

전달강성계수법에 의한 분기형 구조물의 시간이력응답해석

문덕홍* · 강현석** · 최명수**

Time Historical Response Analysis of Tree Structure by Transfer Stiffness Coefficient Method

D. H. Moon · H. S. Kang · M. S. Choi

Abstract

This paper describes formulation for time historical response analysis of vibration for tree structure. This method is derived from a combination of the transfer stiffness coefficient method and the Newmark- β method. And This present method improves the computational accuracy of the transient vibration response analysis remarkably owing to several advantages of the transfer stiffness coefficient method. We regarded the structure as a lumped mass system here. The analysis algorithm for the time historical response was formulated for the tree structure. The validity of the present method compared with the transfer matrix method and the FEM(Finite Element Method) for transient vibration analysis is demonstrated through the numerical computations.

1. 서론

기계구조물의 기반진동에 대한 안정성을 확보하는 것은 대단히 중요한 문제이다. 이 중에서도 원자력 발전소와 화학 플랜트 등의 기기 및 배관계의 지진 시의 응답¹⁾, 항공기의 엔진 블레이드의 파손 시의 응답²⁾ 등을 파악하는 것은 대형사고의 예방과 방지의 측면에서 매우 중요시되고 있다.

이런 연구의 대부분은 실험과 시간응답 시뮬레이션 등을 병행하고 있지만, 대상으로 하는 시스템이 주로 대규모이기 때문에 주로 대형의 계산기에 의존하고 있는 실정이다.

최근의 퍼스널 컴퓨터(PC ; Personal Computer)의 발달에 따라 대형계산기에 의존했던 대규모 구조물의 계산도 PC에서 가능하게 되었다. 그런데

이런 대규모의 계산수행에 PC를 사용함에 있어 문제점으로 되는 것이 기억용량과 계산시간이다.

한편, 대상계를 이산화한 후, 시간 간격마다의 동적 응답계산에 각종 축차적분법과, 전달 매트릭스법(TMM ; Transfer Matrix Method)을 이용하는 기법이 보고되고 있다²⁾.

저자들은 전달강성계수법(TSCM ; Transfer Stiffness Coefficient Method)이라는 새로운 알고리즘을 제안하여 여러 가지 구조물에 자유진동 및 강제진동 해석에 적용하여 그 유용성을 제시하였다³⁾⁻⁶⁾.

본 연구는 분기형 구조물의 시간이력응답해석 알고리즘을 정식화하기 위한 것이다. 시간간격의 축차적분법으로는 Newmark- β 법과 공간적 해석에는 전달강성계수법의 개념을 도입하여 분기형 구조물의 중·급힘 연성 강제진동의 시간이력응답(Time historical response) 해석 알고리즘을 정식화하고, 간단한 구조물에 대한 수치실험을 통해서,

* 부경대학교 제어기계공학과

**부경대학교 산학연 협동연구센터

전달매트릭스법(TMM)과 유한요소법(FEM) 등과 비교하고, 본 해석기법의 유용성을 확인한다.

2. 전달강성계수법에 의한 해석

2.1 해석대상의 모델링

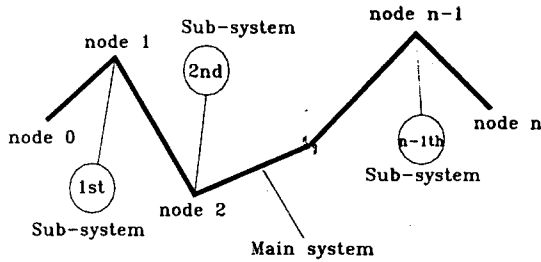


Fig. 1 Analytical model

Fig. 1은 해석 대상계를 나타낸다. 계내에 굴곡부와 분기계를 가지지만, 페루프가 존재하지 않는 구조물이고, 하나의 주계(Main system)에 여러개의 분기계(Sub system) 또는 스프링과 감쇠기로 이루어지는 기초지지 요소로 구성되어 있다. 그리고 임의의 절점에 조화 성분의 강제력이 작용한다고 가정한다. 해석 대상계는 임의의 강제력이 가해지는 부분, 기초지지 요소가 존재하는 부분, 주계와 분기계가 결합하는 부분은 반드시 절점이 되도록 분할하여 기초지지에 임의의 강제력이 작용하는 것으로 모델링한다. 편의상 계의 좌단을 절점 0, 계의 우단을 절점 n 으로 한다.

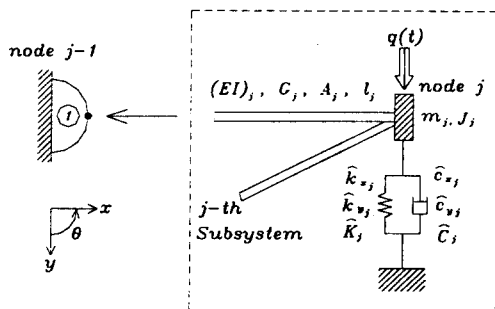


Fig. 2 Fundamental element of analytical model

Fig. 2는 Fig. 1 해석모델의 부분계의 기본요소

를 나타내고 있다. 결국 해석모델의 전체계는 이런 부분계들의 직렬결합으로 구성되어 있다. Fig. 2에서 E_j, G_j, I_j, l_j, A_j 는 j 번째 요소의 종탄성계수, 횡탄성계수, 관성 모멘트, 길이 및 면적을 나타내고, m_j, J_j 는 j 번째 집중질량의 질량, 관성 모멘트이고, $\hat{k}_{xj}, \hat{k}_{yj}, \hat{K}_j, \hat{c}_{xj}, \hat{c}_{yj}, \hat{C}_j$ 는 기초지지요소의 종방향과 횡방향의 전단 스프링상수 및 회전 스프링상수와 종방향과 횡방향의 병진감쇠계수, 회전감쇠계수를 나타낸다.

본 연구에서 사용하고 있는 기호의 의미는 다음과 같다.

(1) 상첨자 $[\sim]$ 및 $[\sim]$ 가 붙은 기호는 각각 기초지지 요소 및 분기계에 대한 물리량을 나타낸다.

(2) 상첨자 $[-]$ 가 붙은 기호는 절점 좌측의 물리량을 나타내고, 붙어 있지 않은 기호는 절점 우측의 물리량을 나타낸다.

(3) 하첨자 $[j]$ 는 절점 j 또는 j 번째 부재에 관한 물리량을 나타낸다.

2.2 축차적분법

본 논문에서 시간간격의 축차적분법으로는 Newmark- β 법을 사용하였고, 임의의 시간 t_k 에서의 가속도 벡터 $[\ddot{d}_j(t_k)]$ 및 속도 벡터 $[\dot{d}_j(t_k)]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \ddot{d}_j(t_k) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_k) - \frac{1}{\beta \Delta t^2} d_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \\ \dot{d}_j(t_k) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_k) - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} d_j(t_{k-1}) \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{d}_j(t_{k-1}) - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \ddot{d}_j(t_{k-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\ddot{d}_j(t_k) = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t_k) & \ddot{y}(t_k) & \ddot{\theta}(t_k) \end{bmatrix}_j$$

$$\dot{d}_j(t_k) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t_k) & \dot{y}(t_k) & \dot{\theta}(t_k) \end{bmatrix}_j$$

$$d_j(t_k) = \begin{bmatrix} x(t_k) & y(t_k) & \theta(t_k) \end{bmatrix}_j$$

2.3 동강성계수 및 보정벡터의 전달식

임의의 시간 t_k 에서의 절점 j 양단의 변위벡터 및 힘벡터 사이의 관계는 다음식으로 정의한다.

$$\begin{aligned}\bar{f}_j(t_k) &= \bar{S}_j \bar{d}_j(t_k) + \bar{e}_j(t_k) \\ f_j(t_k) &= S_j d_j(t_k) + e_j(t_k)\end{aligned}\quad (2)$$

여기서 \bar{S}_j , S_j 및 $\bar{e}_j(t_k)$, $e_j(t_k)$ 는 시간 t_k 에서의 강성계수 매트릭스 및 힘 보정벡터를 나타낸다.

절점 j 에서 매트릭스 형태의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}M_j \ddot{\bar{d}}_j(t_k) + C_j \dot{\bar{d}}_j(t_k) + K_j \bar{d}_j(t_k) + \\ \bar{f}_j(t_k) - f_j(t_k) = q_j(t_k)\end{aligned}\quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned}M_j &= \text{diag} [m_x \quad m_y \quad J]_j \\ C_j &= \text{diag} [\hat{c}_x \quad \hat{c}_y \quad \hat{C}]_j \\ K_j &= \text{diag} [\hat{k}_x \quad \hat{k}_y \quad \hat{K}]_j \\ q_j(t_k) &= {}^t [q_x(t_k) \quad q_y(t_k) \quad q_\theta(t_k)]_j\end{aligned}\quad (4)$$

식(1)과 식(3)로부터,

$$P_j d_j(t_k) = Q_j(t_k) + f_j(t_k) - \bar{f}_j(t_k) \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned}P_j &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} M_j + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \hat{C}_j + \hat{K}_j \\ Q_j(t_k) &= q_j(t_k) - M_j H_{aj}(t_k) - \hat{C}_j H_{wj}(t_k)\end{aligned}\quad (6)$$

식(6)에서 $H_{aj}(t_k)$ 및 $H_{wj}(t_k)$ 는 시간 t_{k-1} 에서의 변위, 속도, 가속도로 결정되는 벡터이고, 시간 t_k 에서는 기지의 양이다.

$$H_{aj}(t_k) = -\frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot$$

$$\left\{ d_j(t_{k-1}) + \Delta t \dot{d}_j(t_{k-1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{d}_j(t_{k-1}) \right\}$$

$$\begin{aligned}H_{wj}(t_k) &= \dot{d}_j(t_{k-1}) + \\ &\Delta t \cdot \{ (1-\gamma) \ddot{d}_j(t_{k-1}) + \gamma H_{aj}(t_k) \}\end{aligned}\quad (7)$$

절점 $j-1$ 의 좌측에서 절점 j 까지의 힘과 변위의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_j(t_k) \\ f_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} d_j(t_k) \\ d_{j-1}(t_k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$\begin{aligned}A_j &= F_j, & B_j &= -F_j L_j^t \\ C_j &= L_j F_j, & D_j &= -L_j F_j L_j^t\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}F_j &= \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{1}{GKA} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}_j^{-1} \\ L_j &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix}_j\end{aligned}\quad (10)$$

식(2)와 식(8)의 관계로부터 다음과 같은 필드 전달식을 구한다.

$$\begin{aligned}\bar{S}_j &= A_j + B_j V_j \\ \bar{e}_j(t_k) &= -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) \\ (j &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned}G_j &= S_{j-1} - D_j, \\ V_j &= G_j^{-1} C_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (12)$$

절점 j 의 좌측에서 절점 j 의 우측으로 전달하는 포인트 전달식을 구하기 위해 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$S_j = \bar{S}_j + P_j$$

$$e_j(t_k) = \bar{e}_j(t_k) - Q_j(t_k) \quad (13)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

식(11)과 식(13)의 관계에 의해 필드·포인트 전달식을 구할 수 있다.

$$S_j = A_j + B_j V_j + P_j$$

$$e_j(t_k) = -B_j G_j^{-1} e_{j-1}(t_k) - Q_j(t_k) \quad (14)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

강성계수 매트릭스 및 보정 벡터의 식은 전달식의 형태로 정리되어 있기 때문에, 계산을 시작하는 절점 0에서의 동강성계수 및 보정 벡터 S_0 와 e_0 를 구해야 한다.

Fig. 1에서와 같이 계의 좌단의 경계조건 ($\bar{f}_0 = 0$)과 식(2)와 식(5)의 관계로부터

$$S_0 = P_0$$

$$e_0(t_k) = -Q_0(t_k) \quad (15)$$

그러므로 식(14)와 식(15)으로 계의 좌단에서 우단까지의 강성계수와 보정벡터를 연속적으로 계산할 수 있다.

2.6 좌표변환

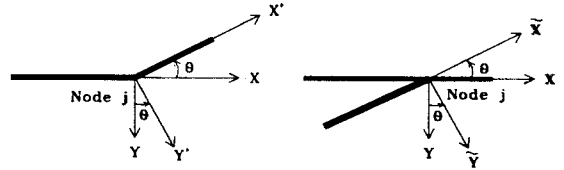
Fig. 3 (a)와 같이 굴곡부와 분기계가 있는 경우 R_j 를 사용하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$d_j(t_k) = R_j d_j'(t_k), \quad f_j(t_k) = R_j f_j'(t_k)$$

$$R_j = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_j \quad (16)$$

식(16)과 전달강성계수법의 기본식인 식(2)의 관계로부터 다음의 식을 구한다.

$$S_j' = {}^t R_j S_j R_j, \quad e_j'(t_k) = {}^t R_j e_j(t_k) \quad (17)$$



(a) Crooked point (b) Connection of subsystem

Fig. 3 Coordinate transformation at node j

2.7 분기계에 대한 취급

분기계의 좌단으로부터 우단, 즉 주계와 결합하는 단으로 2.3절의 전달계산을 행하면 우단(주계의 절점 j)에서는 다음의 관계가 성립한다.

$$\tilde{f}_j(t_k) = \tilde{S}_j d_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k) \quad (18)$$

$$= \tilde{P}_j d_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k)$$

여기서 $\tilde{f}_j(t_k)$ 는 분기계 우단의 힘벡터이고 주계가 분기계로부터 받는 반력벡터로 볼 수 있고, 방향은 $\bar{f}_j(t_k)$ 와 동일하다. 따라서 분기계가 존재하는 절점에서 식(5)는 다음식과 같이 변경된다.

$$(P_j + \tilde{P}_j) d_j(t_k) = Q_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k) + f_j(t_k) - \bar{f}_j(t_k) \quad (19)$$

식(19)에서 $(P_j + \tilde{P}_j)$ 및 $Q_j(t_k) + \tilde{e}_j(t_k)$ 를 새로운 P_j 및 $Q_j(t_k)$ 로 정의하면 분기계가 없는 경우와 동일하게 계산을 할 수 있다.

2.8 상태량 벡터의 전달

계의 우단의 경계조건 ($f_n = 0$)과 식(2)로부터

우단의 변위벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{d}_n(t_k) = -\mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{e}_n(t_k) \quad (20)$$

식(20)으로부터 구한 \mathbf{d}_n 과 식(2), 식(5), 식(8)로부터 계의 우단에서 좌단까지의 상태벡터를 다음식으로부터 연속적으로 계산할 수 있다.

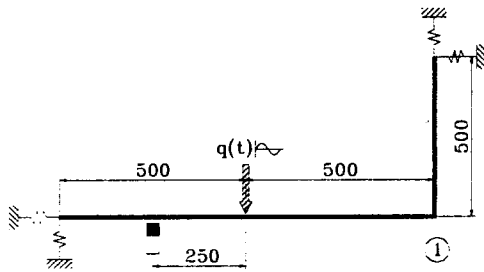
$$\mathbf{d}_{j-1}(t_k) = \mathbf{V}_j \mathbf{d}_j(t_k) - \mathbf{G}_j^{-1} \mathbf{e}_{j-1}(t_k) \quad (21)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

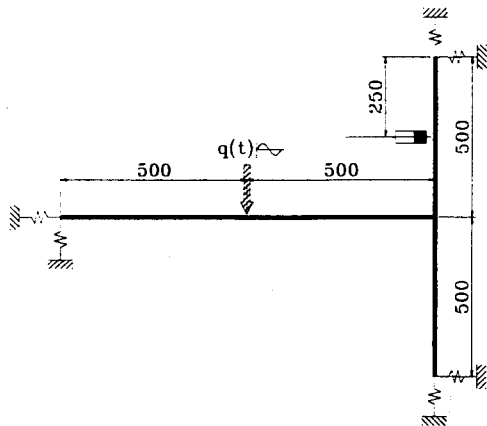
3. 수치계산 결과 및 검토

본 장에서는 2장에서 정식화한 알고리즘을 토대로 하여 실제 수치계산 모델에 적용한다. 축차적분의 차분상수는 $\beta=1/4$, $\gamma=1/2$ 로 대입하였다.

3.1 수치실험 모델



(a) Model 1



(b) Model 2

Fig. 4 Analytical model

해석대상으로 한 구조물은 Fig. 4와 같이 두가지 모델을 대상으로 하였다.

Fig. 4에서 구조물의 전체길이는 1.5 m, 직경 10 mm의 강재 중실축이고, 기초지지 및 강제력이 존재하는 부분에는 반드시 절점이 되도록 하여 0.5 m씩 부재를 3개로 분할하여 직렬결합하였다.

그리고 각 부재는 동일하게 10개의 집중질량으로 이산화하였다. 기초지지요소는 스프링에 의해 기초로부터 지지되고 있는 것으로 모델링하였다.

그리고 강제력은 그림과 같이 좌단으로부터 0.5m인 지점에 조화 강제력 $q_y(t) = q \cos \omega t$ ($q = 10$, $\omega/2\pi = 20$ [Hz])을 가하는 것으로 한다. 그리고 시간간격 Δt 는 강제외력의 주기를 분할수 n 개로 등분할하는 것으로 한다.

3.2 수치실험 결과 및 검토

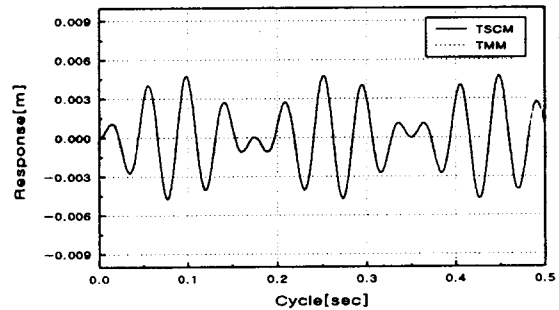


Fig. 5 Time response of model 1

Fig. 5는 모델 1을 대상으로 하여 수치계산한 결과로서, Fig. 4 (a)와 같이 양단에 전단 스프링 ($k_x=k_y=10^{10}$ [N/m])으로 기초지지되어 있고, 회전 스프링과 감쇠의 값은 모두 0으로 하였다. 그리고 시간간격은 1주기를 100등분 하여, 구조물의 좌단으로부터 0.25 m인 위치에서 전달강성계수법과 전달매트릭스법으로 10주기까지의 응답을 나타낸 그림으로 두 기법이 일치하는 결과를 나타내고 있다.

Fig. 6은 모델 1에서 ① 이라고 표시된 부분에, 양단에 설치된 스프링과 동일한 스프링으로 지지하고 있는 경우를 나타낸다. Fig. 5와 동일한 조건으로 하여 1주기를 300 등분의 시간간격으로 나누었을 경우에 대한 전달강성계수법과 전달매트릭스

법의 결과를 나타낸다.

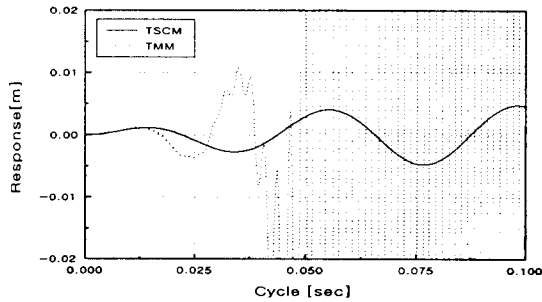


Fig. 6 Time response of model 1

그림에서와 같이 전달강성계수법으로 계산한 결과는 안정한 결과를 나타내는 반면에, 전달매트릭스로 계산한 결과는 시간이 증가할수록 정상적인 응답을 얻을 수 없음을 알 수 있다.

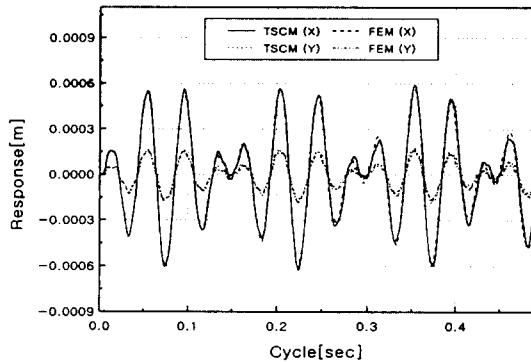


Fig. 7 Time response of model 2

Fig. 7은 모델2를 대상으로 하여 수치계산한 결과를 나타낸 것으로서, 그림과 같이 기초지지 스프링($k_x=k_y=10^5$ [N/m])으로 지지되어 있고, 회전 스프링과 감쇠값은 모델 1에서와 마찬가지로 0으로 하여 기초지지되어 있는 구조물의 우측상단으로부터 0.25 m인 지점에서 응답을 얻었다. 이 때 전달강성계수법과 유한요소법으로 1주기를 100 등분하여 응답을 계산한 그림이다. 그림에서와 같이 두 기법이 비교적 잘 일치하고 있다.

이상의 결과로부터 보다 정확한 결과를 얻기 위해 전달강성계수법은 시간간격을 작게 설정해도 유용한 응답을 얻을 수 있었던 반면에, 전달매트릭

스법의 경우에는 계 내부에 중간지지기가 있거나, 시간간격을 작게 설정하면 계산불능이 될 수 있음을 확인할 수 있었다.

4. 결론

본 연구에서는 PC에 적합한 분기형 구조물의 진동해석에 대한 시간이력응답 해석기법을 제시하였다.

이 기법은 공간상의 전달개념은 전달강성계수법에 시간이력응답은 축차적분법을 적용하여 새로운 알고리즘을 정식화하였다.

간단한 수치실험을 통해서 시간응답 계산을 수행한 결과, 전달매트릭스법의 결과는 계 내부에 중간지지기가 있거나, 엄밀한 해를 구하기 위해 시간간격을 작게 설정하여 계산을 수행했을 경우에 정확한 계산을 수행할 수 없었던 반면에, 전달강성계수법의 결과는 정확한 계산을 수행하여 안정된 결과를 얻을 수 있었다.

참고문헌

1. 浪田方郎·川畑淳一·市橋一郎·福田俊彦, "彈塑性ダンパ支持配管系の耐震設計手法の開発", 日本機械學會論文集(C編), 61卷590号, pp. 3881~3888, 1995
2. 小林正生·山内進吾·大鍋壽一·船渡川治, "ブレード破損時の回傳軸系の非線型過渡應答解析", 日本機械學會論文集(C編), 59卷557号, pp. 85~92, 1993
3. 문덕홍·최명수·홍승수, "강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 진동해석 기법", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 316~321, 1996
4. 문덕홍·최명수, "강성계수의 전달에 의한 보형 구조물의 강제진동 해석", 한국박용기관학회 추계학술강연회 초록집, pp. 128~234, 1996
5. 문덕홍·최명수·강화중·강현석, "강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 자유진동 해석", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 169~175, 1997
6. 문덕홍·최명수·강화중·강현석, "동강성계수의 전달에 의한 격자형 구조물의 강제진동 해석", 대한기계학회 부산지부 춘계학술대회 논문집, pp. 242~246, 1997