

고주파 래틀링 소음의 기초 연구

°이금정*, 박철희**, 주재만***

A Basic Study of High Frequency Rattling Noise

Kum-Jeong Lee, Chol-Hui Pak, Jae-Man Joo

ABSTRACT

Since rattling noise, which occur in mechanical linkage with free play or glove boxes in passenger cars, play an important role in the generation of industrial noise and vibration, it is interest to study these dynamics. A difference equations are derived which described the motions of a mass constrained by pre-compressed spring and forced by a high frequency base excitation. Two types of saddle are founded from these difference equations and the stable and unstable manifolds are constructed in these saddle point. For a certain region in a parameter space of exciting displacement and coefficient of restitution, transversal intersections of stable and unstable manifolds exist. Therefore it is founded that there are large families of periodic and irregular non-periodic motions in rattling system, i.e. chaos motion is observed.

1. 서론

기계 구조물에서 소음 및 진동을 유발시킬 수 있는 충격지배모델(impact governed model)들이 다각도로 연구되어 왔다. Wood와 Bryne[1], Holmes[2]는 Bouncing-Ball 문제에 있어서 어떤 조절 매개변수(control parameter)의 변화에 따라 주기운동이 발생됨을 보였고, Smale[3]의 편자(horseshoe)와 호모클리닉 궤도의 횡단교차(transversal intersection of homoclinic orbit)를 근거로 혼돈운동(chaotic motion)이 발생함을 확인하였다.

본 연구에서는 충격 지배 모델의 일종인 래틀링계(rattling system)에 대하여 기본 연구를 수행하였다.

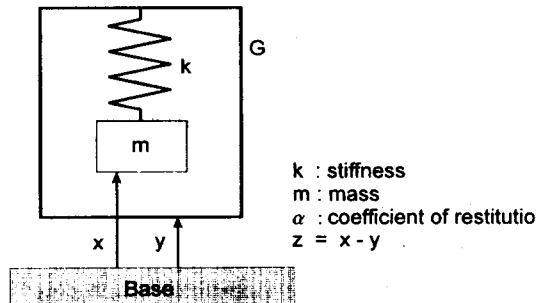


Fig. 1 An ideal model of rattling system

Fig. 1은 래틀링계의 일례라 할 수 있는 자동차의

* 인하대학교 대학원 기계공학과
 ** 인하대학교 기계공학과, 정회원
 *** 삼성전자 생활시스템연구소, 정회원

글로브박스(glove box)를 이상화한 것이다. 여기에서, m 은 글로브박스의 덩개를, k 는 덩개를 고정하는 압축 스프링을, G 는 글로브박스를 나타내며, α 는 m 과 G 사이의 반발계수이다. 또한 본 모델에서의 기준 좌표는 Base를 중심으로 설정하였으며, x 는 Base에서부터 덩개 m 의 변위를, y 는 Base로부터 상자 G 의 변위를 나타낸다. 스프링 k 는 초기에 Δ 만큼 압축되어 있고 상자 G 는 Base를 중심으로 $y(t) = Y \sin \omega t$ 로 가진을 받는다고 가정하였다.

G 의 가진으로 인하여 어떤 가진변위 Y 값에 대하여 연속적으로 G 와 m 이 분리 되었다가 충돌하는 래틀링 운동이 발생하게 된다. 이때 G 와 m 의 충돌과 다음 충돌 사이를 임의의 (j) 번째 단계로 보고 (j) 번째 충돌과 $(j+1)$ 번째 충돌의 시간 간격을 비행시간(flying time) F_j 라 하면 Fig. 1의 이상화 모델에 대하여 래틀링 사상을 구성할 수 있다. (j) 번째 단계는 시간이 t_j 일때 초기조건 $z(t_j) = 0$, $\dot{z}(t_j) = V_j$ 로 운동을 시작하고 (j) 번째 비행시간(flying time) F_j 이후 $(j+1)$ 번째 운동을 시작한다. 이 때 시간을 t_{j+1} 라하며, G 와 m 의 반발계수(coefficient of restitution) α 에 의하여 $(j+1)$ 번째 운동의 초기속도가 다시 결정된다. m 의 운동은 각 단계의 초기속도와 그 단계에서의 비행시간으로 설명되어 질 수 있고, 따라서 상태 공간(phase space)은 시간 t 와 속도 V 가 되고 이 두 상태변수(state variable)에 의해 2차원 사상(two dimensional map)을 구성할 수 있다.

먼저 각 단계에서 m 의 운동을 설명하는 지배 방정식은 식(1)과 같다. 여기서 z 는 x 와 y 의 상대변위이고 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 이다.

$$\ddot{z} + \omega_n^2 z = -\omega_n^2 \Delta + Y \omega^2 \sin \omega t \quad (1)$$

식 (1)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z(t) = & \left(\Delta + \frac{Yr^2}{(r^2-1)} \sin \omega t_j \right) \cos \omega_n(t-t_j) \\ & + \left(\frac{V_j}{\omega_n} + \frac{Yr^3}{(r^2-1)} \cos \omega t_j \right) \sin \omega_n(t-t_j) \quad (2) \\ & - \Delta - \frac{Yr^2}{(r^2-1)} \sin \omega t \end{aligned}$$

여기에서 r 은 가진주파수와 계의 고유진동수의 비로서 $\sqrt{\omega/\omega_n}$ 이다.

식 (2)로부터 비행시간 F_j 와 $(j+1)$ 단계의 초기 속도를 구할 수 있으므로 식(3)과 같이 사상을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} t_{j+1} &= t_j + F_j \\ V_{j+1} &= -\alpha \dot{z}(t_j + F_j) \end{aligned} \quad (3)$$

식 (2)와 식(3)을 무차원 변수로 나타내면 다음과 같다

$$\begin{aligned} \phi_{j+1} &= \phi_j + f(\phi_j, v_j) \\ v_{j+1} &= \alpha g(\phi_j, v_j) \end{aligned} \quad (4)$$

여기에서 $\phi = \omega t$, $f = \omega F$, $v = \frac{V}{\omega_n \Delta}$, 그리고 $\Gamma = r^2 Y / \Delta$ 이다. $f(\phi_j, v_j)$ 와 $g(\phi_j, v_j)$ 는 식 (2)와 식(4)로부터 각각 식(5)와 식(6)으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma \sin(\phi_j + f_j)}{r^2 - 1} + \left(1 + \frac{\Gamma \sin \phi_j}{r^2 - 1}\right) \sin \frac{f_j}{r} \\ - \left(v_j + \frac{r \Gamma \cos \phi_j}{r^2 - 1}\right) \sin \frac{f_j}{r} = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g(\phi_j, v_j) &= -\frac{\dot{z}}{\omega_n \Delta} \\ &= \frac{r}{r^2 - 1} \Gamma \cos(\phi_j + f) \\ &+ \left(1 + \frac{1}{r^2 - 1} \Gamma \sin \phi_j\right) \sin \frac{f}{r} \\ &- \left(v_j + \frac{r}{r^2 - 1} \Gamma \cos \phi_j\right) \cos \frac{f}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

2. 고주파 래틀링 소음

식 (4)와같은 사상을 구성함에 있어서 비행시간 f 를 해석적인 명백한 식으로 표현하는 것이 곤란하므로 간략화한 비행시간으로부터 사상을 구성하고 그 해석을 시도하였다. 만일 r 이 1보다 아주 크다고 가정하면 식(5)를 간략화 할 수 있고 따라서 간략화된 비행시간을 구해 내면 식(7)과 식

(7-1)과 같은 고주파 래틀링 사상(high-frequency rattling map)을 구할 수 있다.

$$\phi \mapsto \phi + f(v, \phi) \quad (7)$$

$$v \mapsto \alpha g(v, \phi)$$

여기에서,

$$W = v + A \cos \phi$$

$$f(v, \phi) = 2r \tan^{-1} W$$

$$g(v, \phi) = v + A \cos \phi + A \cos(\phi + f) \quad (7-1)$$

$$A = \frac{r}{r^2 - 1} \Gamma$$

식 (7)과 (7-1)에 의해 표현된 고주파 래틀링 사상은 치환 $\phi \mapsto \phi + 2n\pi$ 에 불변함으로 (ϕ, v) 상태공간은 실린더 $(S^1 \times R)$ 임을 알 수 있다. A 는 가진력의 진폭, α 는 $0 < \alpha < 1$ 로써 감쇠력을 나타내므로, 일반적인 가진과 감쇠가 존재하는 진동계에서 존재하는 혼돈운동[4]이 래틀링 사상에서도 존재할 것으로 예측된다.

3. 고정점(fixed point)과 그 안정성 해석

상태공간 ϕ 의 주기성을 이용하면 다음과 같은 고정점을 구할 수 있다. 식 (7)과 (7-1)에서 주기가 1인 고정점 $(\bar{\phi}_n, \bar{v}_n)$ 은 식(8)과 같다. 여기서 n 은 상자의 진동 횟수를 의미하며, 물리적으로 상자의 가진 주파수에 대한 질량 스프링 계의 고유 진동수의 비인 r 에 의해 범위가 정해진다.

$$\begin{cases} \bar{\phi}_n \\ \bar{v}_n \end{cases} = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{1}{A} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tan \frac{n\pi}{r} \right) \\ \frac{2\alpha}{1+\alpha} \tan \frac{n\pi}{r} \end{cases} \quad (8)$$

$$n = 0, 1, \dots, N, \quad N < \frac{r}{2}$$

위 고정점의 안정성은 식(7)과 식(7-1)의 선형사상(linearized map) DF 에 의하여 결정 되어진다.

$$DF = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial f}{\partial \phi} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \alpha \frac{\partial g}{\partial \phi} & \alpha \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기에서,

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -\frac{2rA}{1+W^2} \sin \phi$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2r}{1+W^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = -A \sin \phi - A \sin(\phi + f) - \quad (9-1)$$

$$\frac{2rA}{1+W^2} \sin \phi \sin(\phi + f)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 1 - \frac{2rA}{1+W^2} \sin(\phi + f)$$

또한, 이 선형사상의 고유치는 식(10)과 같다.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left((1+\alpha)(1-\beta) + \sqrt{(1+\alpha)^2(1-\beta)^2 - 4\alpha} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left((1+\alpha)(1-\beta) - \sqrt{(1+\alpha)^2(1-\beta)^2 - 4\alpha} \right)$$

$$\beta = \frac{2rA}{1+W^2} \sin \phi \quad (10)$$

여기서 1보다 작은 α 에 대하여 선형사상의 행렬식은 $\det(DF) = \lambda_1 \lambda_2 = \alpha$ 이므로 주기가 1인 고정점은 단지 싱크점(sink points)과 안장점(saddle points)만이 존재함을 알 수 있다. 또한 분기(bifurcation)는 단지 고유값이 1 또는 -1일때 일어남을 알 수 있다.

식(8)을 식(10)에 대입하면 분기원리(bifurcation theory)에 의하여 A 값에 따라 다른 형태의 고정점을 가지는 것을 알 수 있으며 이 때 분기값(bifurcation value)으로는 다음과 같은 2가지 형태가 있음을 알 수 있다.

$$A_n = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tan \frac{n\pi}{r}$$

$$A_n' = \quad (11)$$

$$\sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tan \frac{n\pi}{r} \right)^2 + \left(\frac{1 + \tan^2 \frac{n\pi}{r}}{r} \right)^2}$$

A_n 은 saddle-node 분기값으로 한 쌍의 고정점이 나타나기 시작하고 A_n' 값에 다르면 안정하던 고정점은 안정성을 잃고 주기 배증 분기(period doubling bifurcation)를 일으킨다.

다음은 A 값에 따른 분기선도(bifurcation diagram)를 각각의 n 값에 따라 나타낸 것이다.

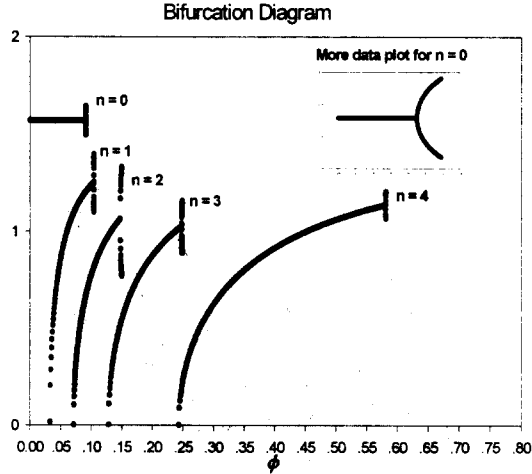


Fig. 2 Bifurcation diagram. Period 1 and period 2 motions appear, $\alpha = 0.8$, $r = 11$

Fig. 2에서 보이듯이 A 가 증가하여 A_n' 에 다르면에 주기가 2인 운동(period 2 motion)이 나타나고 계속되는 2ⁿ 주기의 운동이 나타날 것으로 예측된다.

4. 호모클리닉 궤도의 횡단 교차 (Transversal intersection of homoclinic orbit)

1963년 Smale[3]은 무한히 많은 주기해를 갖는 2차원 diffeomorphism을 제안하였는데 그 형태에 기인하여 Smale 편자(horseshoe)라 불리워 진다. Smale 편자의 존재는 불규칙성이 증가하고 궁극에는 혼돈운동이 나타날 것이라는 증거가 된다. 하지만 불행히도 본 연구에서는 편자의 구성은 이루지 못하였다. 반면에 안장점에서의 안정 다양체(stable manifold)와 불안정 다양체(unstable manifold)는 조절 매개변수가 증가함에 따라 서로 접근하고 결국은 교차함을 보일 수 있었다. 호모클리닉 궤도의 횡단 교차가 존재함은 혼돈운동의 존재를 의미

한다[5]. 또한 특정한 조절 매개변수에서 래틀링 사상(rattling map)의 수치 연구로부터 Hénon[6]이나 다른 2차원 사상에서 구현되는 이상 끌개(strange attractor)가 구현됨을 볼 수 있다.

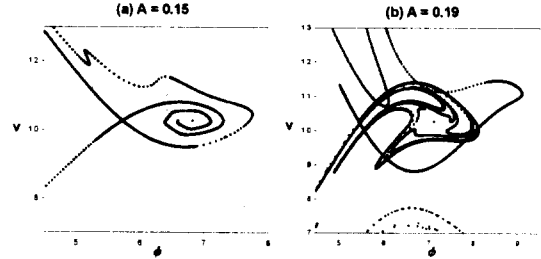


Fig. 3 Stable and unstable manifolds of the $n=3$ saddle point. $\alpha = 0.8$, $r = 11$ (a) $A = 0.15$: sink and saddle (b) $A = 0.19$: transverse homoclinic orbit

Fig. 3 (a)는 $n = 3$ 대역에서 안장점(saddle point)의 안정 다양체(stable manifold)에 의해서 경계지어지는 1주기 싱크(sink)의 흡인영역(domain of attraction)을 나타낸다. 초기 조건은 불안정한 1주기 안장점에서 주어졌으며, Fig. 3 (b)에서와 같이 A 값이 증가함에 따라서 안정 다양체와 불안정 다양체의 횡단 교차가 존재함을 볼 수 있다. 상태공간 ϕ 가 2π 이상이 되는 것은 래틀링 사상의 안정, 불안정 고정점이 2π 의 영역에 걸쳐서 나타나는 특성에 기인하는 그림상의 문제로 상태공간 ϕ 의 범위를 넓혀서 본 것이다.

Fig. 3 (b)에서 볼수있는 안정 다양체와 불안정 다양체간의 교차는 혼돈운동의 증거가 되는 편자의 발생과 맥락을 같이한다. 즉, 안정 다양체 근방의 두점을 초기조건으로 한 두 궤도는 지수함수적으로 서로 벗어나기 때문에 각 궤도의 근사적인 특성을 예측할 수 없게 된다. 환원하면 래틀링 사상에는 혼돈운동을 관찰할 수 있는 매개변수가 존재함을 알 수 있다. 여기서 횡단 교차가 나타나는 조절 매개변수 A 값이 $n = 3$ 대역에서 1주기 주기 궤도 $(\bar{\phi}_3, \bar{v}_3)$ 가 안정한 영역의 값이지만 이것은 수치 실험상 초기 조건을 정확히 택할 수 없는 장애 때문이라고 생각된다.

조절 매개변수의 증가에 따라서 안정적인 1주기 운동(period one motion)은 분기하여 불안정한 안장점이 되고 새로운 두개의 안정적인 2주기 운동

(period two motion)이 발생하게 된다. Fig. 4는 이때의 안장점을 초기조건으로 한 다양체를 나타낸 것이다. 이때도 다양체간의 횡단 교차를 관찰할 수 있다.

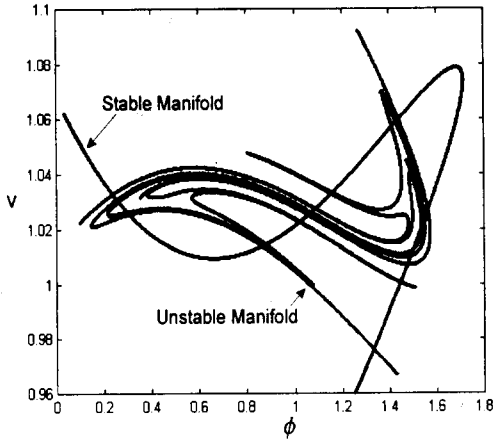


Fig. 3 Stable and unstable manifold of the $n=3$ saddle point(saddle of the second kind).
 $A = 0.265, \alpha = 0.8, r = 11$

래틀링 사상에는 다른 여러 문제에서처럼[1][2] 궤도가 결코 주기적인 끌개로 수렴할 수 없는 매개변수 A 값이 존재한다. Fig. 5는 $n = 3$ 대역에서의 불안정 고정점 $(\phi, v) = (5.4083, 1.0258)$ 를 60,000회 반복하여 사상을 취한 것이다. Hénon의 결과[6]처럼 이상 끌개(strange attractor)가 형성되고 Cantor 집합을 형성하는 것을 볼 수 있다.

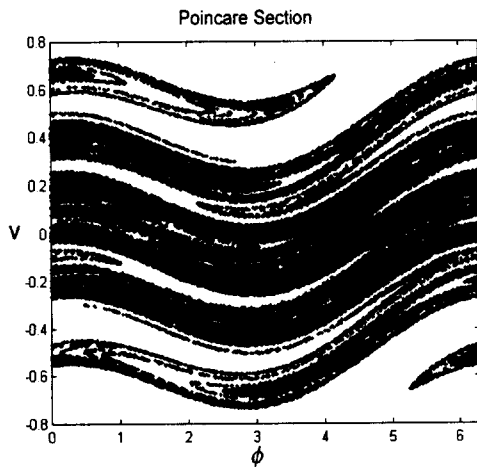


Fig. 5 Poincaré section
 $n = 3, \alpha = 0.8, r = 11, A = 0.20$

Fig. 6은 Fig. 5에서의 불안정 다양체를 나타내며, Fig. 5와 매우 유사함을 알 수 있다. Fig. 5와 Fig. 6에서 보듯이 흡인영역(domain of attraction)이 매우 복잡하게 얽혀 있으며, 따라서 동일한 매개변수에 대하여 서로 다른 끌개(attractor)가 존재할 수 있음을 알 수 있다. 또한 끌개 집합(attracting set)에는 안정한 주기 궤도의 흡인영역이 존재할 것이다. 다만 흡인 영역의 협소함과 복잡함에 기인한 수치 실험의 한계상 관찰되어 질 수 없을 뿐이다.

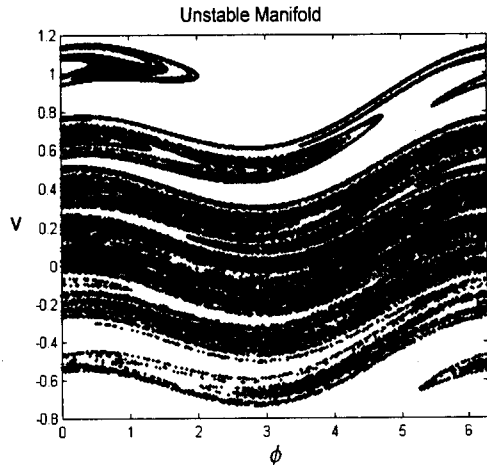


Fig. 6 Unstable manifold
 $n = 3, \alpha = 0.8, r = 11, A = 0.20$

5. 결론

본 연구를 통하여 충격 지배 모델의 하나인 2차원 고주파 래틀링 사상을 구성하였고 또한 그 사상의 기본적인 해석을 시도하였다. 편자가 성립되거나 호모클리닉 궤도의 횡단 교차(transversal intersection of the homoclinic orbit)의 존재는 혼돈운동의 존재를 의미한다. 래틀링 사상에서도 호모클리닉 궤도의 횡단 교차를 볼 수 있었으며 이것으로 수치 실험을 통해서 볼 수 있었던 복잡한 운동의 양상들이 혼돈운동을 증명하기에 충분하리라 생각된다.

래틀링에 의해 유발되는 소음은 래틀링계의 동역학적 현상을 따라갈 것이다. 이러한 래틀링 소음의 발생기구는 가진력의 크기, 주파수비 또는 반발계수 등의 매개변수에 따라 매우 복잡하게 나타나며, 특히 어떤 매개변수 영역에서 혼돈운동이 발생함을 확인하였다.

6. 참고문헌

1. L. A. Wood and K. P. Bryne, 1981, "Analysis of a random repeated impact process," *Journal of Sound and Vibration*, 78, 329-345.
2. P. J. Holmes, 1982, "The Dynamics of Repeated impact with a Sinusoidally Vibrating Table," *Journal of Sound and Vibration*, 84(2), 173-189.
3. S. Smale, 1963, "Diffeomorphisms with periodic points," in *Differential and Combinatorial Topology*(editor S. S. Cairns), Princeton University Press.
4. P. J. Holmes and F. C. Moon, 1983, "Strange Attractor and Chaos in Nonlinear Mechanics," *Journal of Applied Mechanics*, 50, 1021-1032.
5. J. Gukenheimer and P. Holmes, 1983, *Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 102-116
6. M. Hénon, 1976, "A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor," *Communications in Mathematical Physics* 50, 69-77.
7. T. S. Parker and L. O. Chua, 1989, *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer-Verlag, 154-161.