

각축어긋남에 의한 2x 축진동해석

⁰ 이영섭*, 이종원**

Analysis of a 2x radial vibration due to angular misalignment

(Young-Seob Lee and Chong-Won Lee)

ABSTRACT

축어긋남이 있는 회전체-볼베어링계에 대한 동적모델을 이용하여, 각축어긋남에 의한 2x 축진동현상을 조사하였다. 이때 유효베어링강성계수를 정의하여 축어긋남과 불균형량에 의해 발생하는 강성계수의 평균과 동기 변화성분을 운동방정식에 도입하였다. 수치해석과 실험결과는 각축어긋남에 의한 바나나 형태의 선회궤적이 회전체계 임계속도의 1/2이 되는 속도영역에서 뚜렷이 나타나는 것을 보여주었다.

1. 서론

회전기계에서 축어긋남(misalignment)은 불균형 다음으로 자주 일어나는 결함으로 베어링 하우징의 변형, 부적절한 조립과 설치등에 의해 발생되며, 베어링과 커플링에 예하중(preload)을 작용시킨다. 이 결함은 주로 회전속도에 동기되는 진동(1x)을 발생시키며, 심한 경우에는 2x성분에 의해, 바나나 또는 '8'자 형태의 선회궤적(whirling orbit)을 만든다[1-3].

최근 축어긋남에 대한 연구는 주로 커플링의 변형에 관한 모형화와 이에 의한 2x진동 영향에 대한 연구들이 진행되었으며[4-9], 축어긋남의 효과로서 커플링과 베어링에 작용하는 반력과 이들의 변형을 고려한 모델이 개발되었다[10-12]. 그 연구결과는 각축어긋남은 어긋남방향의 베어링강성계수를 증가시켜 그 방향의 회전체계 고유진동수를 증가시키고, 타원형태의 궤적을 보여주었다[10-12]. 이 연구의 목적은 축어긋남이 있는 회전체계의 진동을 묘사할 수 있는 모델을 이용한 수치해석과 실험으로부터 축어긋남의 가장 큰 특징인 2x 축진동현상을 설명하고자 한다.

2. 운동방정식

각축어긋남에 의한 2x 축진동현상을 알아보기 위해, 볼베어링으로 지지된 회전체계에 대한 동적모델을 이용하였다[10-12].

2.1 회전체계의 유한요소 모형화

축방향을 포함한 축과 원판에 대한 유한 요소 모델을 이용하였으며, 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m^{s+d} & 0 & 0 \\ 0 & m^{s+d} & 0 \\ 0 & 0 & m^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g^{s+d} & 0 \\ -g^{s+d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k^s & 0 & 0 \\ 0 & k^s & 0 \\ 0 & 0 & k^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \\ f_x \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 위첨자 's'와 'd'는 축과 원판요소를 'a'는 축방향성분을 의미한다.

2.2 볼베어링의 반력과 변형의 관계

축어긋남에 의해 베어링에 작용하는 힘과 모멘트는 베어링의 변형을 가져오며, 베어링에서 변위 벡터와의 관계는 Hertizian의 접촉 이론을 이용하여 다음과 같이 표시할 수 있다 [10-13].

* 삼성항공 엔진연구소
** 한국과학기술원 기계공학과

$$\begin{aligned}
F_{bx} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \\
F_{by} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \cos \psi_j \\
F_{bz} &= \sum_{j=1}^n K_{3/2} \delta_j^{3/2} \cos \alpha_j \sin \psi_j \\
M_{by} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \sin \psi_j \\
M_{bz} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} D_m K_{3/2} \delta_j^{3/2} \sin \alpha_j \cos \psi_j
\end{aligned} \quad (2)$$

여기서 δ_j 와 α_j 는 y축으로부터 ψ_j 각도에 위치한 j-번째 구름요소의 탄성변형과 접촉각을 나타낸다.

2.3 변형된 커플링의 모형화

축어긋남은 회전체를 구동시키는 데 필요한 전달 토크와 커플링의 변형에 의해 힘과 모멘트를 인접한 축에 작용시킨다[4,5,8,10-12].

전달토크에 의한 힘과 모멘트 :

$$\begin{aligned}
M_{Ty} &= T_q \sin(\phi_a) \cos(\phi_p) + T_q \sin(\phi_p) \cos(\phi_a) \\
M_{Tz} &= -T_q \sin(\theta_a) \cos(\theta_p) - T_q \sin(\theta_p) \cos(\theta_a) \\
F_{Ty} &= \frac{M_{Tz}}{l_c} \quad \text{와} \quad F_{Tz} = \frac{M_{Ty}}{l_c}
\end{aligned} \quad (3)$$

커플링의 변형에 의한 힘과 모멘트 :

$$\begin{aligned}
F_{Dy} &= \frac{12(EI)_{eff}}{l_c^3} \left(\Delta y_p - \frac{\phi_a l_c}{2} \right) \\
F_{Dz} &= \frac{12(EI)_{eff}}{l_c^3} \left(\Delta z_p - \frac{\theta_a l_c}{2} \right) \\
M_{Dy} &= \frac{6(EI)_{eff}}{l_c^2} \left(\Delta y_p - \frac{2\phi_a l_c}{3} \right) \\
M_{Dz} &= \frac{6(EI)_{eff}}{l_c^2} \left(\Delta z_p - \frac{2\theta_a l_c}{3} \right)
\end{aligned} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned}
\theta_a &= \sin^{-1} \left(\frac{\Delta z_a}{l_b} \right) \quad \text{와} \quad \phi_a = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta y_a}{l_b} \right) \\
\theta_p &= \sin^{-1} \left(\frac{\Delta z_p}{l_c} \right) \quad \text{와} \quad \phi_p = \sin^{-1} \left(\frac{\Delta y_p}{l_c} \right)
\end{aligned}$$

는 각과 평행 축어긋남에 의한 처짐각을 나타낸다.

Figure 1에서 보여준 Brg #1과 Brg #2의 변위 벡터를

이용하여 각과 평행 축어긋남을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\text{각축어긋남} &: \Delta y_a = y_{b2} - y_{b1}, \quad \Delta z_a = z_{b2} - z_{b1} \\
\text{평행축어긋남} &: \Delta y_p = y_{b1} \text{ OR } y_{b2}, \quad \Delta z_p = z_{b1} \text{ OR } z_{b2}
\end{aligned}$$

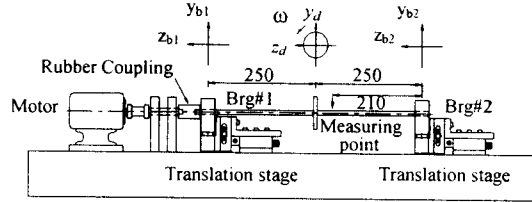


Figure 1 Experimental setup

2.4 운동방정식

위에서 축, 베어링과 커플링에 대한 모델로부터 축어긋남을 갖는 회전체의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [G+C]\{\dot{Q}\} + [K]\{Q\} = \{F\}_b + \{F\}_e \quad (5)$$

여기서 $\{F\}_b$ 는 베어링에 작용하는 힘과 모멘트를 $\{F\}_e$ 는 불균형력과 중력, 그리고 커플링에 작용하는 힘과 모멘트를 나타낸다. 비선형 모델을 포함하는 운동 방정식으로부터 축어긋남과 불균형력에 의한 시간 응답을 구하기 위해 Runge-Kutta 적분 알고리즘을 이용하였다.

2.5 예제

Figure 1은 회전체 실험장치로, 축길이는 500 mm, 지름은 10 mm로 2개의 요소를 갖는 것으로 모형화하였으며, 실험과 수치 해석에서의 불균형량은 15.7 g-mm이었다. 사용된 고무커플링은 축에 비해 상당히 유연한 것으로 나타났다. 그리고 깊은홈 볼베어링 (Type6200)은 8개의 구름요소를 갖으며, 간극은 5 μm이다. 회전체 실험장치는 수직과 수평 방향의 이동이 가능한 2개의 이동 테이블로 구성되어 있고, 이 테이블을 이용하여 회전체 중심선을 일치시킬 수 있었으며, 여러 축어긋남 조건을 구현할 수 있었다.

3. 해석

실험과 수치해석으로부터 각축어긋남에 의한 2x 축진동에 관련된 특성들을 조사하였다[12].

3.1 유효 베어링 강성계수

각축어긋남에 의한 2x 축진동 특성을 조사하기 위하여 수식(2)의 베어링에서의 반력과 변형과의 관계로부터 다음과 같이 유효 베어링강성을 구하였다[10-13].

$$k_{bij} = \frac{\partial F_i}{\partial \delta_j} \quad ; \quad i, j = x_b, y_b, z_b, \theta_{by}, \theta_{bz} \quad (6)$$

여기서 F_i 는 베어링에 작용하는 힘과 모멘트를 $x_b, y_b, z_b, \theta_{by}$, 와 θ_{bz} 는 베어링 변위벡터이다. Figure 2는 각축어긋남, $\Delta z_a = 2.0$ mm, 에 대한 1500 rpm에서 계산된 유효베어링강성계수를 나타낸다. z-축방향의 각축어긋남이 있는 경우, 축어긋남과 관련된 k_{bzz} 와 $k_{b\theta_z\theta_z}$ 의 평균값은 k_{byy} 과 $k_{b\theta_y\theta_y}$ 보다 크다는 것을 보여 주고 있으며, 이것은 회전체계의 고유진동수 증가와 타원선회 궤적의 원인이 된다.

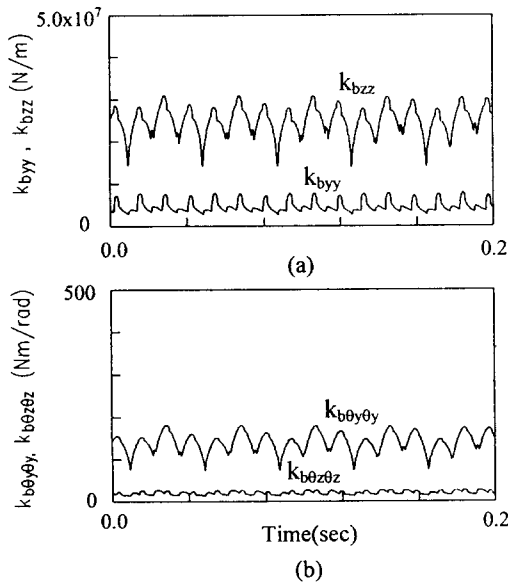


Figure 2 Effective bearing stiffnesses for $\Delta z_a = 2.0$ mm at Brg#2, 1500 rpm
 (a) k_{byy} and k_{bzz} (b) $k_{b\theta_y\theta_y}$ and $k_{b\theta_z\theta_z}$

Figure 3은 베어링강성계수를 주파수로 분리한 것으로, 가장 큰 성분인 3.09x는 베어링 구름요소의 통과 주파수이고, 베어링 구름요소의 경화효과(hardening effect)에 의해 회전속도와 동기되는 주파수 성분이 뚜렷하게 나타난다. 그러나 회전속도의 2배, 3배되는 성분과 k_{byy} 과 $k_{b\theta_z\theta_z}$ 에서의 동기성분은 매우작은 것으로 나타났다.

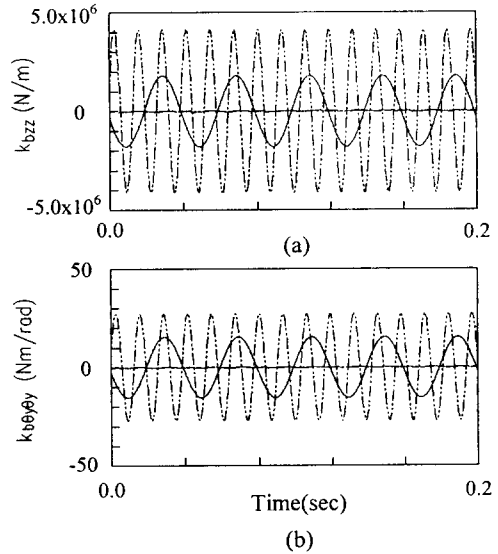


Figure 3 Magnitudes of each frequency components in effective bearing stiffnesses for $\Delta z_a = 2.0$ mm at Brg#2, 1500 rpm
 — ; 1x - - - - ; 2x ····· ; 3x - · - · ; 3.09x

3.2 유효 베어링 강성계수의 변화

Figure 4는 각축어긋남, $\Delta z_a = 2.0$ mm에 대해 Brg#1과 Brg#2에서의 불균형응답과 유효베어링강성계수, k_{bzz} 와 $k_{b\theta_z\theta_z}$,의 변화관계를 보여 준다. 여기서 구름요소의 통과주파수(3.09x)는 제외되었다. 그림에서 회전체계의 불균형질량이 z-축을 통과할 때(90도), Brg#1 (Brg#2)에서의 베어링에 작용하는 힘과 모멘트 크기는 평균값에 비해 증가(감소)하고, 이것은 베어링 구름요소의 경화효과에 의해 베어링강성계수의 증가(감소)로 나타난다. 반대로 -z-축을 통과할 때(270도)

에는 베어링 강성계수의 감소(증가)를 가져온다. 결과로서 베어링강성계수는 회전속도와 동기되는 크기변화가 일어난다.

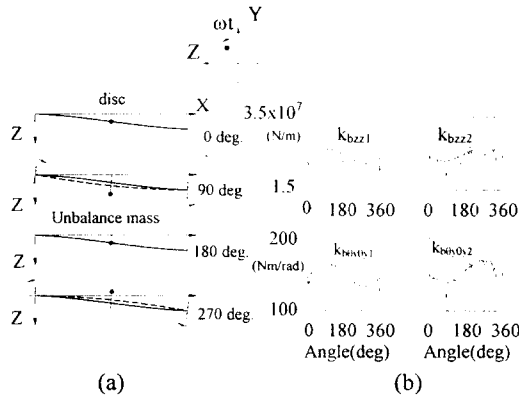


Figure 4 Variation in effective bearing stiffness with unbalance response, $\Delta z_a = 2.0$ mm
 (a) unbalance response (b) effective bearing stiffness

Figure 5는 회전체계의 불균형량이 15.7 g-mm에서 45g-mm로 증가되었을 때 베어링강성계수의 동기성분의 크기는 증가하며, 이러한 변화는 회전체계의 불균형량에 크게 의존함을 보여준다.

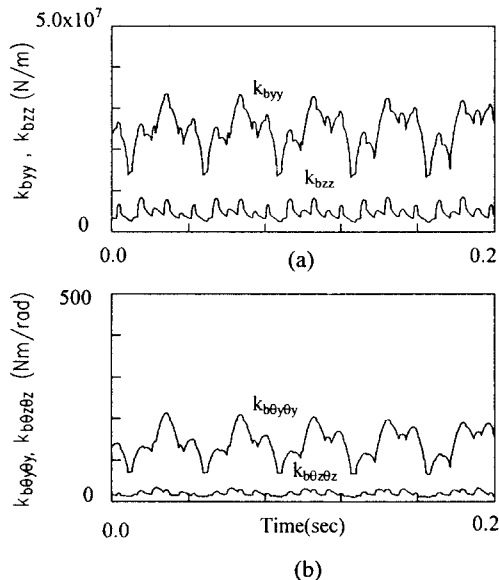


Figure 5 Effective bearing stiffness at Brg#2 for $\Delta z_a = 2.0$ mm, 1500 rpm and Unbalance = 48 g-mm
 (a) k_{byy} and k_{bzz} (b) k_{beyey} and k_{bezez}

3.3 2x 축진동해석

유효 베어링 강성계수의 동기변화를 고려하기 위하여 다음과 같이 유효베어링 강성계수행렬을 표현하였고,

$$K_b = K_{mean} + \sum_{n=1}^r (K_{n\omega}^c \cos n\alpha + K_{n\omega}^s \sin n\alpha)$$

축어긋남이 있는 회전체계에 대한 운동방정식에 이를 고려하였다.

$$[M]\{\ddot{Q}\} + [G + C]\{\dot{Q}\} + [K + K_b]\{Q\} = \{F_e\} \quad (7)$$

$$\{F_b\} = -K_b\{Q\}$$

본 연구에서는 현저한 특징을 보이고 있는 유효베어링강성계수의 평균과 동기성분을 운동방정식에 도입하여 수치적으로 회전체계의 불균형응답을 계산하였다. Figure 6은 회전체계 임계속도의 1/2이 되는 속도부근에서의 선회래적을 보여준다. 이 때 선회래적의 형상은 원, 타원, 그리고 바나나 형태를 보여주고 있으며, 이것은 $1x(-1x)$ 와 $2x(-2x)$ 성분의 크기와 위상 조합에 의해 형상이 결정된다. 그리고 그림은 z(y)방향의 각축어긋남에 의해 임계속도의 약 1/2이 되는 속도에서 먼저 y(z)-축에서 2x축진동이 먼저 나타나고, 다음에 z(y)-축에서 2x축진동이 나타나는 것을

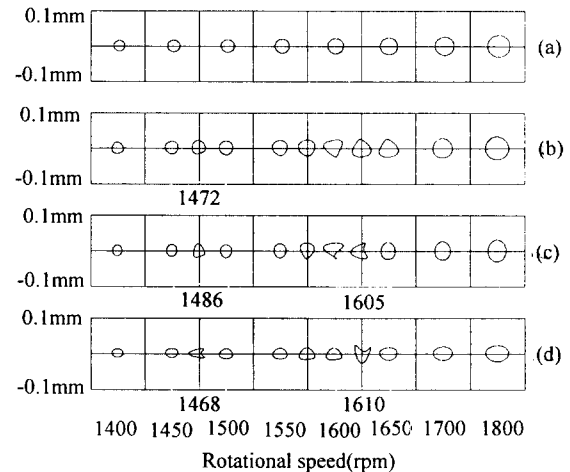


Figure 6 Whirling orbits near a half of critical speed : simulation

(a) no misalignment (b) $\Delta z_a = 1.0$ mm (c) $\Delta z_a = 2.0$ mm (d) $\Delta y_a = 2.0$ mm

보여주고 있다. 이러한 현상은 각축어긋남에 의한 어긋남 방향의 고유진동수 증가에 의해 2x 축진동은 잘 정렬된 축에서 먼저 나타나고, 더 높은 속도에서 어긋남 방향으로 나타나게 된다. 이 때 y, z-축의 고유진동수는 각각 50.1 Hz 와 53.6 Hz이다. Figure 7은 각축어긋남에 대한 선회궤적, 시간응답, 그리고 주파수 성분의 관계를 보여 준다. 선회궤적은 정방향 선회궤적을 보여 주며, 그 형상은 바나나와 유사하다. 그리고 시간응답은 z-축에서 2x진동을 보여주고 있으며, 이것은 회전속도가 어긋남 방향의 임계속도에 가깝기 때문이다. 방향주파수 성분은 1x(-1x) 와 2x(-2x)성분이 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

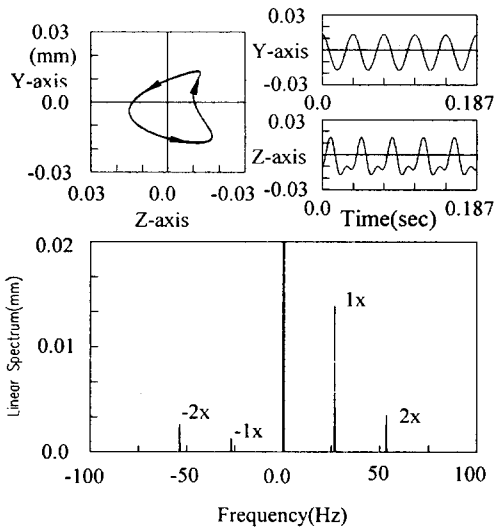


Figure 7 Whirling orbit, time response and directional spectral analysis for $\Delta z_a = 2.0$ mm : simulation

Figure 8은 축어긋남이 없는 경우와 있는 경우에 대한 캐스케이드(cascade) 그림으로 축어긋남이 없는 경우에는 1x성분만이 나타나지만 축어긋남이 있는 경우에는 1x성분외에 베어링강성계수의 평균값 증가에 의한 -1x성분과 베어링강성계수의 동기 변화성분에 의한 2x(-2x) 성분이 뚜렷하게 나타남을 알 수 있다.

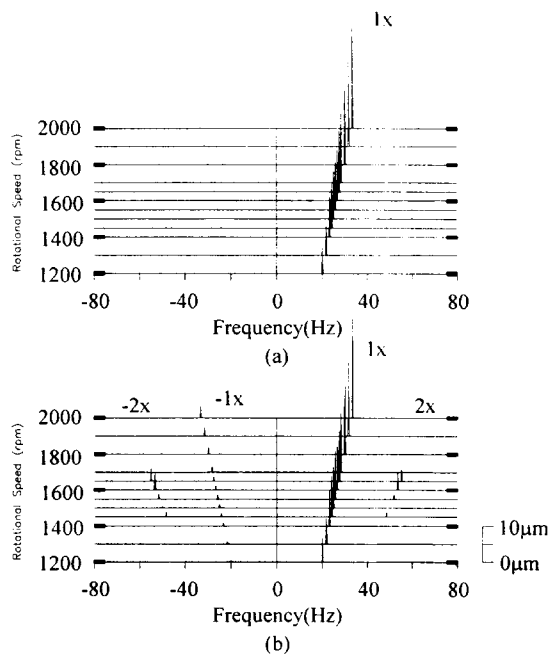


Figure 8 Cascade plots for whirling orbits : Simulation (a) no misalignment (b) $\Delta z_a = 2.0$ mm

Figure 9는 수치해석에서와 같은 축어긋남 조건에 대한 실험결과를 보여준다. 각축어긋남이 없는 경우에 선회궤적은 임계속도의 1/2이 되는 곳에서도 거의 원에 가깝지만, 각축어긋남이 있는 경우에는 타원과 바나나형태의 궤적을 보여주고 있다.

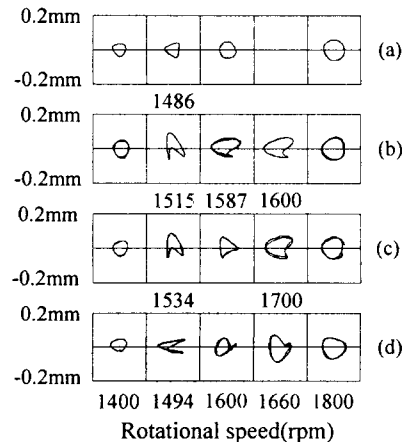


Figure 9 Whirling orbits near a half of critical speed : Experiment (a) no misalignment (b) $\Delta z_a = 1.0$ mm (c) $\Delta z_a = 2.0$ mm (d) $\Delta y_a = 2.0$ mm

그리고 수치해석결과와 마찬가지로 2x진동은 먼저 잘 정렬된 축에서 나타나며, 그리고 어긋남 방향에서 나타나게 된다.

4. 결론

본 연구에서는 축어긋남이 있는 회전체-볼베어링 계에 대한 모델을 이용하여, 각축어긋남에 의한 2x축 진동에 대한 특성을 조사하였다. 각축어긋남에 의한 유효베어링강성계수의 평균과 동기변화성분을 운동 방정식에 도입하여 불균형응답을 계산하였다. 그 때 회전체계의 임계속도의 1/2이 되는 영역속도에서 2x 진동이 잘 정렬된 곳에서 바나나형태의 궤적이 먼저 나타났으며, 다음에는 어긋남방향으로 나타났다. 이러한 현상은 각축어긋남에 의한 어긋남방향의 유효 베어링강성계수의 증가에 의한 것으로 실험결과를 수치해석에서 보여 준 2x축진동에 관련된 특성들을 잘 보여주고 있다.

5. 참고문헌

1. M. J. GOODWIN 1989 *Dynamics of Rotor-Bearing Systems*. London: Unwin Hyman Ltd.
2. J. M. VANCE 1988 *Rotordynamics of Turbomachinery*. John Wiley & Sons.
3. Bently Nevada 1993 *Technical Training; Machinery Diagnostics Course*.
4. C. B. GIBBONS 1976 *Proceedings 5th Turbomachinery Symposium Gas Turbine Laboratories, Texas A&M Univ*, 111-116. Coupling Misalignment Forces.
5. A. S. SEKHAR and B. S. PRABHU 1995 *Journal of Sound and Vibration* **185(4)**, 655-671. Effects of Coupling Misalignment on Vibrations of Rotating Machinery.
6. M. XU and R. D. MARANGONI 1994 *Journal of Sound and Vibration* **176(5)**, 663-679. Vibration Analysis of a Motor-Flexible Coupling-Rotor System Subject to Misalignment and Unbalance, Part I : Theoretical Model and Analysis.
7. M. XU and R. D. MARANGONI 1994 *Journal of Sound and Vibration* **176(5)**, 681-691. Vibration Analysis of a Motor-Flexible Coupling-Rotor System Subject to Misalignment and Unbalance, Part II : Experimental Validation
8. P. ARUMUGAM, S. SWARNAMANI and B. S. PRABHU 1995 *ASME Design Engineering Technical Conferences* **84 (2)**, 1049-1054. Effects of Coupling Misalignment on the Vibration Characteristics of a Two Stage Turbine Rotor.
9. 황 형섭, 양 보석, 김 원철 1996 대한기계학회 추계 학술대회논문집 A, 650-655. 동적유한요소법에 의한 커플링부 정렬불량을 가진 회전축계의 진동해석
10. 이 영섭, 이 종원 1997 한국소음진동공학회 춘계 학술대회논문집, 247-252. 축어긋남이 있는 볼베어링 지지 회전체의 진동해석
11. Lee, Y. S., and Lee, C. W. 1997 *Proceeding of the 7th Asia-Pacific Vibration Conference '97*, 224-229. Modelling of Misaligned Rotor-Ball Bearing Systems.
12. Lee, Y. S. 1998 *Ph. D. Dissertation, KAIST*, Modeling and Vibration Analysis of Misaligned Rotor-Ball Bearing Systems.
13. T. C. LIM and R. SINGH 1990 *Journal of Sound and Vibration* **139(2)**, 179-199. Vibration Transmission through Rolling Element Bearings, Part I : Bearing Stiffness Formulation.