

# FOURIER 변환을 이용한 차량과 교량의 연성 진동 해석

## An Analysis for Coupled Vibration of Vehicle and Bridge Using Fourier Sine Transformation

류 윤 선\*(Yun S. Ryu)

### ABSTRACT

The coupled vibration occurs between traveling vehicle and bridge, when vehicle runs on it. The natural frequency of this coupled system is dependent on the contact position of vehicle and bridge, that is, time-varying system.

The calculations of these natural frequencies are very complicated, and often carried out by using Green function theory, series,... But, these methods have any limitations, such as, supporting condition, boundary condition,...

In this paper, on the coupled system constructed by the concentrated mass and elastically supported beam, an analytical method of natural frequency is proposed by using Fourier sine transformation. The results are compared and discussed with numerically calculated ones.

Key Word(s) : Vehicle, Coupled Vibration, Fourier Sine Transformation

### 1. 머릿말

차량이 철교 또는 교량 위를 주행할 때, 차량과 교량은 상호 연성진동을 일으키게 된다. 이때, 차량의 질량이 교량에 비해 무시할 수 없을 정도이면, 차량-교량의 연성 진동수는 차량과 교량이 접촉하는 위치에 따라 변화되는 비선형성을 가지게 된다. 이와 같이 연속체와 집중 질량과의 연성 진동 문제에서는 GREEN 함수 또는 급수 전개를 이용하여 해를 구하는 연구가 진행되어 왔다. 지금까지 제안된 계산 방법은 지지 및 경계 조건의 제한이 있

었으며, 특히 탄성지지된 연속체와 집중 질량과의 연성 진동수의 계산에 많은 어려움이 있다.

본 연구에서는, 차량이 교량 위를 통과

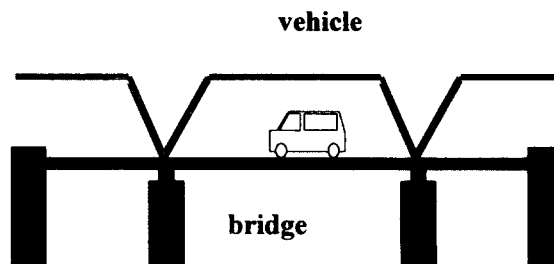


Fig. 1 Overview of Vehicle-Bridge Coupled System

\* : 현대자동차 선형연구실 소음진동연구팀

ryuys@shinbico.com

할 때, 차량과 교량과의 연성 고유진동수 계산을 해석적인 방법으로 수행하였다.

이때, 교량은 탄성지지된 연속보로 가정하고, 차량은 집중 질량으로 가정하였다. 교량의 탄성지지 효과를 조사하기 위하여, 연성 고유진동수의 계산은, FOURIER SINE 변환을 이용하여 새로운 계산 방법을 제안하고, 계산 결과는 수치 해석 결과와 상호 비교 검토되었다.

## 2. 운동방정식

Fig.1 에 보인 바와 같이, 차량이 교량 위를 통과할 때, 차량-교량으로 이루어진 연성 진동계는, 탄성지지 연속체와 집중 질량계와의 연성 진동계로 생각할 수 있다. Fig.2 에서는 주행중인 차량을 이동 질량, 교량은 연속보로 모델링한다. 또 교량을 지지하고 있는 교각은 탄성 지지스프링으로 모델링한다. 이동질량과 연속보 사이에는 HERTZ 의 비선형 접촉 스프링을 선형화시킨 접촉 스프링을 가정하여, 이동질량과 연속보와의 접촉점 변화에 따른 연성진동을 고려하였다.

Fig.2 에서, 이동질량  $m$ , 보의 굽힘강성  $EI$ , 보의 길이  $L$ , 보의 단면적  $A$ , 단위 길이당 보의 질량  $\rho A$ , 지지스프링의 강성  $k_s$ , 접촉 스프링의 강성  $k_w$ 로 구성된 연성 진동계를 나타낸다. 임의 접촉점에서의 연성 운동방정식은 아래의 (1), (2)식과 같이 표현된다.

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = - \sum_{i=1}^n k_s u(x,t) \delta(x-x_i) + k_w \{y(t) - u(x,t)\} \delta(x-x_k) \quad (1)$$

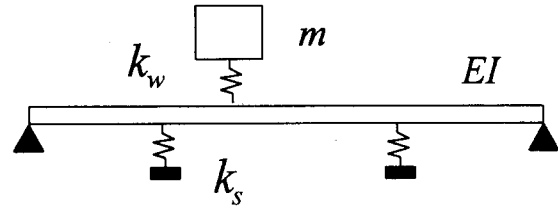


Fig. 2 Analytical Model of Vehicle-Bridge Coupled System

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_w y(t) = k_w u(x,t) \delta(x-x_k) \quad (2)$$

여기서,  $u(x,t)$ 는 보의 처짐,  $y(t)$ 는 이동질량의 변위를 나타낸다. 또,  $x_i$ 는 탄성지지 스프링의 위치,  $x_k$ 는 이동질량과 연속보와의 접촉점을 나타내고,  $n$ 은 탄성지지 스프링의 개수이다.

(1), (2)식의 해를 다음과 같이 각각 가정할 수 있다.

$$u(x,t) = U(x) \sin \omega t \quad (3)$$

$$y(t) = Y \sin \omega t \quad (4)$$

여기서,  $\omega$ 는 연성계의 고유진동수를 나타낸다. (3), (4)식을 (1), (2)식에 각각 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$EI \frac{d^4 U(x)}{dx^4} - \rho A \omega^2 U(x) = - \sum_{i=1}^n k_s U(x) \delta(x-x_i) + \omega^2 m Y \delta(x-x_k) \quad (5)$$

$$-\omega^2 m Y + k_w Y = k_w U(x) \delta(x-x_k) \quad (6)$$

(6)식은, 연립방정식의 해를 풀기 위해 다음의 (7)식과 같이 정리된다.

$$Y = \frac{k_w}{k_w - \omega^2 m} U(x) \delta(x - x_k) \quad (7)$$

(7)식을 (5)식에 대입하여 정리하면, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$EI \frac{d^4 U(x)}{dx^4} - \rho A \omega^2 U(x) = - \sum_{i=1}^n k_s U(x) \delta(x - x_i) + k_w \frac{\omega^2 m}{k_w - \omega^2 m} \delta(x - x_k) \quad (8)$$

(8)식 중의 DIRAC DELTA 함수를 처리하기 위하여, (8)식의 양변에  $\frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi x_i}{L}$  를 곱하면, FOURIER SINE 변환의 형태가 이루어지므로, 양변을 FOURIER SINE 변환하여 정리하면, 다음과 같이 (9)식이 얻어진다.

$$(j\pi)^2 V(j) - \omega^2 \frac{L^4 \rho A}{EI} V(j) = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{L^3 k_s}{EI} V\left(\frac{x_i}{L}\right) \sin \frac{j\pi x_i}{L} \sin \frac{j\pi x_j}{L} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L^3 k_w}{EI} \frac{\omega^2 m}{k_w - \omega^2 m} \sin \frac{j\pi x_j}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x_k}{L} V\left(\frac{x_k}{L}\right) \quad (9)$$

(9)식의 우변을 다음과 같이 놓는다.

$$B = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{L^3 k_s}{EI} V\left(\frac{x_i}{L}\right) \sin \frac{j\pi x_i}{L} \sin \frac{j\pi x_j}{L} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{L^3 k_w}{EI} \frac{\omega^2 m}{k_w - \omega^2 m} \sin \frac{j\pi x_j}{L} \cdot \sin \frac{j\pi x_k}{L} V\left(\frac{x_k}{L}\right) \quad (10)$$

(9)식을  $V(j)$ 에 대해서 정리하면, 다음 (11)식처럼 된다.

$$(j) = \frac{B}{(j\pi)^4 - \frac{L^4 \rho A}{EI} \omega^2} \quad (11)$$

이하, 무차원 계산을 수행하기 위하여, 다음과 같은 무차원 계수를 도입하여, 정리한다.

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \bar{x}_k = \frac{x_k}{L} \\ \mu = \frac{m}{\rho AL} \\ S_s = \frac{k_s L^3}{EI}, \quad S_w = \frac{k_w L^3}{EI} \\ \Omega_p^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{EI}{\rho AL^4} \quad (12)$$

(10)식을 무차원 계수로 표현하면, 다음과 같이 된다.

$$B = -2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n S_s V(\bar{x}_i) \sin j\pi \bar{x}_i \sin j\pi \bar{x}_j + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Omega_p^2 \mu}{1 - \Omega_p^2 \mu / S_w} \sin j\pi \bar{x}_j \cdot \sin j\pi \bar{x}_k V(\bar{x}_k) \quad (13)$$

(11)식을 무차원화 하면 다음의 (14)식으로 표시할 수 있다.

$$(j) = \frac{B}{(j\pi)^4 - \Omega_p^2} \quad (14)$$

이상의 (13), (14)식에서, 직교 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 매트릭스를 얻을 수 있다.

$$\left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 k\pi\bar{x}_i}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} S_s \right\} V(\bar{x}_i) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin k\pi\bar{x}_i \sin k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} \cdot \frac{\Omega_p^2 \mu}{1 - \Omega_p^2 \mu / S_w} V(\bar{x}_k) = 0 \quad (15)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin k\pi\bar{x}_i \sin k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} S_s V(\bar{x}_i) \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} \frac{\Omega_p^2 \mu}{1 - \Omega_p^2 \mu / S_w} \right\} V(\bar{x}_k) = 0 \quad (16)$$

(15), (16)식의 직교 관계로부터 아래와 같은 방정식을 구할 수 있고, 이 방정식을 만족하는  $\Omega_p^2$ 이 계의 연성 고유 진동수가 된다.

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V(\bar{x}_i) \\ V(\bar{x}_k) \end{Bmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

(18)식은, 직접 해석적으로 구할 수 없는 형태이므로, 수치 계산에 의한 근사해를 구한다. 이는 다음의 (19)식과 같이 표현된다.

$$I_{11} \cdot I_{22} - I_{12} \cdot I_{21} = 0 \quad (19)$$

여기서, (19)식중의 각 인자는 다음과 같다.

$$I_{11} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin^2 k\pi\bar{x}_i}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} S_s \quad (20)$$

$$I_{12} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin k\pi\bar{x}_i \sin k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} \cdot \frac{\Omega_p^2 \mu}{1 - \Omega_p^2 \mu / S_w} \quad (21)$$

$$I_{21} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin k\pi\bar{x}_i \sin k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} S_s \quad (22)$$

$$I_{22} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\pi\bar{x}_k}{(k\pi)^4 - \Omega_p^2} \frac{\Omega_p^2 \mu}{1 - \Omega_p^2 \mu / S_w} \quad (23)$$

### 3. 계산 결과 및 고찰

이상의 식을 이용하여, 그 결과를 검증하기 위하여, Table 1 과 같은 파라미터를 이용한 계산을 수행하였다.

Table 1 은 계산의 편의상, 되도록 실제 차량과 교량과의 값에 근접한 파라미터를 사용하였으며, 이 값들을 이용한 실제 계산은 MATLAB 을 통하여 수행되었다.

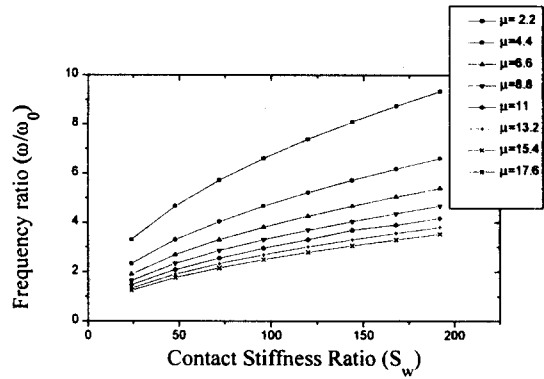
Fig. 3 은 보와 이동질량과의 질량비를 변화 시키면서, 연성진동계의 고유진동수와 접촉강성과의 관계를 나타낸 그림이다. 그림에서 알 수 있듯이, 중축은 고유진동수, 횡축은 접촉강성비를 나타내고 있다. 연성진동계의 고유진동수는 접촉강성이 클수록 증가하는 일반적인 경향을 보이고 있고, 또 연성질량이 클수록 전체 고유진동수는 작아지는 경향을 확인할 수 있었다. 이는 일반적인 경향과 잘 일치하고 있다고 보아진다.

Fig. 4 는 이동질량비를 변화 시키면서,

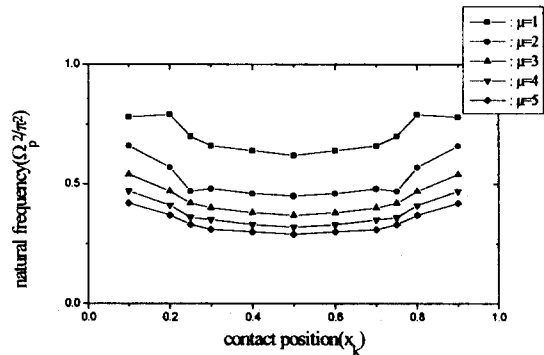
**Table 1 Calculated Parameters**

Parameters	Values
$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}$	0.25, 0.75
$\bar{x}_k = \frac{x_k}{L}$	0 - 0.5 (0.05)
$\mu = \frac{m}{\rho AL}$	1 - 5 (2.2 - 17.6)
$S_s = \frac{k_s L^3}{EI}$	1 - 100
$S_w = \frac{k_w L^3}{EI}$	25 - 200
$\Omega_p^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$	?
$\omega_0^2 = \frac{EI}{\rho AL^4}$	1
$n$	2

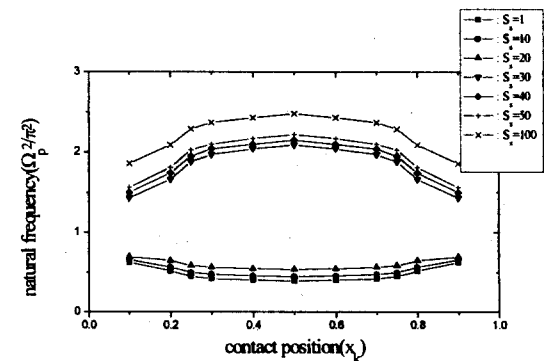
보와 이동질량과의 각 접촉점에서의 연성 고유진동수의 변화를 살펴본 것이다. 그림의 종축은 고유진동수의 비, 횡축은 이동질량과 보와의 접촉점을 나타내고 있으며, 횡축의 화살표는 각각 탄성지지점을 나타내고 있다. 그림에 의하면, 계의 고유진동수는 접촉점이 중앙으로 이동될수록 작아지며, 질량비가 2 이상이면, 탄성지지의 효과가 나타나지 않음을 알 수 있었다. 탄성지지의 효과는, 질량비가 1 일때, 탄성지지점을 중심으로 고유진동수가 일시적으로 커지는 것으로 확인할 수 있으며, 질량비가 커질수록 고유진동수가 작아지며, 그 효과도 나타나지 않게 되는 것을 확인할 수 있었다. 접촉점이 중앙으로 접근할수록 계의 연성고유진동수가 작아지는 것은, 이동질량의 질량효과가 지지점



**Fig. 3 Natural frequencies depending on contact stiffness ratio varying mass ratio**



**Fig. 4 Natural frequencies depending on position of coupled system varying mass ratio**



**Fig. 5 Natural frequencies depending on position of coupled system varying elastic support stiffness**

과 멀어지면서 그 영향이 줄어들게 되므로, 전체의 고유진동수를 작아지게 하는 것으로 파악되고 있다. 이도 역시, 일반적인 경향과 일치하는 것으로 생각된다.

Fig. 5는 탄성지지강성을 변화시키면서, 이동질량과 보와의 접촉점에서의 계의 연성고유진동수를 살펴본 것이다. 그림의 종축은 고유진동수, 횡축은 이동질량과 보와의 접촉점을 나타내고 있다. 탄성지지강성이 증가할수록 계의 고유진동수는 전체적으로 커지게 된다. 그러나, 접촉점에 따라서 Fig. 4와 같은 경향을 가지게 되나, 탄성지지강성이 커짐에 따라서 연성의 정도는 질량의 영향보다 지지점의 영향을 더 강하게 받는 경향을 보이며, 지금까지의 경향과는 달리, 오히려 접촉점이 보의 중앙으로 접근할수록 연성 시스템은 하나의 지지점의 효과를 보이며, 계의 고유진동수를 커지게 하는 경향을 보이고 있음을 알 수 있었다.

#### 4. 맺음말

이동질량과 보와의 연성진동 시스템의 고유진동수를 계산하기 위하여, FOURIER SINE 변환을 이용한 계산 방식을 제안하며, 결과를 검증하기 위하여 수행한 계산 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

FOURIER SINE 변환을 이용한 이동질량과 보와의 연성진동 시스템에 대한 계산은, 계산 결과를 비교해 볼 때 일반적인 경향과 잘 일치한다는 점에서 매우 유용하다 말할 수 있겠다.

또, 탄성지지의 효과를 해석적으로 고려할 수 있다는 점에서 더더욱 활용도가 높으리라 기대된다.

향후, 탄성지지점이 많은 경우에 대한

검증이 필요하며, 또한 수치해석에 의한 계산 결과와 정밀하게 비교할 필요가 지적된다.

#### 참고 문헌

1. M. Pakdemirli, A.H. Nayfeh, Nonlinear Vibrations of Beam-Spring-Mass System, Journal of Vibration and Acoustics vol.116 (1994), p.433-439
2. S. Kukla, The Green Function Method in Frequency Analysis of a Beam with Intermediate Elastic Supports, Journal of Sound and Vibration vol.149 no.1 (1991), p.154-159
3. L. Fryba, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, Noordoff (1975), p.16
4. 柳允善, 曄道佳明, 須田義大, 大野進一, 移動質量-接觸 SPRING 系와彈性支持梁와의連成振動解析, 生産研究 第 47 卷 10 號 (1995), p.71-75