에 대한 U_m 과 W_m 을 각각 곱하고, 부분적분을 하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m - \gamma W_n' U_m) dx = - \int_0^L N_n' U_m dx \quad (21)$$

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m) dx = \int_0^L M_n'' W_m dx + \omega_n^2 \int_0^L \tau W_n'' W_m dx \quad (22)$$

식 (21)과 (22)를 더하면 다음과 같다.

$$\omega_n^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m + \alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m - \gamma W_n' U_m) dx = - \int_0^L N_n' U_m dx + \int_0^L M_n'' W_m dx + \omega_n^2 \int_0^L \tau W_n'' W_m dx \quad (23)$$

식 (23)에서 고유진동수 ω_n 과 ω_m 을 서로 교체해서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \omega_m^2 \int_0^L (\alpha U_n U_m + \alpha W_n W_m + \gamma U_n' W_m - \gamma W_n' U_m) dx \\ &= - \int_0^L N_m' U_n dx + \int_0^L M_m' W_n dx + \omega_m^2 \int_0^L \tau W_m'' W_n dx \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)를 식 (23)에서 대해서 뺀 후, 경계조건을 이용하여 정리하면 다음과 같은 정규화된 모달함수(Modal Function)를 유도할 수 있다.

$$NM = \int_0^L \{ \alpha (U_n^2 + W_n^2) - 2\gamma U_n W_n' + \tau (W_n')^2 \} dx \quad (25)$$

식 (13)과 식 (25)를 이용하여 식 (5)와 (6)은 다음과 같은 모달식(Modal Equation)으로 나타낼 수 있다.

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{F_g}{NM} \quad (26)$$

여기서, $F_g = \int_0^L \{ N(x,t)U_n + M(x,t)W_n' + S(x,t)W_n \} dx$ 이다.

5. 수치예제

서로 다른 재질로 구성된 적층보는 축 방향과 굽힘 방향의 연성으로 인해 단일한 재질로 구성된 보와는 고유진동수나 고유모우드 등과 같은 동특성에서 상당히 다른 양상을 나타낸다. 이러한 차이점을 앞서 개발한 스펙트럴요소를 이용하여 확인하고, 모달해석을 통해서 스펙트럴요소해석을 결과를 검증하였다.

Fig. 3에 나타낸 외팔보는 아래 층의 강성, 밀도, 폭, 높이, 길이가 각각 120 MPa, 8900 Kg/m³, 0.012 m, 0.0025 m, 0.5 m 이고, 위 층의 강성, 밀도는 70 GPa, 2700 Kg/m³이며, 폭과 길이는 아래 층과 같다. Fig. 3.에서 보의 오른쪽 끝에 충격력이 가해졌을 때 적층된 보의 두께의 비에 따라 주파수응답함수(Frequency Response Function)를 구하면 Fig. 4~7과 같다. 이 때, 충격력은 0.1 초부터 0.006 초간 사

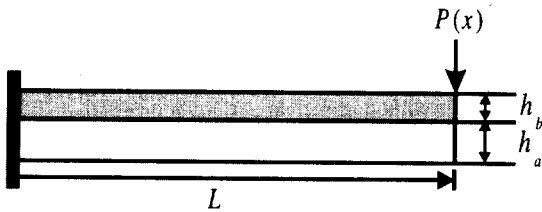


Fig. 3 Schematic of a Cantilever Beam

각과의 형태로 가진했다. Fig. 4,5에서 알 수 있듯이 축 방향의 주파수응답함수는 위 보의 두께가 얇아짐에 따라 응답의 크기가 작아지며, $r \rightarrow 0$ 따라 응답의 크기도 0으로 수렴한다. 이와 같은 현상은 외력이 굽힘 방향으로만 가해졌기 때문에, 연성효과가 감소함에 따라 축 방향의 운동이 굽힘방향의 운동과 분리되어지기 때문이다. 그러나, 굽힘 방향의 주파수응답함수는 Fig. 6,7에서 보인 바와 같이 순수한 보의 주파수응답함수로 수렴한다. 또한, Fig. 8,9에 비교된 바와 같이 모달해석에 의한 주파수응답함수보다 스펙트럴요소법의 것이 더 정확한 결과를 보여주고 있다. 이러한 결과는 모달해석이 모우드의 합으로 해를 나타내야 하기 때문에 발생한다. Fig. 10,11은 모달해석에 사용한 모우드의 수에 따른 수렴정도를 보여주고 있다. 모우드 수가 증가 함에 따라, 스펙트럴요소법의 결과값에 수렴함을 알 수 있다.

6. 결론

서로 다른 재질로 구성된 탄성 적층보에 대한 운동방정식을 유도하였다. 유도된 운동방정식에 대한 모달해석을 수행하고 스펙트럴요소를 개발하였다. 개발된 스펙트럴요소를 이용하여 동특성 해석을 수행하였고, 이 결과를 모달해석에 의한 동특성 해석 결과와 비교하여 운동방정식의 타당성과 스펙트럴요소의 정확성을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Timoshenko, S., 1925, "Analysis of Bi-Metal Thermostats," *Journal of Optical Society of America*, Vol. 11, pp. 233-256.
2. Hess, M.S., 1969, "The End Problem for a Laminated Elastic Strip - I. The General Solution," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 262-280.
3. Hess, M.S., 1969, "The End Problem for a Laminated Elastic Strip - II. Differential Expansion Series," *Journal of Composite Materials*, Vol. 3, pp. 630-641.
4. Kerwin, E.D., Jr., 1959, "Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 31, No. 7, pp. 952-962.

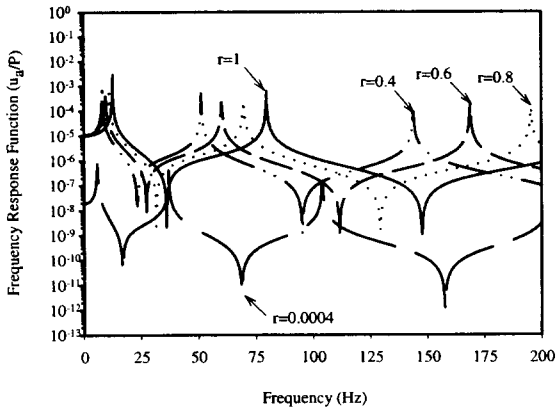


Fig. 4 Frequency Response Function of Axial Motion by Using Modal Analysis

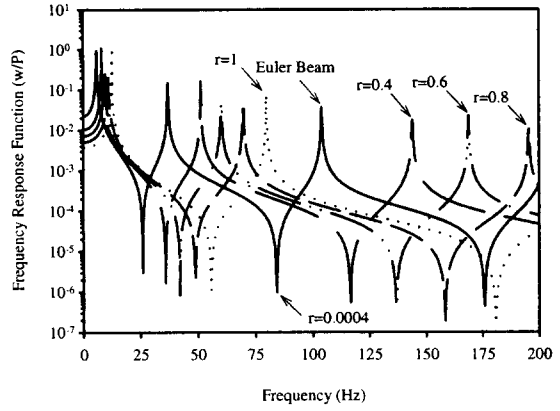


Fig. 7 Frequency Response Function of Bending Motion by Using Spectral Element Method

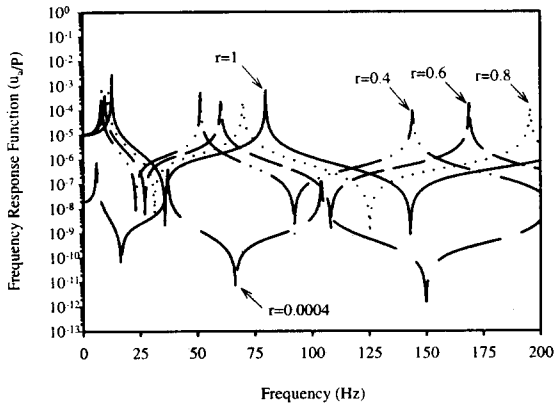


Fig. 5 Frequency Response Function of Axial Motion by Using Spectral Element Method

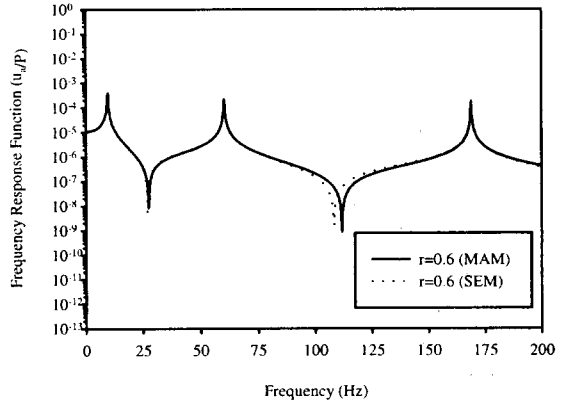


Fig. 8 Comparison of Modal Analysis and Spectral Element Method

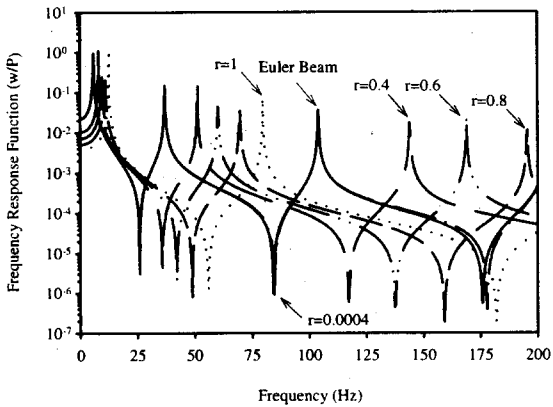


Fig. 6 Frequency Response Function of Bending Motion by Using Modal Analysis

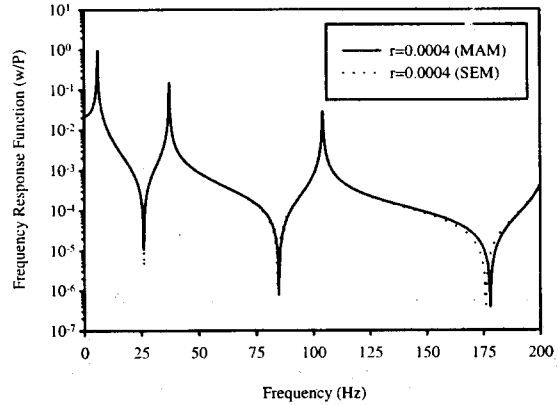


Fig. 9 Comparison of Modal Analysis and Spectral Element Method

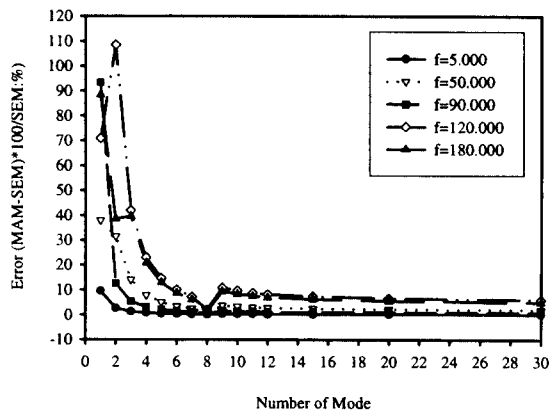


Fig. 10 Convergence Ratio for FRF of Axial Motion

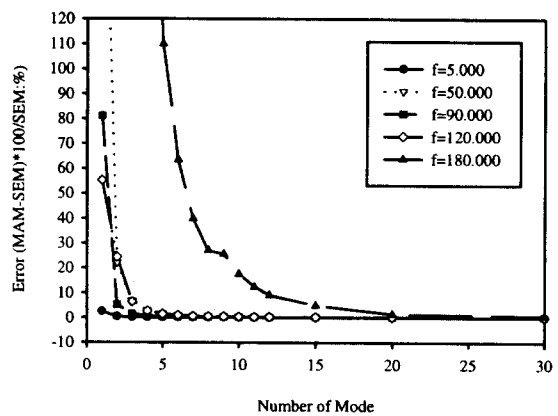


Fig. 11 Convergence Ratio for FRF of Bending Motion

5. DiTaranto, R.A., 1965, "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams," *Journal of Applied Mechanics*, December, pp. 881-886.
6. Mead, D.J. and Marks, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 10, No. 2, pp. 163-175.
7. Lu, Y.P. and Douglas, B.E., 1974, "On the Forced Vibrations of three-Layer Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 32, No. 4, pp. 513-516.
8. Yan, M.J. and Dowell, E.H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained-Layer Damping Sandwich Plates and Beams," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 1041-1046.
9. Rao, Y.V.K.S. and Nakra, B.C., 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 3, pp. 309-326.
10. Mead, D.J., 1982, "A Comparison of Some Equations for the Flexural Vibration of Damped Sandwich Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 83, No. 3, pp. 363-377.
11. Bai, J.M. and Sun, C.T., 1993, "A Refined Theory of Flexural Vibration for Viscoelastic Damped Sandwich Beams," *Proceeding of Damping '93*, Vol. 3, pp. 319-329, San Francisco, CA.
12. Baz, A., 1993, "Active Constrained Layer Damping," *Proceeding of Damping '93*, Vol. 3, pp. 187-209, San Francisco, CA.
13. Nostrand, W.C.V. and Inman, D.J., 1994, "Finite Element Model for Active Constrained-Layer Damping," *Smart Structure and Materials 1994, Passive Damping*, pp. 126-137.
14. Rizzi, S.A. and Doyle, J.F., 1992, "A Spectral Element Approach to Wave Motion In Layered Solids," *Journal Vibration and Acoustics*, Vol. 114, pp. 569-577.
15. Banerjee, J.R., 1989, "Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix for Beam Elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 1283-1298.
16. Dokumaci, E., 1987, "An Exact Solution for Coupled Bending and Torsion Vibrations of Uniform Beams Having Single Cross-Sectional Symmetry," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, No. 3, pp. 443-449.
17. Nayfeh, S.A. and Slocum, A.H., 1997, "Flexural Vibration of A Viscoelastic Sandwich Beam in Its Plane of Lamination," *Proceedings of DETC'97, 1997 ASME Design Engineering Technical Conferences*, September 14-17, 1997, Sacramento, California.