

다단 회전체계의 동적 해석을 위한 개선된 모델링 방법

°박종혁¹ · 홍성욱² · 이 철³ · 김종욱⁴

An exact modeling method for dynamic analysis of multi-stepped rotor systems

Jong-Heuck Park, Seong-Wook Hong, Chul Lee, Jong-Wook Kim

Abstract

Although discretization methods such as the transfer matrix method (TMM) and the finite element method (FEM) have played an important role in the design or analysis of rotor-bearing systems, continuous system modeling and analysis are often desirable especially for sensitivity analysis or design. The present paper proposes a comprehensive modeling procedure to obtain exact solution of general rotor-bearing systems. The proposed method considers a Timoshenko beam model and makes use of complex coordinate in the formulation. The proposed method provides exact eigensolutions and frequency response functions (FRFs) of general multi-stepped rotor-bearing systems. The first numerical example compares the proposed method with FEM. The numerical study proves that the proposed method is very efficient and useful for the analysis of rotor-bearing systems.

1. 서론

단순한 형상과 경계조건을 가진 연속계의 응답특성은 시간과 공간에 관한 편미분방정식 형태로 표현될 수 있지만 편 미분방정식의 해를 얻기가 용이하지 않으며, 특히 복잡한 형상과 경계조건을 가지는 대부분의 실제적인 계는 응답특성의 표현조차 어렵다. 따라서 복잡한 계는 해석적인 과정을 통해 엄밀해를 구하기 보다 통상 유한자유도로 이산화한 뒤 얻어진 행렬형태의 특성식의 수치적인 풀이를 통해 해를 얻고 있다. 대표적인 근사적 이산화 방법으로 유한요소법을 들 수 있으며 이 방법은 가정된 형상함수를 이용하여 연속계를 유한자유도화하여 특성행렬을 얻는 방법이다.

유한요소법은 비교적 복잡한 계도 체계적인 절차를 통해 모델링될 수 있지만 해가 실제 시스템의 응답과 일치하려면 요소수를 늘여야 하며 이로 인해 과도한 기억용량의 필요와 반복계산으로 인한 수치 불안정, 계산시간이 많이 소요되므로 보다 개선된 모델링 및 계산방법의 개발에 관심이 계속되어 왔다^{1,2}. 그러나 이렇게 구해진 수치해는 엄밀해와 일치하지 않으므로 감도해석이나 설계 등에 유용하게 활용될 수 있는 엄밀해법의 필요성은 주지하고 있는 바와 같다.

본 연구에서는 시간 및 공간좌표에 대하여 라플라스 변환을 이용하여 회전관성, 자이로 모멘트, 전단변형을 포함한 Timoshenko 축요소의 운동방정식으로부터 엄밀한 동강성 행렬을 얻는 관계식을 유도하였다. 이는 편미분방정식으로 표현된 Timoshenko 축요소를 어떤 가정도 없이 유한자유도화한 엄밀해(exact)

¹ 정회원, 금오공과대학교 대학원

² 정회원, 금오공과대학교 기계공학부

³ 정회원, 금오공과대학교 대학원

⁴ 금오공과대학교 대학원

모델로서 이의 역행렬을 취하여 얻은 주파수응답함수를 이용하여 불균형응답, 시간응답 등을 얻을 수 있다. 제안한 모델링 방법을 Timoshenko 축요소를 포함한 일반적인 다단 회전체 동특성 해석에 적용하여 유한요소법의 결과¹⁾와 비교하였다. 적용된 예제로부터 제안된 방법의 우수성을 알 수 있었다.

2. 회전체계의 모델링

Fig.1 과 같은 Timoshenko 축요소의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} v &= kAG(\phi - \frac{\partial p}{\partial x}) \\ m &= EI_d \frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} - v &= \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - j\omega \rho I_p \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, x, p, ϕ 는 축의 종 변위, 횡 변위, 회전 변위이고 v, m 은 전단 및 모멘트이다. ρ, A, G, E, k 는 밀도, 단면적, 전단 강성계수(shear modulus), 영률(Young's modulus), 단면형상 보정계수(shape factor, 사각형 5/6, 원형 9/10), I_s, I_p 는 반경방향 면적관성 모멘트와 극방향 면적관성 모멘트(diametral and polar area moment of inertia), ω 는 회전속도이다.

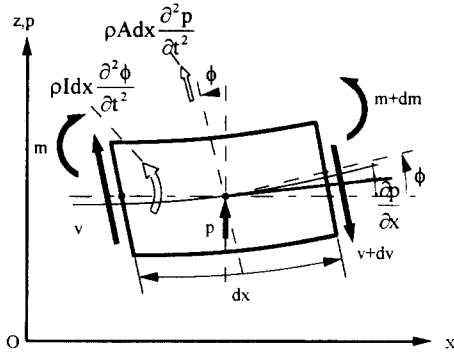


Fig.1 A Timoshenko shaft element

식(1)을 상태공간 형식으로 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \phi - \frac{v}{kAG} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= v + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - j\omega \rho I_p \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

위 식을 시간에 대해 라플라스변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \Phi - \frac{V}{kAG} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{M}{EI_d} \\ \frac{\partial V}{\partial x} &= -\rho A s^2 P \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= V + \rho I_d s^2 \Phi - j\omega \rho I_p s \Phi \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 s 는 시간에 관한 라플라스변수이며 행렬형식으로 아래와 같이 간단히 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = B \Psi \quad (4)$$

여기서,

$$\Psi = \{P \ \Phi \ V \ M\}^T$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \rho I_d s^2 - j\omega \rho I_p s, \quad b = \frac{1}{EI_d}, \quad c = \rho A s^2, \quad d = \frac{1}{kAG}$$

다시, 공간변수 x 에 관하여 라플라스변환하고 정리하면 다음 식과 같다.

$$\Psi(\lambda) = [\lambda I - B]^{-1} \Psi(0) \quad (5)$$

여기서, λ 는 공간변수에 관한 라플라스변수이며 $[\lambda I - B]^{-1}$ 는 부록의 식(A)와 같다. 위 식(5)을 공간변수에 대하여 라플라스 역변환하면 다음 식을 얻는다.

$$\Psi(x) = C\Psi(0) \quad (6)$$

여기서, C는 부록의 식(B)로 정의된다. 위 식(6)을 좌표 일반화와 변수 재배치를 통해 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = D^s \begin{bmatrix} P_1 \\ \Phi_1 \\ P_2 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서,

$$D^s = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\Delta} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_4 & d_5 \\ d_2 & d_3 & -d_5 & d_6 \\ d_4 & -d_5 & d_1 & -d_2 \\ d_5 & d_6 & -d_2 & d_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

한편, $\Delta, d_i, i=1,2,\dots,6$ 은 부록의 식(C-1)과 같다. 식(8)은 식(C)의 초월함수들로 구성된 축요소에 대한 동강성 행렬이다.

또한 식(2)에 대한 공액(conjugate)인 미분방정식에 대하여 앞에서와 마찬가지로 식을 전개하면 식(4)에 대응되는 요소는 다음과 같다.

$$\tilde{a} = \rho I_d s^2 + j\omega \rho I_p s, \quad \tilde{b} = b = \frac{1}{EI_d}$$

$$\tilde{c} = c = \rho A s^2, \quad \tilde{d} = d = \frac{1}{kAG}$$

여기서 \sim 는 공액인 변수에 대한 라플라스변환을 의미한다. 한편 $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ 는 실수이므로 b, c, d 와 동일한 값을 갖게되나 \tilde{a} 는 a 와 차이가 있게 된다. 이를 적용하여 다음 식과 같은 동강성 행렬을 얻을수 있다.

$$\tilde{D} = \frac{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2}{\tilde{\Delta}} \begin{bmatrix} \tilde{d}_1 & \tilde{d}_2 & \tilde{d}_4 & \tilde{d}_5 \\ \tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 & -\tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 \\ \tilde{d}_4 & -\tilde{d}_5 & \tilde{d}_1 & -\tilde{d}_2 \\ \tilde{d}_5 & \tilde{d}_6 & -\tilde{d}_2 & \tilde{d}_3 \end{bmatrix}$$

여기서, $\tilde{\alpha}^2, \tilde{\beta}^2, \tilde{\Delta}, \tilde{d}_i, i=1,2,\dots,6$ 은 부록의 식(C-2), 식(C-3)과 같다. 한편, 디스크요소에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$m^d \ddot{p} = f$$

$$J_d^d \ddot{\phi} - j\omega J_p^d \dot{\phi} = m \quad (9)$$

여기서 m^d, J_d^d, J_p^d, f, m 는 각각 디스크 질량, 반경방향 질량관성 모멘트와 극방향 질량관성 모멘트(diametral and polar mass moment of inertia), 힘과 모멘트이다.

위 식을 라플라스변환 후 정렬하면 다음과 같은 디스크요소 동강성 행렬을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} F \\ M \end{bmatrix} = D^d \begin{bmatrix} P \\ \Phi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{F} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} = \tilde{D}^d \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서

$$D^d = \begin{bmatrix} m^d s^2 & 0 \\ 0 & J_d^d s^2 - j\omega J_p^d s \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}^d = \begin{bmatrix} m^d s^2 & 0 \\ 0 & J_d^d s^2 + j\omega J_p^d s \end{bmatrix}$$

여기서 F, M, P, Φ 는 각각 f, m, p, ϕ 의 라플라스변환이다. 또한, 베어링 요소에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$f = c_r \dot{p} + c_b \dot{\bar{p}} + k_r p + k_b \bar{p}$$

$$\tilde{f} = \tilde{c}_r \dot{\bar{p}} + \tilde{c}_b \dot{p} + \tilde{k}_r \bar{p} + \tilde{k}_b p \quad (11)$$

라플라스변환 후 베어링 요소의 다음 두 동강성 행렬을 얻는다.

$$F = D_r^b P + D_b^b \bar{P}, \quad \tilde{F} = \tilde{D}_r^b \bar{P} + \tilde{D}_b^b P \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 D_f^b &= (c_f s + k_f), \quad D_b^b = (c_b s + k_b) \\
 \bar{D}_f^b &= (\bar{c}_f s + \bar{k}_f), \quad \bar{D}_b^b = (\bar{c}_b s + \bar{k}_b) \\
 2c_f &= c_{yy} + c_{zz} - j(c_{yz} - c_{zy}) \\
 2c_b &= c_{yy} - c_{zz} + j(c_{yz} + c_{zy}) \\
 2k_f &= k_{yy} + k_{zz} - j(k_{yz} - k_{zy}) \\
 2k_b &= k_{yy} - k_{zz} + j(k_{yz} + k_{zy})
 \end{aligned} \tag{13}$$

위 식(8), (10), (12)로 표현된 축요소, 디스크요소, 베어링요소의 동강성 행렬을 이용하여 전체 시스템에 대해 라플라스 영역에서 어셈블하면 다음 식의 응답 관계식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} F \\ \bar{F} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{bmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} Q \\ \bar{Q} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} F \\ \bar{F} \end{bmatrix} \tag{14}$$

여기서, Q, \bar{Q} 는 각각 전역 좌표벡터 및 그에 대한 공액벡터의 라플라스변환이며 F, \bar{F} 는 이에 대응되는 힘벡터 들이며 식(14)의 D 행렬은 시스템 동강성 행렬이며, H 는 주파수응답함수 행렬로서 다음과 같다.

$$H = D^{-1} = \begin{bmatrix} D^s + D^d + D_f^b & D_b^b \\ \bar{D}_b^b & \bar{D}^s + \bar{D}^d + \bar{D}_f^b \end{bmatrix}^{-1} \tag{15}$$

3. 수치해석 및 토의

Fig.2는 길이 1.2m, 직경 2.5cm인 축요소와 양단에 저 감쇠, 저 강성을 가진 베어링으로 이루어진 회전체에 대해 제안된 방법으로 모델링한 경우와 유한요소법으로 모델링한 경우⁽¹⁾의 주파수응답함수를 비교하여 그린 것이다. 유한요소법으로 모델링한 것이 요소수를 증가할수록 제안된 방법으로 계산한 엄밀해 응답함수에 접근함을 볼 수 있다.

Fig.4는 Fig.3에 보인 바와 같이 양단에 베어링으로 지지된 보다 일반적인 다단 회전체계의 디스크에 10g-cm의 불균형이 있을 때 디스크 위치에서의 불균형 응답을 그린 것이다. 여기에 포함된 회전체 요소들의 사양은 Table 1과 같다.

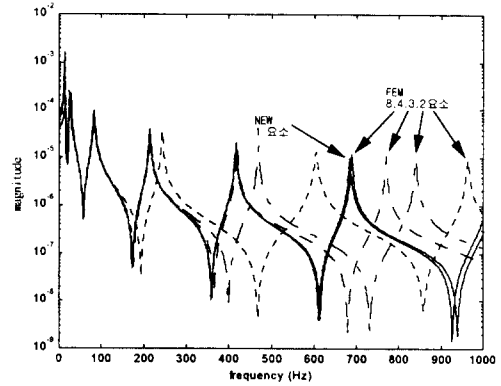


Fig.2 frequency response functions at node 1

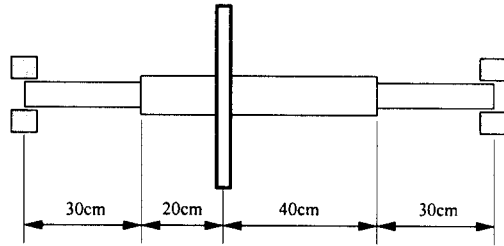


Fig.3 A multi-stepped rotor-bearing system

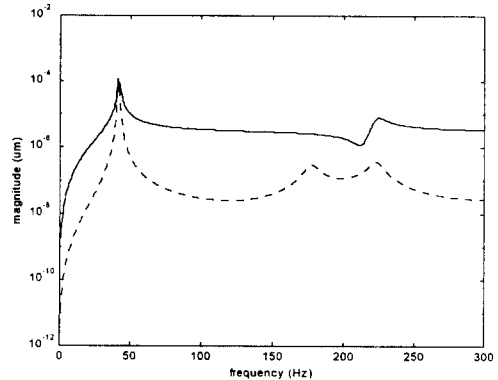


Fig.4 A typical unbalance response of multi-stepped rotor with 10g-cm unbalance attached to disk
 ——— : forward - - - - : backward

Table 1 Specifications of the numerical model

Shaft	Length	1.20 m	
	Diameter	6, 4 cm	
	Young's Modulus	200 GN/m ²	
	Density	8000 Kg/m ³	
Disk	Mass	20 Kg	
	Polar Moment of inertia	0.163 Kg-m ²	
	Dia. Moment of inertia	0.085 Kg-m ²	
Bearing	Stiffness	Kyy	20 MN/m
		Kyz	-15 MN/m
		Kzy	10 MN/m
		Kzz	25 MN/m
	Damping	Cyy	60 KNs/m
		Cyz	-40 KNs/m
		Czy	-40 KNs/m
		Czz	65 KNs/m

4. 결 론

본 연구에서는 시간 및 공간좌표에 대하여 라플라스 변환을 적용하여 Timoshenko 축과 디스크, 베어링 운동방정식으로부터 각각 어셈블 될 수 있는 요소 동강성 행렬들을 얻는 관계식을 유도하였다. 또한 이를 이용하여 얻은 주파수응답함수를 유한요소법의 결과와 비교하고, 보다 일반적인 모델에서 불균형응답을 얻는 예제를 통해 제안한 방법의 유효성을 보였다.

제안된 방법으로 모델링하면 획기적으로 자유도를 줄인 엄밀해를 얻는 모델을 만들 수 있다. 계 내의 균일 형상을 최소한의 요소수로 모델링하여도 에러를 유발하지 않고 유한요소 모델과 쉽게 통합 가능하므로 복잡한 실제 계에서 유한 요소 모델과 더불어 활용하면 크게 자유도 수를 줄일 수 있다. 또한 비틀림 요소를 포함하는 일반적인 경우에 제안한 방법을 쉽게 적용할 수 있으며 민감도 해석이나 설계 문제에 응용이 가능할 것으로 기대된다.

참고 문헌

1. 홍성욱, 박종혁, 1996, "회전체 베어링 계의 불균형 응답 해석을 위한 개선된 부분 구조 합성법", 한국 소음진동공학회지 제6권 제1호, pp.71-82.
2. S.-W. Hong, J.-H. Park, 1997, "An efficient method for the unbalance response analysis of rotor-bearing systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 200(4), pp.491-504
3. Hashish, E. and Sanker, T.S., 1984, "Finite element and modal analyses of rotor bearing systems under stochastic loading conditions," Trans. ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol.106, pp.80-89

부 록

제안된 모델링 방법에 의한 Timoshenko 축요소 관련 식:

$$[\lambda I - B]^{-1} = \frac{I}{(\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 - \beta^2)} \begin{bmatrix} \lambda(\lambda^2 - ab) & \lambda^2 & -[d(\lambda^2 - ab) - b] & b\lambda \\ -bc & \lambda(\lambda^2 - cd) & b\lambda & b(\lambda^2 - cd) \\ -c(\lambda^2 - ab) & -c\lambda & \lambda(\lambda^2 - ab) & -bc \\ -c\lambda & a(\lambda^2 - cd) - c & \lambda^2 & \lambda(\lambda^2 - cd) \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) + \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \} \quad (A-2)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2} \{ (ab + cd) - \sqrt{(ab + cd)^2 - 4(abcd + bc)} \}$$

$$C = \begin{bmatrix} f_3 - abf_1 & f_2 & -df_2 + (abd + b)f_0 & bf_1 \\ -bcf_0 & f_3 - cdf_1 & bf_1 & bf_2 - bcdf_0 \\ -cf_2 + abcf_0 & -cf_1 & f_3 - abf_1 & -bcf_0 \\ -cf_1 & af_2 - (acd + c)f_0 & f_2 & f_3 - cdf_1 \end{bmatrix} \quad (B-1)$$

$$f_0 = L^{-1}\left(\frac{1}{\Delta}\right) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x - \frac{1}{\beta} \sinh \beta x \right\}, \quad f_1 = L^{-1}\left(\frac{\lambda}{\Delta}\right) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \cosh \alpha x - \cosh \beta x \}$$

$$f_2 = L^{-1}\left(\frac{\lambda^2}{\Delta}\right) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha \sinh \alpha x - \beta \sinh \beta x \}, \quad f_3 = L^{-1}\left(\frac{\lambda^3}{\Delta}\right) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{ \alpha^2 \cosh \alpha x - \beta^2 \cosh \beta x \} \quad (B-2)$$

$$\Delta = 2b(1 - \cosh \alpha x \cosh \beta x) + \frac{1}{c} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} (cd - \alpha^2)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (cd - \beta^2)^2 \right\} \sinh \alpha x \sinh \beta x$$

$$d_1 = -\frac{cd - \alpha^2}{\alpha} \sinh \alpha x \cosh \beta x + \frac{cd - \beta^2}{\beta} \sinh \beta x \cosh \alpha x$$

$$d_2 = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[(ab - cd)(1 - \cosh \alpha x \cosh \beta x) - \left\{ \frac{\beta}{\alpha} (cd - \alpha^2)^2 + \frac{\alpha}{\beta} (cd - \beta^2)^2 \right\} \sinh \alpha x \sinh \beta x \right] \quad (C-1)$$

$$d_3 = \frac{1}{bc} \{ \alpha (cd - \alpha^2) \sinh \alpha x \cosh \beta x - \beta (cd - \beta^2) \sinh \beta x \cosh \alpha x \}$$

$$d_4 = \frac{cd - \alpha^2}{\alpha} \sinh \alpha x - \frac{cd - \beta^2}{\beta} \sinh \beta x$$

$$d_5 = -\cosh \alpha x + \cosh \beta x$$

$$d_6 = \frac{1}{bc} \{ -\beta (cd - \alpha^2) \sinh \beta x - \alpha (cd - \beta^2) \sinh \alpha x \}$$

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \{ (\tilde{a}b + cd) + \sqrt{(\tilde{a}b + cd)^2 - 4(\tilde{a}bcd + bc)} \} \quad (C-2)$$

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{1}{2} \{ (\tilde{a}b + cd) - \sqrt{(\tilde{a}b + cd)^2 - 4(\tilde{a}bcd + bc)} \}$$

$$\tilde{\Delta} = 2b(1 - \cosh \tilde{\alpha} x \cosh \tilde{\beta} x) + \frac{1}{c} \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} (cd - \tilde{\alpha}^2)^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} (cd - \tilde{\beta}^2)^2 \right\} \sinh \tilde{\alpha} x \sinh \tilde{\beta} x$$

$$\tilde{d}_1 = -\frac{cd - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}} \sinh \tilde{\alpha} x \cosh \tilde{\beta} x + \frac{cd - \tilde{\beta}^2}{\tilde{\beta}} \sinh \tilde{\beta} x \cosh \tilde{\alpha} x$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{1}{\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\beta}^2} \left[(\tilde{a}b - cd)(1 - \cosh \tilde{\alpha} x \cosh \tilde{\beta} x) - \left\{ \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} (cd - \tilde{\alpha}^2)^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} (cd - \tilde{\beta}^2)^2 \right\} \sinh \tilde{\alpha} x \sinh \tilde{\beta} x \right] \quad (C-3)$$

$$\tilde{d}_3 = \frac{1}{bc} \{ \tilde{\alpha} (cd - \tilde{\alpha}^2) \sinh \tilde{\alpha} x \cosh \tilde{\beta} x - \tilde{\beta} (cd - \tilde{\beta}^2) \sinh \tilde{\beta} x \cosh \tilde{\alpha} x \}$$

$$\tilde{d}_4 = \frac{cd - \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\alpha}} \sinh \tilde{\alpha} x - \frac{cd - \tilde{\beta}^2}{\tilde{\beta}} \sinh \tilde{\beta} x$$

$$\tilde{d}_5 = -\cosh \tilde{\alpha} x + \cosh \tilde{\beta} x$$

$$\tilde{d}_6 = \frac{1}{bc} \{ -\tilde{\beta} (cd - \tilde{\alpha}^2) \sinh \tilde{\beta} x - \tilde{\alpha} (cd - \tilde{\beta}^2) \sinh \tilde{\alpha} x \}$$