

직접 경계요소법과 연속계 설계민감도 해석법을 이용한 소음 설계 민감도 해석

°왕세명* · 이제원**

Global Acoustic Design Sensitivity Analysis using Direct BEM and Continuum DSA

Semyung Wang and Jeawon Lee

ABSTRACT

In this paper, a global acoustic design sensitivity analysis (DSA) of field point pressure with respect to structural sizing design variables is developed. Firstly acoustic sensitivity is formulated and implemented numerically. And it is combined with continuum structural sensitivity to obtain the global acoustic design sensitivity. For this procedure GASA (global acoustic design sensitivity analyzer) has been developed. A half scale of automobile cavity model is considered in this paper. In order to confirm accuracy of the results of global acoustic DSA obtained by GASA, it is compared with the result of central finite difference method. In order to reduce computation time, Rayleigh approximated solution is evaluated and compared with the solution which used every nodal velocities. Also the acoustic optimization procedure is performed using design sensitivities. From these numerical studies, it can be shown that global acoustic DSA is a useful tool to improve acoustic problems.

1. 서 론

대개의 경우, 구조물의 진동으로 인하여 야기되는 소음을 컴퓨터를 이용하여 해석적으로 예측하는 데에는 두 가지 방법이 함께 사용된다. 우선 유한요소법⁽¹⁾을 이용하여 구조물의 진동을 계산하고, 이로 인해 야기되는 소음을 경계요소법⁽²⁾을 이용하여 계산하는 것이다. 물론 통계적 에너지 해석법(statistical energy analysis)⁽³⁾등의 방법을 이용해 음장의 해석과 예측이 가능하지만, 여기에서

는 유한요소법과 경계요소법에 초점을 맞추어 생각하기로 한다.

위의 방법으로 음장을 예측한 후에는 예상되는 문제점의 해결이나 성능의 향상을 위하여 설계를 변경하고 최적화하게 되는데, 이때 설계 민감도는 매우 중요한 역할을 하게 된다. 이 논문에서는 소음 성능 향상을 위한 구조물의 설계 변경에 사용하기 위한 소음설계민감도를 유도하고, 이를 이용하여 간단한 예제에 대해 최적화를 수행하였다.

J.P.Coyette 등에 의해 비슷한 연구가 수행되고 발표되었으나⁽⁴⁾, 이번 연구에서는 음향 민감도와 구조물의 설계민감도에 모두 해석적 방법을 이용

* 정회원, 광주과학기술원 기전공학과

** 정회원, 광주과학기술원 기전공학과 박사과정

함으로써 계산의 효율과 정확성의 향상을 도모하였다. 또한 소음설계민감도의 활용에 가장 큰 장애로 생각되어지는 설계민감도의 계산 시간을 줄이기 위해 Rayleigh 근사법을 제안하고, 이를 계산하여 정확하게 계산된 값과 비교함으로써 그 실용 가능성을 확인하였다.

2. 구조물의 크기 설계 민감도 해석

구조-음향 시스템의 변분식은 식 (1)과 같으며 이 식은 식 (2)-(4)의 복소수 벡터계 Q에 속한 모든 허용 가상상태(kinematically admissible virtual state)를 만족시켜야 한다.^(5,6)

$$b_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \int_{\Gamma_s} \mathbf{p} \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{n} d\Gamma + d(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) - \omega^2 \int_{\Omega} \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{z}^T \mathbf{n} d\Gamma = l_u(\bar{\mathbf{z}}) \quad (1)$$

$$Q = \{(\mathbf{z}, \mathbf{p}) \in Z \otimes P \mid \mathbf{f}_p = \mathbf{p} \mathbf{n} \text{ and } \nabla \mathbf{p}^T \mathbf{n} = \omega^2 \rho_0 \mathbf{z}^T \mathbf{n}, x \in \Gamma^* \equiv \Omega^* \} \quad (2)$$

$$Z = \{ \mathbf{z} \in [H^1(\Omega^*)]^3 \mid G\mathbf{z} = 0, x \in \Gamma^* \} \quad (3)$$

$$P = \{ \mathbf{p} \in H^1(\Omega^*) \mid \nabla \mathbf{p}^T \mathbf{n} = 0, x \in \Gamma^{**} \} \quad (4)$$

식 (1)에서, \mathbf{z} 와 \mathbf{p} 는 원래 변위와 음압, ω 는 작동 주파수, $b_u(\bullet, \bullet)$ 와 $d_u(\bullet, \bullet)$ 는 sesquilinear 형상이고 $l_u(\bullet, \bullet)$ 는 semilinear 형상이며 식 (5)-(8)과 같다.

$$b_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = - \int_{\Omega} \omega^2 \bar{\mathbf{m}}^* \mathbf{z}^T \mathbf{z} d\Omega + i\omega c_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) + a_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \quad (5)$$

$$c_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) = \iint_{\Omega} \bar{\mathbf{z}}^T C_u \mathbf{z} d\Omega$$

and (6)

$$a_u(\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}) \equiv \iint_{\Omega} \bar{\mathbf{z}}^T A_u \mathbf{z} d\Omega$$

$$d(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) \equiv (B\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}) = \iint_{\Gamma^*} \left(-\frac{\omega^2}{\beta} \mathbf{p} \bar{\mathbf{p}} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \mathbf{p}^T \nabla \bar{\mathbf{p}} \right) d\Omega \quad (7)$$

$$l_u(\bar{\mathbf{z}}) \equiv \iint_{\Gamma_s} \mathbf{f}^T \bar{\mathbf{z}} d\Omega \quad (8)$$

식 (5)에서 C_u 는 구조물의 감쇄에 해당하는 선형 미분 연산자이고, A_u 는 구조물의 4차 대칭 편미분 연산자이다. 구조-음향 복합체의 조화운동은 구조 변위와 음압의 복소수로 나타낼 수 있다. 보조변수법(adjoint variable method)을 이용한 조화운동하의 구조물의 어느 한지점 \hat{x} 에서의 구조 변위는 식 (9)로 나타낼 수 있다.

$$\Psi_{z_i} = \iiint_{\Omega} \hat{\delta}(x - \hat{x}) \mathbf{z}_i d\Omega, \quad i=1,2,3 \quad (9)$$

식 (9)를 일차 변분(first variation)하면 식 (10)이 되며 식 (11)은 보조변수법을 이용한 설계민감도 식이다. 보조반응은 보조식 (12)에서 계산되며 이 보조식은 모든 가상상태를 만족하여야한다.

$$\Psi'_z = \iiint_{\Omega} \hat{\delta}(x - \hat{x}) \mathbf{z}' d\Omega \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_z &= l'_{\delta u}(\lambda) - b'_{\delta u}(\mathbf{z}, \lambda) \\ &= \iint_{\Gamma^*} \mathbf{f}_u^T \lambda^* \delta u \\ &\quad + \iint_{\Omega} \omega^2 \mathbf{m}_u \lambda^{*T} \mathbf{z} \delta u d\Omega - i\omega c'_{\delta u}(\mathbf{z}, \lambda) - a'_{\delta u}(\mathbf{z}, \lambda) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} b_u(\bar{\lambda}, \lambda) &= \iint_{\Gamma_s} \bar{\eta} \lambda^{*T} \mathbf{n} d\Gamma + d(\bar{\eta}, \eta) - \omega^2 \iint_{\Gamma^{**}} \bar{\eta}^* \lambda^T \mathbf{n} d\Gamma \\ &= \iint_{\Omega} \hat{\delta}(x - \hat{x}) \bar{\lambda}_i^* d\Omega \end{aligned} \quad (12)$$

식 (11)-(12)에서 λ 와 η 는 보조변위와 음압을 나타내고 (*)는 공액복소수를 나타낸다. 크기 설계 변수 u 는 오직 구조물에만 해당되기 때문에 식 (10)에서는 오직 식 (11) 혹은 (12)의 구조쪽 보조변위들만 요구된다. 이 보조변위들은 같은 구조물의 다른 힘에서 계산된다. 식 (10)의 설계민감도는 공기가 없는 구조물에서도 또한 사용할 수 있다. 여기에서 구해진 구조 변위에 대한 설계민감도는 다음 장에서 $j\omega$ 를 곱해 구조물의 속도에 대한 설계민감도로 사용된다.

3. 소음 설계 민감도

구조물의 진동으로부터 야기되는 내부 또는 외부의 소음을 경계요소법을 이용하여 예측하는 경우에는 Helmholtz 경계적분식^(7,8)이 사용된다.

$$c(X)p_c(X) = \int_S \left\{ p_s(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n_Y} + j\rho\omega v_n(Y)G(X, Y) \right\} dS(Y) \quad (13)$$

식 (12)에서 $p_c(X)$ 은 수음점 X에서의 압력을 의미하며, $p_s(Y)$ 는 구조물의 경계면 Y에서의 압력을 의미한다. 만약 수음점 X가 구조물의 경계면 상에 존재한다고 보면, 식 (13)을 구조물의 경계면에 대해서 이산화함으로써 식 (14)의 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A}(\omega) \mathbf{p}_s = \mathbf{B}(\omega) \mathbf{v}_n \quad (14)$$

여기에서 \mathbf{A} 와 \mathbf{B} 는 주파수 ω 에 의존적인 행렬이며 \mathbf{p}_s 와 \mathbf{v}_n 은 경계면의 압력과 법선 방향의 속도를 의미한다. 식 (14)를 정리하면,

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{C}(\omega) \mathbf{v}_n \quad (15)$$

$$\mathbf{C}(\omega) = \mathbf{A}(\omega)^{-1} \mathbf{B}(\omega) \quad (16)$$

구조물의 진동으로부터 방사되는 소음은 위에서 구한 구조물 경계면에서의 법선 속도와 압력을 식 (13)에 대입하여 구할 수 있다.

$$\mathbf{p}_c(X) = \{A_c(\omega)\} \mathbf{p}_s - \{B_c(\omega)\} \mathbf{v}_n \quad (17)$$

p_c 는 수음점에서의 압력을 의미하고, $\{A_c\}$ 와 $\{B_c\}$ 는 수음점의 개수만큼의 행벡터이다. 설계 변수 a_k 에 대한 수음점의 음압 p_c 의 설계민감도는 식 (18)과 같이 p_c 를 a_k 로 미분함으로써 구할 수 있다.

$$\frac{\partial p_c}{\partial a_k} = \frac{\partial \{A_c\}}{\partial a_k} \mathbf{p}_s + \{A_c\} \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial a_k} - \frac{\partial \{B_c\}}{\partial a_k} \mathbf{v}_n - \{B_c\} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial a_k} \quad (18)$$

이때 $\{A_c\}$ 와 $\{B_c\}$ 는 구조물의 각 절점의 위치와 주파수에만 관계되므로 설계변수가 크기설계변수일 경우 식 (19)와 같이 간단히 될 수 있다.

$$\frac{\partial p_c}{\partial a_k} = \{A_c\} \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial a_k} - \{B_c\} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial a_k} \quad (19)$$

마찬가지로 식 (14)를 a_k 로 미분하여 식 (19)에 대입하면 결국 식 (20)의 소음 설계민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{\partial p_c}{\partial a_k} = (\{A_c\} \mathbf{C} - \{B_c\}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial a_k} \quad (20)$$

식 (20)의 우변에 있는 구조물 경계면에서의 법선 속도에 대한 설계민감도는 2장에서 구한 변위의 설계민감도에 $j\omega$ 를 곱한 후 식 (21)의 관계를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \frac{\partial}{\partial a} (v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial a} n_x + \frac{\partial v_y}{\partial a} n_y + \frac{\partial v_z}{\partial a} n_z \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서 v_x 와 v_y , v_z 는 구조물 경계면의 x와 y, z 방향의 속도 성분이며 n은 법선 벡터이다. 식 (20)을 도표로 나타내면 Fig. 1과 같이 표현할 수 있다.

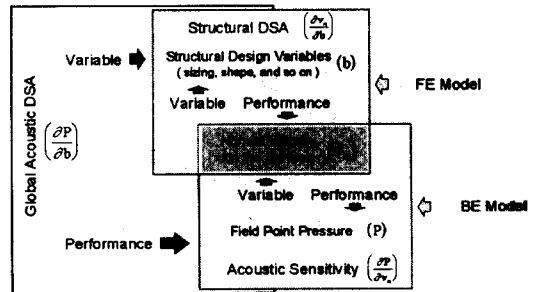


Fig. 1. structural and acoustic sensitivities

4. 1/2 크기 차실 실내 모형 예제

실차 절반 크기의 차실 모델을 이용하여 앞에서 구한 소음설계민감도를 실제로 적용하여 보았다.

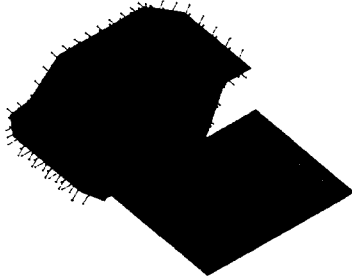


Fig. 2. 1/2 scale vehicle cavity model and field points

위의 모델은 모두 278 개의 요소와 280 개의 절점으로 구성되어 있으며 하판 좌측 후방의 절점을 가진하였다.

우선 유한요소법을 이용하여 구조 해석을 수행하였고, 여기에서 얻은 경계면의 법선 속도를 이용하여 방사되어지는 소음을 예측하였다.

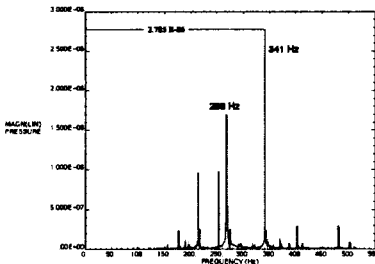


Fig. 3. FRF at field point 80, (327,350,1700)[mm]

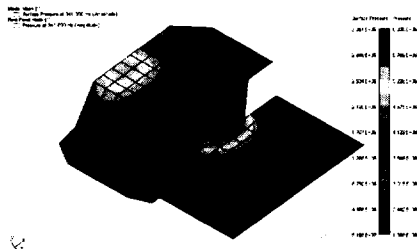


Fig. 4. Contour plot of the surface pressure and field points pressure at 341 Hz

Fig. 3 과 4 에서 볼 수 있듯이, 해석 결과 80 번 수음점 341 Hz 가 가장 큰 음압을 가짐을 알 수 있다. 따라서 본 예제에서는 구조물의 크기설계 변수에 대한 80 번 수음점 341 Hz 음압의 소음설계민감도를 구하였다.

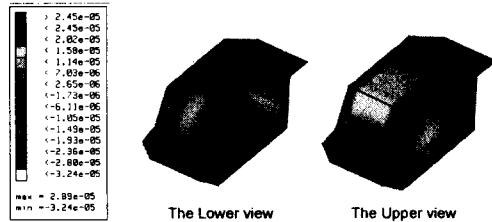


Fig. 5. Contour Plot of the Global Acoustic Design Sensitivity

Fig. 5 는 구해진 소음 설계민감도이며, Table 1 은 크기에 따라 상위 20 개를 정리한 것이다.

Table 1. Global Acoustic Design Sensitivity Analysis Coefficients of Top 20

Global Acoustic Design Sensitivity Analysis (sorted)				
Ranking	EID	+ sensitivity	EID	- sensitivity
1	266	3.15282E-05	109	-4.44240E-05
2	265	2.95670E-05	101	-4.44054E-05
3	267	2.95509E-05	179	-3.75953E-05
4	272	2.78992E-05	171	-3.74937E-05
5	270	2.78974E-05	168	-3.16198E-05
6	271	2.67069E-05	156	-3.16008E-05
7	261	2.58504E-05	225	-2.90936E-05
8	262	2.34213E-05	108	-2.79618E-05
9	260	2.34147E-05	104	-2.79539E-05
10	273	2.26018E-05	4	-2.79521E-05
11	269	2.26004E-05	56	-2.78369E-05
12	274	2.18677E-05	7	-2.74012E-05
13	278	2.18672E-05	103	-2.58904E-05
14	264	1.91092E-05	107	-2.58841E-05
15	268	1.90810E-05	246	-2.57710E-05
16	275	1.85722E-05	178	-2.49640E-05
17	277	1.85671E-05	105	-2.49471E-05
18	276	1.83386E-05	174	-2.49263E-05
19	196	1.71181E-05	100	-2.45620E-05
20	190	1.71057E-05	88	-2.45526E-05

양의 소음설계민감도와 음의 소음설계민감도 각각에서 가장 큰 값을 가지는 266 번 요소와 109 번 요소에 대하여 계산되어진 소음설계민감도와 유한차분법을 이용하여 구한 값을 비교함으로써 그 정확성을 확인하였다.

Table 2. Sensitivity Verification for 1/2 scale vehicle cavity model (element 109)

Element Number	Perturbation δd [mm]	$\psi(d+\delta d)$ Pa	$\psi(d-\delta d)$ Pa	$\Delta\psi$ Pa / mm	ψ' Pa / mm	$\psi'/\Delta\psi$ %
109	0.1	1.140 e-3	4.956 e-3	-1.9125 e-2		232.282
	0.01	2.423 e-3	3.278 e-3	-4.2750 e-2	-4.4424 e-2	103.916
	0.001	2.744 e-3	2.827 e-3	-4.1500 e-2		107.046

Table 3. Sensitivity Verification for 1/2 scale vehicle cavity model (element 266)

Element Number	Perturbation δd [mm]	$\psi(d+\delta d)$ Pa	$\psi(d-\delta d)$ Pa	$\Delta\psi$ Pa / mm	ψ' Pa / mm	$\psi'/\Delta\psi$ %
266	0.1	3.326 e-2	1.337 e-3	1.59615 e-1		19.753
	0.01	3.123 e-3	2.512 e-3	3.0550 e-2	3.1528 e-2	103.202
	0.001	2.814 e-3	2.756 e-3	2.9000 e-2		108.718

Table 2 와 3 에서, $\Delta\psi = \frac{\psi(d+\delta d) - \psi(d-\delta d)}{2\delta d}$ 는 유한차분법(central finite difference)을 의미하며, ψ' 는 계산으로 구한 소음설계민감도이다.

5. Rayleigh 근사법

Rayleigh 근사법이란 구조물 경계면의 진동을 각각의 요소가 피스톤 운동을 한다고 가정하여, 여기에서 야기되는 소음의 회절을 무시하고 각 요소의 법선방향으로만 방사가 이루어진다고 생각함으로써 계산시간을 줄이는 방법으로 이미 해석의 기법으로 사용되고 있다.

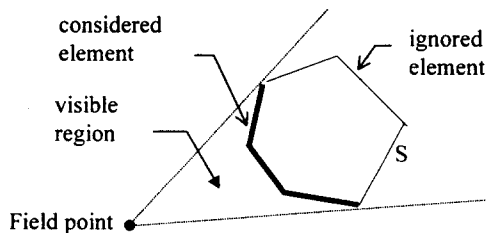


Fig. 6. Concept of Rayleigh BEM

Rayleigh 근사법을 소음설계민감도 해석에 적용하면 계산 시간의 단축 효과는 더욱 크게 나타난다. 소음설계민감도를 구하기 위해서는 구조물의 경계면에 위치한 절점의 개수에 3을 곱한만큼의 구조물 설계민감도가 필요하게 된다. 이는 각 절점에서의 법선 속도에 대한 설계민감도를 구하기 위해 x, y z 방향 속도 성분을 모두 고려해야 되기 때문이다.

실제로 본 예제에 사용된 모델의 경우 모두 280개의 절점을 가지고 있으므로 $280 \times 3 = 840$ 번의 구조물 설계민감도 해석이 수행되었다. 그러나 Rayleigh 근사법을 적용할 경우 고려해야 할 절점의 수가 72개이므로 총 216번의 계산만 있으면 설계민감도를 얻을 수 있는 것이다.

Fig. 7 과 Table 4 에는 Rayleigh 근사법으로 구한 근사치와 정확하게 계산된 설계민감도를 비교하였다. 이로부터 두 값은 크기에서는 약간의 차이가 있지만 전체적인 경향에 있어서는 완전히 일치한다는 것을 알 수 있다.

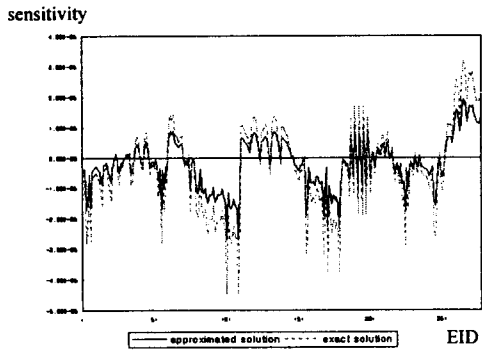


Fig. 7. Comparison of Approximate and Exact Sensitivities.

Table 4. Approximated Sensitivity.

No	approximate method			
	Plus		Minus	
	EID	sensitivity	EID	sensitivity
1	266	1.914E-05	109	-2.687E-05
2	265	1.796E-05	101	-2.690E-05
3	267	1.794E-05	179	-2.285E-05
4	272	1.694E-05	171	-2.270E-05
5	270	1.694E-05	168	-1.921E-05
6	271	1.621E-05	156	-1.916E-05
7	261	1.569E-05	225	-1.785E-05
8	262	1.423E-05	108	-1.698E-05
9	260	1.422E-05	104	-1.696E-05
10	273	1.372E-05	174	-1.694E-05
11	269	1.372E-05	56	-1.683E-05
12	274	1.327E-05	7	-1.582E-05
13	278	1.327E-05	103	-1.567E-05
14	264	1.161E-05	107	-1.565E-05
15	268	1.157E-05	246	-1.564E-05
16	275	1.128E-05	178	-1.516E-05
17	277	1.127E-05	105	-1.513E-05
18	276	1.113E-05	174	-1.510E-05
19	196	1.039E-05	100	-1.480E-05
20	190	1.037E-05	88	-1.478E-05

6. 최적 설계

여기에서는 계산된 소음설계민감도와 SLP 최적화 기법⁽⁹⁾을 이용하여 설계최적화를 수행하였다. 구조물의 무게가 커지지 않는 한도 내에서 해당 소음의 최소화를 목적함수로 하였으며, 구조물의 생산 공정을 고려하여 Fig. 8 과 같이 14 부분의 두께를 설계변수로 하였다. 각 설계변수의 초기값은 2mm 이며 1mm 에서 3mm 까지 변할 수 있다고 가정함으로써, 결국 식 (22)와 같은 최적화 식을 만들고 이 식에 대하여 최적화를 수행하였다.

최적화에는 상용 프로그램인 DOT 을 이용하였으며 설계민감도는 외부에서 계산하여 제공하는 방법을 사용하였다.

Minimize Field Point Pressure

Subject to No increase of Mass

(22)

Side constraints $1 \leq t_i \leq 3$

where, $i = 1$ to 14, number of design variables

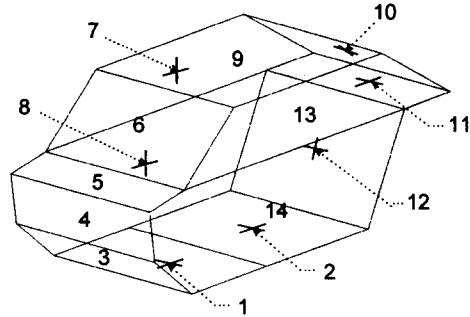


Fig. 8. PID of the 1/2 scale vehicle cavity model for optimization

Fig. 9 에는 최적화에 의해 얻어진 구조물의 무게와 소음의 크기가 기존의 값에 대한 상대량으로 표시되었으며 Fig. 10 에는 설계 변수의 최적값이 표시되었다.

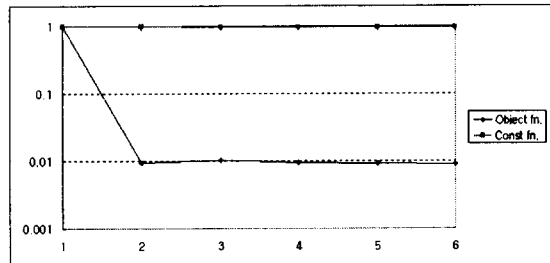


Fig. 9. Iteration for the Cost function and Constraint

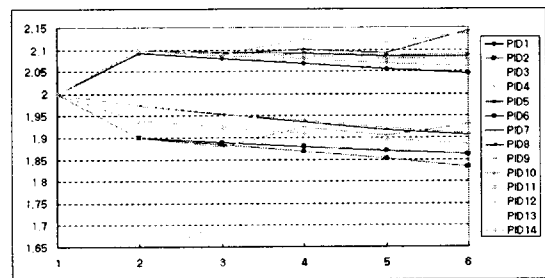


Fig. 10. Iteration for the Design Variables

7. 결 론

본 연구에서는 음향민감도와 구조물의 설계민감도를 이용하여 구조물의 크기설계변수에 대한 방사 소음의 소음설계민감도를 해석적인 방법으로 유도하고 이 값을 개발된 프로그램(GASA : Global Acoustic design Sensitivity Analyzer)을 이용하여 계산하였으며, 간단한 예제를 통하여 계산되어진 소음설계민감도를 검증하고, 최적화를 수행함으로써 소음설계민감도가 일반적인 구조물의 방사소음 문제에 있어서 사용될 수 있음을 확인하였다.

또한 설계민감도 계산 시간을 줄이기 위하여 Rayleigh 근사법을 제안하고 이 값을 정확하게 계산된 소음설계민감도 값과 비교함으로써 Rayleigh 근사법이 전체적인 설계 경향을 잘 보여줌을 확인하였다.

참고 문헌

- (1). Klaus J. Bathe, 1996, Finite Element Procedures, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- (2). James H. Kane, 1994, Boundary Element Analysis, Prentice Hall, New Jersey.
- (3). Lyon R.H. , 1975, Statistical Energy Analysis of Dynamic System, Theory and Application, MIT Press.
- (4). J.P.G. Coyette, H. Wynendaele, and M. Chargin, 1993, "Evaluation of Global Acoustic Sensitivities using a Combined Finite Element / Boundary Element," Noise Conference in Williamsburg, USA, May 2-5.
- (5). S. Wang, K.K. Choi, and H.T. Kulkarni, 1996, "Application of Continuum Sensitivity Analysis and Optimization to Automobile Structures," IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical System, Kluwer Academic Publishers, pp.317-324 .
- (6). K.K. Choi, I.B. Shim, and S.M. Wang, 1997,

"Design Sensitivity Analysis of structure-induced Noise and Vibration," ASME Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 119, pp173-179.

- (7). Morse P.M. and Ingrad K.U. , 1968, Theoretical Acoustics, McGraw Hill, NewYork.
- (8). Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, and James V. Sanders, 1982, Fundamentals of Acoustics, John Wiley & Sons Inc., NewYork.
- (9). Vanderplaats, 1995, DOC and DOT Users Manual, Vanderplaats Research & Development, Inc.