

집중 질량을 가진 회전하는 외팔 평판의 진동 해석

양 정 식*, ○ 유 흥 희**

Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates with a Concentrated Mass

Jung Sik Yang and Hong Hee Yoo

ABSTRACT

A modelling method for the vibration analysis of rotating cantilever plates with a concentrated mass is presented. The equations of motion for the rotating plates with a concentrated mass located in an arbitrary position are derived. For the modelling of the concentrated mass, a mass density Dirac delta function is used. The effects of concentrated mass and its location, angular speed, and hub radius of the rotating plate on the natural frequencies are studied. Particularly, mode shape variations due to some parameter variations are investigated.

1. 서론

회전하는 외팔보 형태의 구조물은 여러 가지 공학적 예제들에서 발견될 수 있는데, 대표적인 구조물로는 헬리콥터나 터어빈에 사용되는 블레이드가 있다. 회전운동은 원심 관성력을 발생시켜 구조강성의 변화를 가져오며, 이는 다시 구조진동특성의 변화로 연계된다. 회전하는 외팔보의 진동에 관한 연구는 1920년대 초부터 시작된 것으로 알려져 있는데 참고문헌[1-5]은 이 분야의 많은 문헌 중 대표적인 일부 문헌이다.

해석을 위해 많은 회전 구조물들이 외팔보로 이상화되고 있으나, 어떤 구조물들은 그 형태가 보라기보다 평판에 가깝다. 예를 들어, 중황비가 작은 터어빈 블레이드의 경우에는 동적특성이 평판에 더 가까울 것이며, 이런 경우에 구조물을 보로 이상화하여 해석을 수행한다면 당연히 실제와 상당한 오차를 초래하게 될 것이다. 따라서 회전

하는 평판의 정확한 모델링 및 진동해석은 그 필요성이 인정될 수 있다.

회전하는 평판의 진동에 관한 참고문헌은 회전 외팔보의 경우에 비해 현저히 적은 편이다. 이들은 주로 유한요소법을 사용하고 있으며 정상상태에서 원심력과 평형을 이루는 응력을 사용해 정방형 탄성에너지를 구하고, 이에 근거하여 강성행렬을 구함으로써 회전에 따른 진동특성 변화를 예측하고 있다. 그러나 이러한 방법은 정상상태의 응력을 먼저 구한 후 이를 다시 대입해야 하는 2단계 과정으로 되어 있어 일관성이 문제가 되며, 적용의 간명성이 부족하다. 참고문헌[9-11]에서는 이러한 방법과는 달리 복합변형변수를 이용하여 강제운동을 하는 외팔평판의 선형 운동방정식을 유도하였다. 이들은 앞 문헌들에 의한 방법들과 동일하게 효과적이나 유도과정의 일관성과 수치해석을 위한 간명성에서 더 효율적임을 보여주고 있다. 따라서 본 논문에서는 이 방법에 근거한 운동방정식을 이용하여 진동 해석을 실시하였다.

본 연구의 목적은 집중질량을 가진 외팔평판의

* 한양대학교 대학원

** 한양대학교 기계공학부

회전에 따른 고유진동수와 모드형상의 변화를 조사하고 집중 질량 효과가 그들에 미치는 영향을 고찰하는 데 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 참고문헌[11]에 근거한 운동방정식을 소개하고, 이를 무차원화된 진동방정식 형태로 변환하였다. 3장에서는 2장에서 유도된 진동방정식에 근거하여 Rayleigh-Ritz 모드법을 사용해서 수치 해석을 실시하고 결과를 토의하였다. 마지막으로 4장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

2. 진동방정식

Fig. 1은 반경 r 인 강체봉에 부착된 두께 h , 가로 a , 세로 b 의 외팔 평판의 모습을 보여준다. 이 평판은 (c, d) 의 위치에 집중질량 m 을 가지며 각 속도 Ω 로 회전하고 있다. 평판의 단위면적당 질량을 ρ , 포아손비를 ν , 굽힘강성계수를 D 라 하면 운동 방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다 (참고문헌[11] 참조).

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + m \phi_i(c, d) \phi_j(c, d) \right\} \ddot{q}_j \right. \\ & - \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p \phi_i \phi_j dx dy + m \phi_i(c, d) \phi_j(c, d) \right\} q_j \\ & + \left\{ \int_0^b \int_0^a \beta (\phi_{i,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{i,yy} \phi_{j,yy} \right. \\ & + \nu \phi_{i,xx} \phi_{j,yy} + \nu \phi_{i,yy} \phi_{j,xx} \\ & + 2(1-\nu) \phi_{i,xy} \phi_{j,xy}) dx dy \Big\} q_j \\ & + r \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \rho_p (a-x) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \\ & + m \int_0^c \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \Big\} q_j \\ & + \Omega^2 \left\{ \int_0^b \int_0^a \frac{\rho_p}{2} (a^2 - x^2) \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx dy \right. \\ & \left. + m c \int_0^c \phi_{i,x}(x, d) \phi_{j,x}(x, d) dx \right\} q_j \Big] = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 아래 첨자중 콤마의 뒤에 나타나는 것들은 이에 대한 편미분을 의미한다. 예를 들어 $\phi_{i,xx}$ 는 ϕ_i 를 x 로 두 번 편미분한 것을 의미한다. ϕ_i 와 q_j 는 평판의 굽힘방향 변위 w 를 표시하기 위해 사용되는 모드 함수와 일반 좌표들이며 상호간에

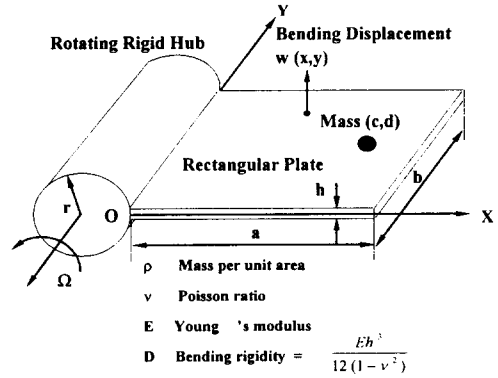


Fig.1 Configuration of a rotating cantilever plate with a concentrated mass

다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (2)$$

여기서 μ 는 사용된 모드의 개수이다. 식 (1)은 참고문헌[12]에 나타난 집중 질량의 영향을 고려한 외팔보의 운동 방정식과 유사성을 가지고 있으며, 회전각속도의 절대값인 Ω 와 관련된 3개의 항들을 포함하고 있다. 이중 첫째항은 Ω 의 증가에 따라 강성을 감소시키는 역할을 하는 데 반해서, 둘째와 셋째항은 Ω 의 증가에 따라 강성을 증가시키는 역할을 한다.

식(1)을 무차원화된 형태로 만들기 위해서 무차원 변수와 무차원 매개변수, 그리고 함수들을 다음과 같이 정의하여 사용한다.

$$\begin{aligned} \tau & \equiv \frac{t}{T} \\ \xi & \equiv \frac{x}{a} \\ \eta & \equiv \frac{y}{b} \\ \gamma & \equiv \frac{c}{a} \\ \delta & \equiv \frac{d}{b} \\ z_j & \equiv \frac{q_j}{a} \\ \alpha & \equiv \frac{m}{\rho_p ab} \\ \lambda & \equiv \frac{a}{b} \\ \omega & \equiv \frac{\Omega}{\Omega_r} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma \equiv \frac{\tau}{a}$$

$$\psi_i(\zeta, \eta) \equiv \phi_i(x, y)$$

여기서 Ω_r 과 T 는 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\Omega_r = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{D}{\rho a^4}} \quad (4)$$

식 (3)을 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} z_j \right. \\ & - \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} z_j \\ & + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \lambda^4 \psi_{i,m} \psi_{j,m} + \nu \lambda^2 \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,m} \right. \\ & \quad \left. + \nu \lambda^2 \psi_{i,m} \psi_{j,\zeta\zeta} + 2(1-\nu) \lambda^2 \psi_{i,\zeta\eta} \psi_{j,\zeta\eta}) d\zeta d\eta \right\} z_j \\ & + \omega^2 \alpha \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ & \quad \left. + \alpha \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} z_j \\ & + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\xi^2) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ & \quad \left. + \alpha \gamma \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} z_j \Big] = 0 \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

식(5)를 이용해 회전하는 외팔 평판의 진동해석을 수행하기 위해서 무차원 일반좌표 행렬을 다음과 같은 조화함수로 나타낸다.

$$\mathbf{z} = e^{j\omega\tau} \mathbf{Z} \quad (6)$$

여기서 \mathbf{z} 은 z_j 를 요소로 갖는 기동행렬이며, ω 는 고유진동수와 Ω_r 의 비를 나타내고, \mathbf{Z} 는 각 고유진동수에서의 모드형태를 나타내는 기동행렬이다. 식 (6)에서 j 는 허수를 나타내는 기호로 사용되고 있다. 식 (6)을 식 (5)에 대입하여 정리하면 다음 같은 정규 진동식을 얻을 수 있다.

$$\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{Z} = \mathbf{K} \mathbf{Z} \quad (7)$$

여기서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 $\mu \times \mu$ 의 크기를 갖는 정방행렬로 이를 구성하는 요소들은 다음과 같이 표시된다.

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} = & -\omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \psi_i \psi_j d\zeta d\eta + \alpha \psi_i(\gamma, \delta) \psi_j(\gamma, \delta) \right\} \\ & + \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (\psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,\zeta\zeta} + \lambda^4 \psi_{i,m} \psi_{j,m} + \nu \lambda^2 \psi_{i,\zeta\zeta} \psi_{j,m} \right. \\ & \quad \left. + \nu \lambda^2 \psi_{i,m} \psi_{j,\zeta\zeta} + 2(1-\nu) \lambda^2 \psi_{i,\zeta\eta} \psi_{j,\zeta\eta}) d\zeta d\eta \right\} \\ & + \omega^2 \alpha \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ & \quad \left. + \alpha \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} \\ & + \omega^2 \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (1-\xi^2) \psi_{i,\zeta} \psi_{j,\zeta} d\zeta d\eta \right. \\ & \quad \left. + \alpha \gamma \int_0^{\gamma} \psi_{i,\zeta}(\zeta, \delta) \psi_{j,\zeta}(\zeta, \delta) d\zeta \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

3. 해석결과 및 토의

본장에서는 2장에서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 모드함수들은 가로세로 방향 보 함수를 이용해서 구한다. 이 과정은 참고문헌[14~16]에 잘 나타나 있다. 본 논문과 관련되어 사용된 보함수의 개수는 가로방향 5개, 세로 방향 7개이며 따라서 35개의 평판 모드가 사용된 것이다. 본 논문에서는 평판의 가장 낮은 5개의 고유진동수 및 모드형상을 관찰하려 하므로, 여기서 사용된 모드개수는 수치해석결과의 수렴에 충분한 것이라 할 수 있다.

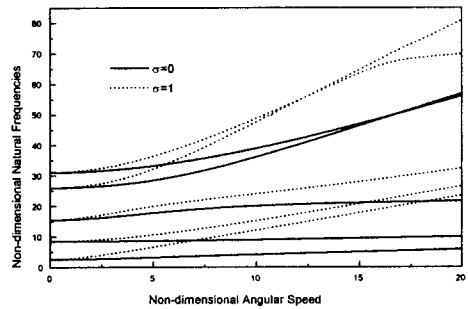
Table 1에서는 2가지의 회전축반경비와 3가지의 회전각속도의 경우에 대해 정사각형 외팔평판의 고유진동수 결과들을 집중질량의 크기를 변화시켜 가며 서로 비교하고 있다. 직관적으로 예측되듯이 집중질량의 증가는 고유진동수의 감소를 초래한다. 그러나 네 번째 고유진동수 변화를 살펴보면 α 값 증가가 회전시 고유진동수의 증가율을 오히려 더 키치게하여 어느 이상의 회전각속도에 이르면 더 큰 고유진동수 값을 갖게 되는 것을 관찰할 수 있다. 또한 집중질량이 $\gamma=1$, $\delta=0.5$ 의 위치에 주어진다면 동일 회전각속도에 대하여 α 값은 두 번째의 고유진동수 값에 아무런 영향을 미치지 못하는 것을 알 수 있다. 이것은 2번째 모드의 경우 Anti-symmetric 모드로 중앙선을 절선으로 가지고 있어서 집중질량이 그곳에 놓여도 회전에 따른 절

Table 1 Comparison of the lowest five natural frequencies ($\gamma=1, \delta=0.5$)

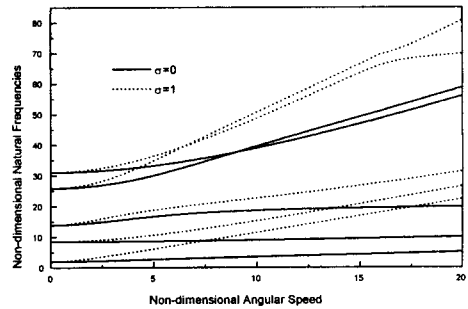
Cases	Mode	$\alpha=0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.5$	
$\sigma=0$	$\omega=1$	1	3.5157	2.6093	2.0207
		2	8.5328	8.5328	8.5328
		3	21.5207	15.6994	14.1047
		4	27.3529	26.1481	26.0777
		5	31.2062	31.2062	31.2062
$\sigma=0$	$\omega=2$	1	3.5904	2.7141	2.1496
		2	8.5507	8.5507	8.5507
		3	21.8679	16.0468	14.6046
		4	27.3843	26.4244	26.5851
		5	31.4770	31.4770	31.4770
$\sigma=0$	$\omega=10$	1	5.0491	4.1949	3.5714
		2	9.0322	9.0322	9.0322
		3	26.7608	20.1175	18.6652
		4	32.3499	36.2398	39.0776
		5	39.0776	39.0776	39.6905
$\sigma=1$	$\omega=1$	1	3.7424	2.8633	2.3208
		2	8.6240	8.6240	8.6240
		3	21.7067	15.8792	14.3434
		4	27.3941	26.2836	26.2925
		5	31.3502	31.3502	31.3502
	$\omega=2$	1	4.3805	3.5887	3.1214
		2	8.9087	8.9087	8.9087
		3	22.5802	16.6915	15.3960
		4	27.5565	26.9810	27.4526
		5	32.0430	32.0430	32.0430
	$\omega=10$	1	13.2727	12.1946	11.5311
		2	15.3109	15.3109	15.3109
		3	29.7924	24.0589	22.6982
		4	43.2890	47.7297	48.8505
		5	48.8505	48.8505	50.8312

선의 변화가 일어나지 않기 때문이다. 이러한 현상은 5번째 모드에도 유사하게 나타나나 5번째 모드는 세로 방향 절선을 가지므로 회전 각속도가 작을 때는 2번째 모드와 유사하게 고유진동수가 일정하게 유지되나 회전각속도가 더 커지게 되면 고유진동수가 변화하게 된다.

Fig.2는 두 경우의 α 값에 대하여 회전각속도의 증가에 따른 가장 낮은 다섯 개의 고유진동수의 변화를 보여주고 있다. 그림에서 직선은 축반경의



(a) $\alpha=0.2, \gamma=1.0, \delta=0.5$



(b) $\alpha=0.5, \gamma=1.0, \delta=0.5$

Fig. 2 Variations of the lowest five natural frequencies for square plates

평판길이에 대한 비가 0인 경우이고 점선은 그 비가 1인 경우이다. 이 결과는 평판 회전각속도의 증가가 모든 고유진동수의 증가를 초래하는 것을 보여주며, 축반경의 증가는 이 현상을 가속시키고 있는 것을 보여준다. 집중질량 효과가 고려되지 않은 ($\alpha=0$) 경우는 참고문헌 [13]에 그 결과가 자세히 언급되어 있다. 이 그림은 또한 무회전시 네 번째 고유진동수가 회전시 큰 고유진동수 증가율로 인하여 어느 회전각속도에 이르면 기존 다섯 번째 고유진동수의 값보다 커지게 된다는 것을 보여주는데, 이 현상은 집중질량 α 와 회전축 반경비 σ 가 클수록 더 낮은 회전각속도에서 나타난다.

Fig. 3은 첫 번째 고유진동수에 미치는 집중질량 크기 및 그 위치의 영향을 보여주는데 집중질량 크기가 증가할수록 고유진동수의 변화폭이 커지게

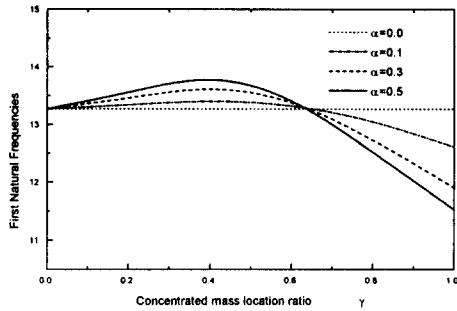
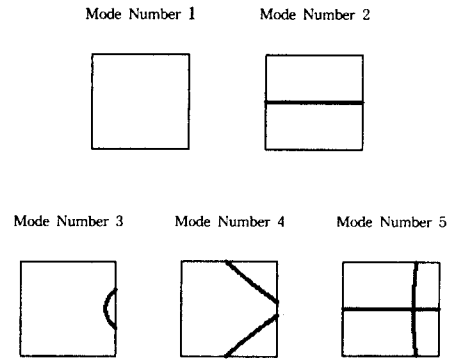


Fig. 3 Concentrated mass magnitude effect on the first natural frequency

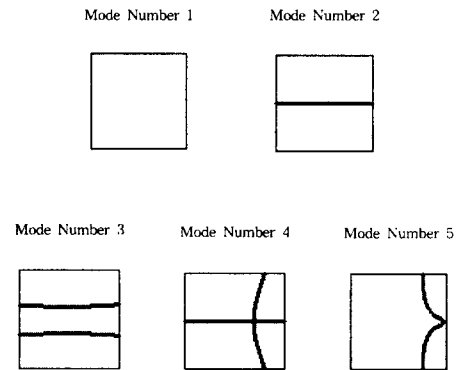
됨을 알 수 있다. 여기서 특기할 만한 사항은 α 값에 관계없이 고유진동수의 값이 같아지는 집중 질량의 위치가 존재한다는 점이다. 이 사실은 보의 연구에서도 나타났던 특성이다.

Fig. 4는 $\alpha=0.5$ 의 집중질량이 평판의 끝단 중앙에 위치할 때, 평판이 회전하기 전의 모드들의 절선들을 (a)에 나타내고 있고, 회전각속도 $\omega=20$ 일 때의 모드들의 절선들을 (b)에 나타내고 있다. (a)에서 첫 번째 모드는 1st Bending, 두 번째 모드는 1st Torsion, 세 번째 모드는 2nd Bending, 네 번째 모드는 Chordwise Bending, 그리고 다섯 번째 모드는 Bending과 Torsion의 조합모드이다. 3번째 모드는 회전각속도의 증가에 따라 (a)에서의 원호가 점점 안으로 밀려 들어가 (b)의 모습으로 변화된다. Fig. 2에서 네 번째와 다섯 번째 궤적이 서로 교차한 것인지 아닌지를 (휨현상이 발생한 것인지) 판별하려면 그 부분을 더욱 확대하여 그려보면 된다. 그런데 이를 판별하는 방법으로 서로 접근하는 두 모드의 형상에 근거해 판별하는 방법이 있다. 즉 두 궤적이 교차한 것이 아니고 휨 현상이 일어난 것이라면 (a)의 네 번째 모드가 (b)의 네 번째 모드로 변해야 한다. 그러나 (a)의 네 번째 모드는 Symmetric 모드이고 (b)의 네 번째 모드는 Anti-symmetric 모드이므로 그러한 변화는 불가능하다. 따라서 그림 2에서 네 번째와 다섯 번째 고유진동수 궤적은 서로 교차한 것이다.

Fig. 5는, 끝단 중앙에 위치한 네 경우의 집중질량 α 값에 대하여, 회전각속도 변화에 따라 변화하는 세 번째 모드의 절선을 중첩하여 보여주고



(a) Lowest five mode shapes without rotation



(b) Lowest five mode shapes with rotation

Fig. 4 Nodal line patterns of lowest five mode shapes for square plates with a concentrated mass ($\alpha=0.5$)

있다. 중첩된 절선들의 모습에서 일정한 위치 존재하는 절점들을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 임의 위치에 집중질량을 가진 회전하는 외팔 평판의 운동방정식에 근거하여 진동 모델링을 유도하고 해석을 수행하였다. 집중질량 크기, 평판 회전수 및 회전축 반경의 변화에 따른 고유진동수의 변화와 이에 수반되는 모드형상의 변화를 관찰할 수 있었으며 특히 집중질량 효과가

고유진동수 궤적간 교차현상에 미치는 영향을 관찰할 수 있었다. 또한 회전각속도 변화에 따른 모드형상의 절선 변화에도 불구하고 일정한 위치에 존재하는 공통절점들의 존재도 확인할 수 있었으며, 집중질량의 효과가 그 절점들의 위치에 미치는 영향을 확인할 수 있었다.

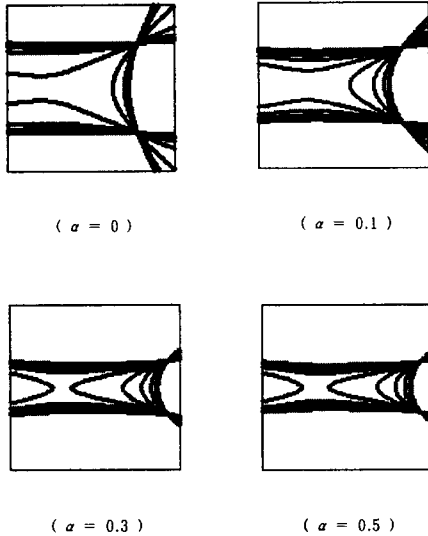


Fig. 5 Nodal line superposition of the 3rd mode for four different concentrated mass

참고문헌

[1] Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
 [2] Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", NASA TN No. 516.
 [3] Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, pp. 28-30.
 [4] Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *J. Sound and Vibration*, 56, pp. 175-185.
 [5] Bhat, R., 1986, "Transverse Vibrations of a rotating Uniform Cantilever Beam with Tip

Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *J. Sound and Vibration*, 105(2), pp. 199-210.

[6] Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, pp. 233-248.
 [7] Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, 97(3), pp. 429-449.
 [8] Subrahmanyam, K.B., Kaza, K.R.V., Brown, G.V. and Lawrence, C., 1987, "Nonlinear Vibration and Stability of Rotating, Pretwisted, Preconed Blades Including Coriolis Effects", *J. Aircraft*, Vol. 24, No. 5, pp. 342-352.
 [9] Ryan, R.R. and Yoo, H.H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling", SDIO NASA Conference Proceedings, San Diego, California, January.
 [10] 유홍희, 1992, "강체운동을 하는 탄성평판의 선형 동적 모델링", 한국항공우주학회지 학술논문, 제 20권, 제 4호, pp. 891-898.
 [11] 유재곤, 유홍희, 1997, "강체운동을 하는 집중 질량을 가진 탄성평판의 동적해석", 한국항공우주학회 추계학술대회 논문집, pp. 158-163.
 [12] 유홍희, 1996, "집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석", 대한기계학회논문집, 제 20권, 제 8호, pp. 2516-2523.
 [13] 유홍희, 1993, "회전하는 외팔평판의 진동해석", 대한기계학회논문집, 제 17권, 제 3호, pp. 652-657.
 [14] Young, D., 1950, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method." *Journal of Applied Mechanics*, 17(4), pp. 448-453.
 [15] Barton, M. V., 1951, "Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates", *Journal of the Applied Mechanics*, 18(1), pp. 129-134.
 [16] Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.