

불완전 모우드 변수를 이용한 구조물 결합부 변수 규명 방법의 개선

홍성욱¹

An Improved Identification Method for Joint Parameters in Structures with Incomplete Modal Parameters

Seong-Wook Hong

ABSTRACT

The present paper improves the direct identification scheme based upon the equation error formulation with incomplete modal data. First, an indirect estimation technique is considered for estimating unmeasured elements of latent vectors by the combined use of a model and measured incomplete eigen vectors. It is used for estimating the other elements of eigen vectors, which are essential for identification but not available. Next, an index is introduced here to indicate the quality of estimation with respect to the mode and the measured positions. A sensitivity formula for eigenvalues with respect to the unknown joint coefficient is also derived to select the modes appropriate for identification. An identification strategy is suggested to meet with practical problems with the help of the index and sensitivity formula. The index and the sensitivity are proved to be useful for selecting measurement positions and modes appropriate for identification. A comprehensive simulation study is performed to test the proposed method.

1. 서론

구조물의 결합부는 전체의 동특성에 크게 영향을 주는 중요한 부분이나 대체로 모델링이나 특성 규명이 어렵다. 또한 결합부의 특성이 결합방법이나 결합위치 등에 크게 의존하기 때문에 결합요소만의 단독 특성 분석은 결합상태에서의 특성과 큰 차이를 보일 수 있다. 따라서 구조물에 결합된 상태에서의 특성 규명 방법이 필요하다.

동적 매개변수에 대한 구조물 상태에서의 직접 규명 방법으로서 모우드 매개 변수를 이용한 직접 규명법[1-3]은 규명과정의 매우 단순하고 물리적 의미 파악이 용이하기 때문에 큰 관심을 끌어 왔다. 이 방법에서는

유한요소모델 등, 일반적인 모델로부터 측정좌표만으로 표현되는 압축된 모델을 유도하여 미지 변수와 측정된 모우드 매개 변수간의 직접 관계를 도출하여 규명하는 방법이다. 그러나 이 방법은 두 가지의 문제점을 갖고 있다. 즉, 모델 압축 과정에서 발생할 수 있는 오차의 영향과 모우드 별로 얻어지는 규명결과의 차이이다. 초기에 Yuan 등[1]은 압축 모델을 사용할 것을 제안하였으며 계속해서 Kim 등[2,3]은 측정 모우드에 대한 최소 오차 자승법의 도입을 제안하였다. 그러나 최소오차 자승법을 사용할 경우 압축 모델에 의한 오차로 인해 수렴하지 않았으며 신뢰도가 다른 측정 결과를 단순히 최소 오차 자승법을 통해 평균적인 결과를 얻는 것이 부적합할 수 있다.

¹ 금오공과대학교 기계공학부

본 연구에서는 매개변수 직접 규명법에 있어서 앞서 제기한 두 가지의 문제점을 개선하는 방안을 제안하였다. 먼저, 매개변수 규명에 필요하나 측정이 불가능한 응답을 간접적으로 계산하는 방법을 도입하여 근사화에 따른 오차를 회피하도록 하였다. 또한 해석적인 분석을 통해 이와 같은 간접 계산법의 오차에 대한 강건성을 평가하는 방법을 제안하였고 이에 근거하여 특성지수를 정의하였다. 또한 미지 매개변수에 대한 모우드 민감도 식을 유도하였다. 정의된 특성지수와 모우드 민감도식은 미지 매개변수 규명에 가장 적절한 측정 위치와 모우드를 선정하는데 활용하도록 하였다. 제안한 방법의 타당성을 검증하기 위해 두개의 예제를 예시하였다.

2. 운동 방정식

그림 1과 같이 결합부를 포함하는 구조물의 운동방정식은 라플라스 영역에서 다음과 같이 표현된다.

$$\{D_o(s) + D_J(s)\}q(s) = f(s) \quad (1)$$

여기서

$$D_o(s) = s^2M_o + sC_o + K_o, \quad D_J(s) = s^2M_J + sC_J + K_J$$

또한 $q(s)$ 및 $f(s)$ 는 각각 좌표벡터 및 대응되는 힘 벡터이다. 하첨자 "o"는 구조물을, M_o, C_o 및 K_o 는 각각 질량, 감쇠 및 강성 행렬을 나타내며 여기서는 대칭으로 가정한다. 또한 M_J, C_J 및 K_J 는 결합부의 질량, 감쇠, 강성행렬을 나타낸다.

다음과 같은 벡터변환 관계를 정의하면 진행될 수식 유도에서 유용하게 활용된다.

$$\begin{aligned} q_n &= T_n \quad q, & q_{\bar{n}} &= T_{\bar{n}} \quad q \\ q_m &= T_m \quad q, & q_{\bar{m}} &= T_{\bar{m}} \quad q \end{aligned}$$

여기서 $q_n, q_{\bar{n}}, q_m$ 및 $q_{\bar{m}}$ 은 결합부에 관련된 좌표벡터, 결합부에 관련되지 않은 좌표벡터, 측정좌표벡터 및 미측정 좌표 벡터를 의미한다. 또한

$T_n, T_{\bar{n}}, T_m$ 및 $T_{\bar{m}}$ 은 하첨자에 대응되는 벡터를 추출하기 위한 변환행렬로서 1과 0인 요소로 구성된다. 결합요소만으로 구성된 행렬은 성긴 행렬이 되므로 다음과 같이 압축이 가능하다.

$$D_J^c(s) = T_n D_J(s) T_n^c \quad (2)$$

여기서 상첨자 c 는 $n \times n$ 의 크기를 갖는 압축 행렬이다.

식(1)에 대응되는 고유치 문제는 아래와 같이 쓸 수 있다 [4].

$$\{D_o(\lambda) + D_J(\lambda)\}u = 0 \quad (3)$$

여기서 λ 는 고유치, u 는 대응되는 고유 벡터이다. 이와 같이 주어진 고유벡터는 다음과 같이 정규화 될 수 있다 [4].

$$\begin{aligned} u_i^c \{2\lambda_k (M_o + M_J) + (C_o + C_J)\}u_k &= \delta_{ik}, \\ i, k &= 1, 2, \dots, 2N \end{aligned} \quad (4)$$

3. 변수 규명 방법

직접 규명법은 미지 변수가 모우드 변수에 의해 직접 표현되는 방법으로 모델에 포함된 모든 모우드 벡터 요소가 측정 가능해야 한다. 이와같은 문제점을 극복하기 위해 단순화(Condensed)된 모델을 사용하여 측정된 자유도만이 모델에서 고려되도록 하였는데 [1-3], 이 단순화 과정은 필연적으로 일정 이상의 오차를 발생시키게 되었다. 본 절에서는 측정되지 않은 자유도에 대한 간접적인 평가방법을 도입하였다.

3.1 고유벡터 미측정 요소의 계산

k 번째 모우드에 대한 고유치 문제를 고려한다. $T_{\bar{n}}$ 를 고유치 문제의 좌측에 곱하면 다음과 같다.

$$T_{\bar{n}} D_o(\lambda_k) u_k = 0 \quad (5)$$

식(5)에서 측정요소와 미측정 요소를 분리하고 정리하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D_{\bar{n}m}(\lambda_k) & D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k,m} \\ u_{k,\bar{m}} \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

여기서

$$D_{\bar{n}m}(\lambda_k) = T_{\bar{n}} D_o(\lambda_k) T_m^t, \quad D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k) = T_{\bar{n}} D_o(\lambda_k) T_{\bar{m}}^t, \\ u_{k,m} = T_m u_k, \quad u_{k,\bar{m}} = T_{\bar{m}} u_k$$

결과적으로 k 번째 고유벡터에서 측정되지 않았던 요소는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$u_{k,\bar{m}} = -[D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k)]^L D_{\bar{n}m}(\lambda_k) u_{k,m}, \quad k=1,2,\dots,r \quad (7)$$

여기서 r 은 실험에서 고려한 모드 개수이며 상점자 L 은 일반화된 좌측 역행렬을 의미한다.

3.2 변수 규명식

k 번째 모드에 대한 고유치 문제에 행렬 T_n 을 좌측에 곱하면 다음과 같다.

$$T_n D_o(\lambda_k) u_k + T_n D_j(\lambda_k) u_k = 0 \quad (8)$$

식(2)를 이용하여 식(8)을 단순화시키면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$D_j^o(\lambda_k) u_{k,n} = p_{k,n}, \quad k=1,2,\dots,r \quad (9)$$

여기서

$$p_{k,n} = -E u_{k,m}, \quad u_{k,n} = T_n u_k$$

또

$$E = \{D_{nm}(\lambda_k) - D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k) [D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k)]^L D_{\bar{n}m}(\lambda_k)\}$$

한편 $u_{k,n}$ 은 결합부 위치에서의 요소로 이루어진 벡터이며 $u_{k,\bar{m}}$ 으로부터 얻을 수 있다.

결합부가 일정한 강성과 감쇠값을 갖는다고 가정하고 식(9)를 미지항과 알려진 항을 재배치하여 다음과 같이

쓸 수 있다.

$$G_k U = P_k \quad (10)$$

여기서 U 는 미지요소만을 포함하는 벡터이며 G_k 와 P_k 는 $u_{k,n}$ 및 $p_{k,n}$ 으로부터 구성된 행렬이다. 제 1 형의 결합부이면서 좌표간 상호 연성향이 없는 결합부의 경우에는 다음과 같이 각 미지수에 대한 직접 관계식을 얻을 수 있다.

$$d_i = U_i(\lambda_k) = \frac{p_{k,n_i}}{u_{k,n_i}}, \quad i=1,2,\dots,n_j \quad (11)$$

여기서 U_i 는 U 의 i 번째 요소이며 n_j 는 규명 되어야 할 결합요소의 개수이다. 식(11)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$k_i = \text{Re}\{U_i(\lambda_k)\} - \frac{\sigma_k}{\omega_k} \text{Im}\{U_i(\lambda_k)\} \quad (12)$$

$$c_i = \frac{1}{\omega_k} \text{Im}\{U_i(\lambda_k)\} \quad (13)$$

$$k=1,2,\dots,r \quad \text{그리고} \quad i=1,2,\dots,n_j$$

4. 매개변수 규명 방법의 개선

직접 규명법은 선형식을 제공하지만 측정이나 모델링 오차 등이 있는 경우, 최소 오차 자승법을 이용하면 큰 오차를 유발할 수 있다는 것이 알려져 있다 [5]. 따라서, 본 논문에서는 최소 오차 자승법의 사용을 피하고 보다 신뢰성 높은 결과를 얻을 수 있는 방법을 제안하도록 한다.

4.1 측정오차가 계산에 미치는 영향

측정된 고유벡터 각 요소들의 분산(variance) 모두 σ^2 라 가정하면 간접 계산된 고유벡터 요소에 대한 분산은 다음과 같이 얻어진다.

$$\sigma_u^2 = E[\{\delta u_{k,\bar{m}}\}^2] = (A_{k,i} \cdot A_{k,i}) \sigma^2 \quad (14)$$

여기서 $A = -[D_{\bar{n}\bar{m}}(\lambda_k)]^L D_{\bar{n}m}(\lambda_k)$ 이며 σ_u^2 와 $A_{k,i}$

는 k 번째 모우드 벡터에서 $A(\lambda_k)$ 의 i 번째 행 및 이 행에 의해 계산된 고유벡터 요소의 분산을 의미하며 (·)는 내적을 나타낸다. 여기서 σ_u^2 는 $(A_{k,i} \cdot A_{k,i})$ 에 비례하는 것을 알 수 있다. 따라서 다음과 같은 지수를 정의하는 것이 편리하다.

$$I_i^n(\lambda_k) = \frac{1}{(A_{k,i} \cdot A_{k,i})}, \quad i=1,2,\dots,n_k \quad (15)$$

여기서 n_k 는 계산된 요소의 개수이다. 식(15)로부터 만일 $I_i^n(\lambda_k)$ 이 1보다 크면 측정된 모우드 벡터 요소의 분산 보다 계산된 요소의 분산이 통계적 관점에서 더 작음을 의미하게 된다.

4.2 미지변수에 대한 고유치의 민감도

k 번째 모우드에 대한 다음과 같은 고유치 문제를 다시 생각해 보자.

$$\{D_o(\lambda_k) + D_j(\lambda_k)\}u_k = 0 \quad (16)$$

미지수 φ 에 대해 편미분을 취하고 고유벡터에 대한 직교성을 이용하여 식을 간단히 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \varphi} = -u_k^t \left\{ \lambda_k^2 \frac{\partial M_j}{\partial \varphi} + \lambda_k \frac{\partial C_j}{\partial \varphi} + \frac{\partial K_j}{\partial \varphi} \right\} u_k \quad (17)$$

따라서, α 행 β 열의 미지 결합요소에 대한 민감도는 다음과 같이 얻어진다.

$$(i) \text{ 질량 요소 : } \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varphi} = -\lambda_k^2 u_{k\alpha} u_{k\beta} \quad (18a)$$

$$(ii) \text{ 감쇠 요소 : } \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varphi} = -\lambda_k u_{k\alpha} u_{k\beta} \quad (18b)$$

$$(iii) \text{ 강성 요소 : } \frac{\partial \lambda_k}{\partial \varphi} = -u_{k\alpha} u_{k\beta} \quad (18c)$$

이와 같은 민감도는 변수 규명에 적합한 모우드를 결정하는 데 매우 유용하다. 한편, 민감도를 계산하기 위해서는 고유벡터에 대한 적절한 보정이 선행되어야 한다. 이를 위해서는 가진 위치에서 측정된 주파수

응답함수(driving point FRF)에서 얻어진 요소를 기준으로 보정되어야 한다.

4.3 변수 규명 방법 개선을 위한 전략

변수 규명의 신뢰성을 향상시키기 위해 본 연구에서는 측정 가능한 위치 중 가장 신뢰성이 높은 측정점의 조합과 미지 변수에 가장 민감한 모우드를 선택하는 방법을 제안한다. 변수 규명 전략은 다음과 같이 요약할 수 있다.

- (1) 결합부에서의 응답을 계산하는데 가장 적합한 측정위치 조합을 선택한다. 이 과정에는 각 모우드 별로 $I_i^n(\lambda_k)$ 를 계산한다. 각 모우드 별로 서로 다른 조합을 택해도 무방하다.
- (2) 식 (18a)-(18c)을 이용하며 미지 변수에 대한 민감도를 계산한다. 이를 통해 미지 변수에 대해 가장 민감한 모우드를 선정한다.
- (3) 식(11)을 이용하여 미지변수를 규명한다.
- (4) 규명된 결합부 변수를 모델에 대입하여 고유치 문제를 푼다. 계산된 고유치와 실험치와의 비교를 통해 결과의 적합성을 파악한다. 적합하지 않으면 (2)단계에서 다음 순위의 민감 모우드를 선택하여 다음 과정을 진행한다.

만일 관심 주파수 영역에 있는 모든 모우드에 대해 미지 변수가 민감하지 않다면 미지 변수를 규명하는 것은 매우 어려워진다. 그러나 이것은 바꾸어 말하면 해당되는 결합부의 동특성이 구조물에 큰 영향을 미치지 못함을 의미하기도 한다. 따라서 이러한 경우에는 결합부에 대한 엄밀한 동특성 파악이 큰 의미를 갖지 못한다.

5. 수치실험

5.1 예제 1: 단순 5 자유계 [3]

단순화된 모델을 이용한 직접 규명법[1-3]이 변수 규명 과정을 간편하게 하지만 필연적으로 오차를 수반하게 된다. 본 예제에서는 기존의 방법에 의한 변수 규명 과정의 문제점에 대해 설명하도록 한다. 변수 규명은 참고문헌 [3]에서 제안된 방법을

적용하였다. 그림 1은 측정점의 수와 고려한 모우드의 수를 변화시켰을 때 얻어진 결과의 오차를 보여주고 있다. 측정점의 수가 적을 경우, 심각한 오차가 발생됨을 알 수 있다. 또한 고려한 모우드의 수에 따라 수렴하지 않는 것을 알 수 있다. 이와 같은 문제점은 모델링 오차에 기인한 자체적인 오차 요인에 밀접한 관계가 있다.

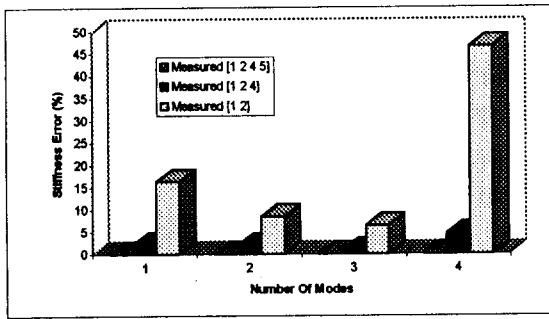


Fig. 1 Percent error for the identified stiffness coefficients with changing numbers of measurements and modes in the conventional method

기존의 방법과는 달리 제안한 방법은 측정 오차가 없는 조건에서는 다른 요인에 의한 오차가 발생하지 않기 때문에 본 예제에서는 모든 경우에서 오차가 전혀 없었다.

5.2 예제 2: 2 개의 스프링으로 지지된 단순 보

예제에서 사용한 대상 시스템은 12 개의 요소로 모델링 된 균일 보로서 3,8 번 질점에 스프링이 위치해 있다. 스프링의 강성계수를 규명하는 문제이며 5 개의 모우드 만이 측정 가능하며 1,4,9 및 13 에서 측정이 가능한 것으로 가정한다. 먼저 $I_i^n(\lambda_k)$ 를 점검하여 각 모우드 별로 가장 좋은 측정 위치 조합을 선정하였다. 표 1 과 2 는 측정 위치의 몇가지 조합에 대해 지수들을 보여 주고 있다. 대체로 처음 3 가지의 조합이 다른 조합에 비해 좋은 값을 가지고 있는 것을 알 수 있다. 따라서, 복잡성을 피하기 위해 처음 3 가지 조합만을 사용하여 결과를 분석하도록 한다. 표 3 은 이상적인 고유벡터와 여기에 -0.05 부터 $+0.05$ 사이의 난수를 포함한 고유벡터를 보여 주고 있다.

Table 1. Index factor I^n for the response at the first spring with different combinations of measurement positions among available measurement positions

Measured positions	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1,4,9,13	1.2886	1.5479	1.7678	1.7304	1.2147
1,4,13	1.6792	1.7198	1.9375	2.7305	1.5625
1,3	1.5703	0.4095	0.0006	2.2142	4.3897
1,9,13	1.3949	0.5377	0.1702	0.4218	1.6198
1,9	1.3117	0.8851	0.3033	1.0806	0.2539
4,13	0.7837	0.2268	0.2054	1.1333	0.4489
4,9,13	0.5265	0.1948	0.0508	1.2327	0.3425

Table 2. Index factors I^n for the response at the second spring with different combinations of measurement positions among available measurement positions

Measured positions	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1,4,9,13	1.0769	1.2758	1.3581	0.7882	1.2235
1,4,13	0.5206	1.2766	1.1469	2.2198	1.4179
1,3	7.4132	0.2416	0.0007	5.7119	5.8449
1,9,13	0.8159	0.5935	0.3675	0.4869	0.6677
1,9	5.0031	0.5684	0.4054	3.3029	0.3318
4,13	3.6979	0.4754	3.0081	1.3371	0.6125
4,9,13	0.9559	0.7329	0.5753	0.6452	0.7888

Table 3. Measured eigen vectors

Mode	Node 1	Node 4	Node 9	Node 13
1	0.1049 (0.0711)*	-0.1466 (-0.0986)	0.5650 (0.5469)	2.4415 (2.4535)
2	1.8301 (1.7969)	-0.6997 (-0.7000)	-0.8069 (-0.8279)	0.6163 (0.6235)
3	-2.7271 (-2.7075)	-0.7957 (-0.7646)	-0.3937 (-0.3631)	0.3260 (0.3078)
4	0.7528 (0.7725)	-1.0458 (-1.0500)	1.3345 (1.3694)	-2.0084 (-2.0281)
5	-1.5212 (-1.5090)	1.3410 (1.3050)	0.1689 (0.1336)	-1.6820 (-1.6913)

*The values in the parenthesis are ideal without noise contamination.

표 4 와 5 는 결합부 위치에 대해 계산된 고유 벡터와 참값을 비교해서 보여주고 있다. 예상할 수 있는 바와 같이 대부분의 경우에 지수값이 큰 조합에서 가장 참값에 가까운 결과를 얻을 수 있었다. 첫번째 스프링에 대해 가장 적합한 모우드는 3 번째 모우드인 반면에 두번째 스프링은 두번째 모우드인 것을 알 수

있다. 표 6 과 7 은 고려한 모든 모우드에서 규명한 두 스프링 계수를 보여주고 있다. 이 표로부터 앞에서 언급한 바와 같이 제안된 모우드에서 가장 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 한편 첫번째 스프링의 경우, 처음 두 모우드에서는 민감도가 매우 낮아서 규명 결과가 대단히 좋지 않음을 알 수 있다. 3 번째 모우드에서는 처음 두개의 조합에서 좋은 결과를 얻을 수 있는 반면 세번째 조합은 좋은 결과를 줄 수 없었는데 이는 지수값이 매우 좋지 않았기 때문으로 사료된다.

Table 4. Estimated latent vectors at the first spring

positions	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
	-0.04535	0.01768	-1.13381	-0.5822	1.0805
1,4,9,13	-0.0802	0.0235	-1.1556	-0.5760	1.1204
1,4,13	-0.0697	0.0255	-1.1564	-0.5822	1.1113
1,13	-0.0179	0.0435	-1.8173	-0.5824	1.0814

Table 5. Estimated latent vectors at the second spring

positions	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
	0.2188	-1.0804	-0.4402	0.8555	-0.9368
1,4,9,13	0.2245	-1.0638	-0.4752	0.8224	-0.9221
1,4,13	0.1379	-1.0810	-0.4696	0.8440	-0.9689
1,13	0.2300	-1.0625	-1.0306	0.8439	-0.9375

Table 6 Identified stiffness coefficients of the 1st spring

positions	Stiffness, 10^6 N/m (0.6×10^6 N/m)				
	mode 1	Mode 2	mode 3	mode 4	Mode 5
1,4,9,13	0.2887	0.6367	0.6004	0.6178	0.6406
1,4,13	0.4038	0.5597	0.5999+	0.6076	0.6322
1,13	1.4713	0.4233	0.5517	0.6077	0.5852

* The value in the parenthesis is actual coefficient.

Table 7 Identified stiffness coefficients of the 2nd spring

positions	Stiffness, 10^6 N/m (0.3×10^6 N/m)				
	mode 1	Mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
1,4,9,13	0.2712	0.3011	0.3154	0.2797	0.2631
1,4,13	0.4561	0.3020+	0.3113	0.2966	0.3407
1,13	0.2860	0.3001	0.5193	0.2964	0.3196

* The value in the parenthesis is actual coefficient.

6. 요약 및 결론

본논문에서는 구조물 결합부의 동적 변수를 결합된 상태에서 직접 규명하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 식오차 방법에 근간을 둔 직접 규명 방법으로서 기존의 방법에서 발생하는 문제점을 개선하기 위하여 측정되지 않은 모우드 벡터 요소에 대해 모델과 측정된 요소값을 이용한 간접 계산 방법을 적용하였다. 간접 계산의 신뢰성을 확인하기 위한 지수를 도입하여 적절한 측정점을 찾는 방법을 제시하였다. 또한 미지 변수에 대한 고유치의 민감도 식을 이용하여 변수 규명에 가장 적합한 모우드를 선정할 수 있도록 하였다. 두가지 예제를 통하여 기존의 방법이 갖고 있는 문제점을 예시하였고 새롭게 개발된 방법의 유용성을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Yuan, J.X. and Wu, S.M., 1985, "Identification of the joint structural parameters of machine tools by DDS and FEM," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.107, pp.64-69.
2. Kim, T.R., Wu, S.M. and Ehmann, K.F., 1989, "Identification of joint parameters for a taper joint," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.111, pp.282-287.
3. Kim, T.R., Ehmann, K.F. and Wu, S.M., 1991, "Identification of joint structural parameters between substructures," Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Vol.113, pp.419-424.
4. Lancaster, P., 1966, Lambda Matrices and Vibrating Systems, Oxford, Pergamon Press
5. Mottershead, J.E. and Friswell, M.I., 1993, "Model updating in structural dynamics : a survey," Journal of Sound and Vibration, Vol.167, No.2, pp.347-375.