

현수 측정법을 이용한 강체의 질량관성모멘트 측정

Measurement of Mass Moment of Inertia of Rigid Bodies by Suspension Method

박 홍 제* 조 진 상* 김 경 욱*
정희원 정희원
H. J. Park J. S. Joh K. U. Kim

1. 서론

차량, 기계 장치 등 강체의 동적 특성을 분석하기 위해서는 일정한 고정축에 대한 강체의 질량 관성모멘트를 결정하여야 한다. 일반적으로 질량관성모멘트를 측정하기 위한 고정축은 강체의 질량 중심을 원점으로 하고, 대칭선을 기준 좌표축으로 하는 강체 고정, 3축 직교 좌표계로 한다.

강체의 질량관성모멘트를 결정하기 위해서는 임의의 피봇축에 대하여 강체를 진자 운동시킨 후, 진자 운동의 주기를 측정하여 질량관성모멘트를 계산하는 현수 측정법(suspension method)이 널리 이용된다(Dixon. 1996; Martin. 1982; William 등. 1996). 그러나, 현수 측정법을 이용한 주기 측정 장치의 조건, 측정 기술, 측정 결과에 대한 신뢰도 등에 대한 연구는 많지 않다.

본 연구는 현수 측정법을 이용하여 정밀(accuracy)하고 정확(precision)한 강체의 질량관성모멘트를 결정하기 위한 조건을 제시하고, 실험으로써 이를 검증하기 위한 것이다.

2. 현수 측정법의 기본 원리

고정된 피봇축을 중심으로 강체가 진자 운동을 할 때 진자 운동의 주기 T 와 질량 중심에 대한 질량관성모멘트 I_p 는 다음과 같이 표현된다.

$$I_p = m_p g h_p \left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 - \frac{h_p}{g} \right] \quad (1)$$

여기서, m_p = 강체의 질량

h_p = 강체의 질량 중심에서 피봇축까지의 거리

g = 중력 가속도

또한, I_p 를 강체의 회전 반경(radius of gyration) r_k 로써 표현하면

$$r_k = \sqrt{g h_p \left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 - \frac{h_p}{g} \right]} \quad (2)$$

가 된다. 따라서, 피봇축에 대한 강체의 진자 운동의 주기를 측정하면 질량 중심에 대한 질량관성모멘트, 회전 반경을 구할 수 있다.

3. 측정 조건

가. 주기 측정

진자 운동의 주기는 초시계를 이용하여 간단하게 측정할 수 있으나, 초시계 사용법은 측정자에

* 서울대학교 농업생명과학대학 생물자원공학부

따라 오차가 크며 정밀하지 못한 단점이 있다. 보다 정밀한 측정 방법으로는 고감도의 저주파용 가속도계를 이용하는 방법이 있다. 진자 운동을 하는 강체에 고감도의 저주파용 가속도계를 부착하고, 신호 분석기를 통하여 가속도계의 신호를 분석하면 최고 10^3 초까지 정밀한 주기를 측정할 수 있다.

나. 케이블 길이

가속도계로써 측정한 진자 운동의 주기는 정밀(precision)한 값이나 정확(accuracy)한 값은 아니다. 즉, 측정한 주기는 피봇점의 마찰, 공기 저항 등으로 인하여 실제 주기와는 큰 오차가 있으나, 측정치 사이의 측정 편차는 대단히 작다. 따라서, 주기는 실제 주기와 큰 오차가 발생하지 않도록 정확하게 측정되어야 하며, 측정된 주기가 실제 주기와 오차가 있다 하더라도 이 오차가 질량관성모멘트 또는 회전 반경(radius of gyration)을 결정하는 데 큰 영향을 미치지 않도록 하여야 한다.

식 (1)에서 강체의 주기를 강체의 질량이 질량 중심에 집중되어 있는 단진자 성분과 강체의 질량관성모멘트에 의한 성분으로 구분하면

$$T = \sqrt{\varepsilon^2 + 1} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{h_p}{g}} = \sqrt{\varepsilon^2 + 1} \cdot T_p \quad (3)$$

가 된다. 이 때 ε 은 피봇축에서 강체의 질량 중심까지의 거리 h_p 에 대한 회전 반경, r_k 의 비, 즉 $\varepsilon = r_k / h_p$ 이다. 따라서, 강체의 주기는 단진자의 주기, T_p 의 $\sqrt{\varepsilon^2 + 1}$ 배가 되어, ε 이 증가할수록 강체와 단진자 주기의 차이도 증가된다. 식 (3)에서 회전 반경과 주기와의 관계를 구하면

$$r_k = h_p \sqrt{\left(\frac{T}{T_p}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

가 된다. 강체의 주기가 단진자의 주기와 큰 차이가 없는 경우 즉, ε 이 0에 가까운 경우에는 측정 주기의 변화에 대한 회전 반경의 변화가 크기 때문에 측정 주기의 오차가 작은 경우에도 회전 반경의 오차는 크게 증가된다. 측정 주기의 %오차 p 를 다음과 같이 정의하면

$$p = \frac{|T^{true} - T|}{T^{true}} \quad (5)$$

여기서, T^{true} = 실제 주기

T = 측정 주기의 평균값

이며, 측정 주기의 %오차 p 에 대한 회전 반경의 %오차 q 는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dr_k}{dT} \cdot 2pT \approx 2qr_k \quad (6)$$

$$q = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right)p \quad (7)$$

식 (7)은 ε , p , q 와의 관계를 나타낸 것이다. 측정 주기의 %오차가 1%일 때, 회전 반경의 %오차가 $\pm 10\%$ 를 넘지 않기 위해서는 ε 이 0.333보다 커야 한다. 즉, 회전 반경은 측정 강체의 고유한 값이므로, 측정 강체의 질량 중심에서 피봇축까지의 길이가 회전 반경의 3배 이하가 되도록 측정 장치의 케이블 길이를 결정하여야 한다. 이는 주기 측정 장치에서 피봇축과 강체의 질량 중심 사이의 길이가 짧으면 짧을수록 회전 반경의 오차는 감소된다는 것을 나타낸다.

다. 강체와 피봇축의 연결

강체가 피봇축에 대한 진자 운동을 하기 위해서는 강체가 피봇축을 중심으로 힌지되어야 한다. 피봇축에 직접 힌지될 수 없는 경우에는 변형되지 않는 케이블을 사용하여 강체와 피봇축을 연결하여야 한다. 또한 구조가 비대칭이고 복잡하여 강체와 피봇축을 케이블로 연결할 수 없는 경우에는 케이블과 피봇축을 연결한 받침대를 설치하고 이 받침대 위에 강체를 고정하는 방법도 있다. 받침대를 이용할 경우에는 식 (8)을 이용하여 강체의 질량관성모멘트를 결정하여야 한다.

$$I_p = m_p g h_p \left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 - \frac{h_p}{g} \right] + \frac{m_c g h_c}{4\pi^2} (T^2 - T_c^2) \quad (8)$$

여기서, m_c = 받침대의 질량

h_c = 받침대의 질량 중심에서 피봇축까지의 거리

$$T_c = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\omega}}{m_c h_c g}} = \text{받침대만의 주기}$$

또한, 질량 중심에 대한 강체의 회전 반경, r_k 는 다음과 같이 표현된다.

$$r_k = \left[g h_p \left\{ \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 - \frac{h_p}{g} \right\} + \frac{m_c g h_c}{4\pi^2 m_p} (T^2 - T_c^2) \right]^{1/2} \quad (9)$$

따라서, 받침대를 사용한 경우에는 식 (8), (9)를 이용하여 결정할 수 있다.

라. 초기 각변위

강체의 진자 운동은 강체의 초기 각변위에 의하여 시작된다. 힌지점에서 마찰이 크거나 또는 피봇축에 대한 강체의 모멘트가 작을 경우에는 진자 운동이 오래 지속되지 않는다. 주기에 대한 많은 측정 데이터를 얻기 위해서는 초기 각변위를 크게하여 진자 운동이 오래 지속되도록 하여야 한다. 그러나 식 (1)의 기본 가정은 $\sin\theta \approx \theta$ 이기 때문에 초기 각변위가 크면 주기에서 오차가 발생된다(이장무, 1994). 강체의 진자 운동에 대한 운동 방정식은

$$I_{po} \ddot{\theta} + m_p g h_p \sin\theta = 0 \quad (10)$$

Table 1 Initial angular displacement factor

Initial Angular Displacement	Correction Factor (K)
0°	1.000
10°	1.002
20°	1.008
30°	1.017
60°	1.073

이다. 식 (10)을 적분하여 속도 식을 구하면

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2m_p g h_p}{I_{po}} (\cos\theta - \cos\theta_m) = 0 \quad (11)$$

이며, 식 (12)에서와 같이 속도 식을 적분하여

$$\int_{\theta}^{\theta_m} \sqrt{\frac{I_{po}}{2m_p g h_p (\cos\theta - \cos\theta_m)}} d\theta = \int dt \quad (12)$$

주기 T 를 구하면

$$T = \left[\frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_m/2) - \sin^2(\theta/2)}} \right] \cdot 2\pi \sqrt{\frac{I_{po}}{m_p g h_p}} \quad (13)$$

가 된다. 식 (13)의 첫 번째 항을 초기 각변위 계수 K 라고 하면

$$T = K \cdot 2\pi \sqrt{\frac{I_{po}}{m_p g h_p}} \quad (14)$$

와 같다. 표 1은 초기 각변위에 따른 K 값을 나타낸 것이다. 일반적으로 초기 각변위가 10°를 넘

지 않는 경우에는 이를 무시할 수 있다.

마. 측정 강체의 자세

주기 측정에서 피봇축과 측정 강체의 관성축은 반드시 일치하거나 평행하여야 한다. 그러나, 실제 측정 장치에서는 관성축과 피봇축이 평행하도록 강체의 자세를 정확하게 잡기가 어렵다. 따라서, 질량관성모멘트에 큰 영향을 미치지 않는 피봇축과 관성축의 허용평행오차를 구명하여야 한다.

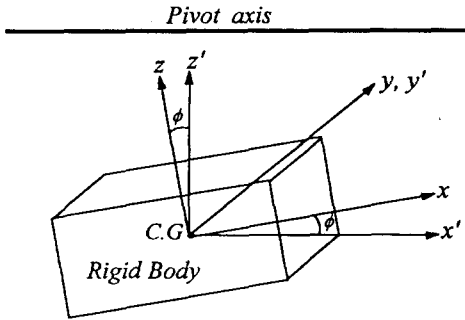


Fig.1 Tilting of a rigid body about y axis

그림 1에서와 같이 측정 강체의 질량 중심을 지나 는 직교 좌표계의 x축이 y축을 중심으로 ϕ 만큼 회전하였을 때, 측정 주기에 의하여 결정된 질량관성 모멘트는 I_x 가 아닌 I_x' 이 된다. 이 때 피봇축에 대한 관성축의 경사각 ϕ 가 질량관성모멘트에 미치는 영향은 다음과 같다.

경사각이 ϕ 일 때 x' 축에 대한 질량관성모멘트는

$$I_{x'} = \int (y'^2 + z'^2) dm \quad (15)$$

과 같다. 좌표계 (x', y', z') 과 (x, y, z) 사이의 좌표 변환을 통해 식 (15)를 정리하면

$$I_{x'} = \int (y^2 + (x \sin \phi + z \cos \phi)^2) dm = I_x + (\sin^2 \phi) \int (x^2 - z^2) dm + (\sin 2\phi) I_{xz} \quad (16)$$

가 된다. 식 (16)의 우변 둘째 항에서 각 ϕ 가 작으면 $\sin 2\phi \approx 0$ 가 되며, 셋째 항에서 강체의 형상이 xy 또는 zy 평면에 대하여 대칭이면 관성적 I_{xz} 도 0이 된다. 따라서, 피봇축에 대한 관성축의 평행 오차가 10° 이하이면 I_x 와 $I_{x'}$ 의 차이는 무시될 수 있다. 또한, x축이 z축을 중심으로 평행 오차가 발생된 경우에도 같은 방법으로 그 영향을 구명할 수 있다.

바. 받침대

받침대를 사용할 경우, 받침대가 ε 에 미치는 영향을 구명하였다. 받침대를 포함한 전체 측정 강체의 질량 중심에서 피봇축까지의 거리, h 는 다음과 같이 표현된다.

$$h = \frac{m_p h_p + m_c h_c}{m} \quad (17)$$

여기서, $m = m_p + m_c$

피봇축에서 받침대의 질량 중심은 측정 강체의 질량 중심보다 아래 쪽에 있으므로

$$h_c = h_p + \Delta h \quad (18)$$

여기서, $\Delta h =$ 받침대와 측정 강체의 질량 중심간 거리

가 된다. 또한, 질량비를 $k_m = m_c / m_p$ 라고 하면 식 (17)은 다음과 같이 표현된다.

$$h = \frac{m_p h_p + k_m m_p (h_p + \Delta h)}{(1 + k_m) m_p} = h_p + \frac{k_m}{(1 + k_m)} \Delta h \quad (18)$$

즉, 전체 강체의 질량 중심과 피봇축 사이의 거리는 측정 강체의 질량 중심까지의 거리보다 $k_m / (1 + k_m) \cdot \Delta h$ 만큼 증가된다. 받침대를 포함한 전체 강체의 회전 반경, r_k 는 다음과 같이 결정된다.

$$I = I_p + I_c + m_p L_{pG}^2 + m_c L_{cG}^2 \quad (19)$$

$$r_k = \left[r_{kp}^2 \left(1 + \frac{(k_r - 1)k_m}{1 + k_m} \right) + \frac{k_m}{(1 + k_m)^2} L^2 \right]^{1/2} \quad (20)$$

여기서, $L_{pG} = \frac{m_c L}{m_p + m_c}$ = 측정 강체의 질량 중심에서 전체 측정 강체의 질량 중심까지 거리

$L_{cG} = \frac{m_p L}{m_p + m_c}$ = 받침대의 질량 중심에서 전체 측정 강체의 질량 중심까지 거리

$L = L_{pG} + L_{cG}$ = 측정강체와 받침대의 질량 중심사이의 거리

r_{kp} = 측정 강체만의 회전 반경

r_{kc} = 받침대만의 회전 반경

$k_r = \frac{r_{kc}}{r_{kp}}$ = 측정 강체와 받침대의 회전 반경의비

주기 측정 장치에서는 ε 이 큰 값이 되어야 하기 때문에 받침대는 측정 강체보다 가볍고, 측정 강체와 질량 중심간 거리가 짧고, 회전 반경이 큰 형태이어야 한다.

4. 검정 실험 및 고찰

이상에서 제시한 조건을 실험적으로 검정하기 위하여 이론적으로 계산한 질량관성모멘트와 실험적으로 주기를 측정하여 결정한 질량관성모멘트를 비교 분석하였다. 또한 이론에서 질량관성모멘트에 가장 큰 영향을 미치는 것으로 판단된 측정 주기의 정도와 ε 이 질량관성모멘트에 미치는 영향을 구명하였다.

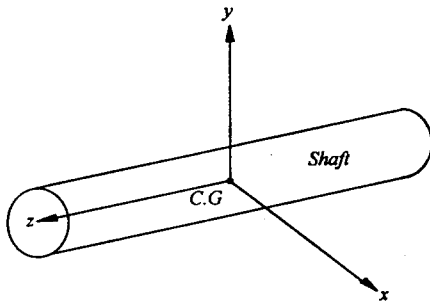


Fig.2 Inertia axis of circular solid shaft

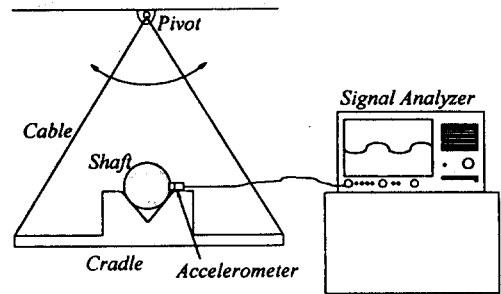


Fig.3 Period measurement system

검정 실험에 사용된 강체는 길이, $L=179.5\text{cm}$, 반지름, $R=3.25\text{cm}$, 질량, $m_p=46.5\text{kg}$ 인 원형축으로서, 그림 2에서와 같이 질량 중심을 원점으로 하는 직교 관성축 x - y - z 를 원형축에 고정하였다. 측정 강체의 주기는 그림 3에서와 같이 고감도의 저주파용 가속도계를 원형축에 부착하고, 수집된 신호를 신호 분석기로 분석하여 측정하였다(Serridge 등, 1987).

가. x 축에 대한 질량관성모멘트

위에서 제시된 조건에 따라, 가속도계를 이용하여 측정한 x 축에 대한 강체의 주기는 표 2에서와 같이 정밀한 분포를 나타내었다. 원형축을 받침대에 고정시킨 후 주기를 측정하였기 때문에 식 (8)과 (9)를 이용하여 x 축에 대한 원형축의 질량관성모멘트, I_p 와 회전반경, r_k 를 계산하였다. 즉, I_p

= 13.4785 kg·m², r_k = 53.86 cm이었다. 이 때 받침대만의 질량은, m_c=44.5 kg, 피벗축에서 받침대의 무게 중심까지의 길이는 h_c=35.5 cm, 받침대만의 주기는 T_c=1.673sec이었다. 또한, 측정 강체의 질량 중심에서 피벗축까지의 거리는 h_p=17.6cm이었다. 이론식으로서 x축에 대한 원형축의 질량관성모멘트는 다음과 같이 표현된다.

Table 2 Measured period using accelerometers

No.	Period(sec)
1	2.08789
2	2.08594
3	2.08398
4	2.08789
5	2.08789
Average	2.086718
Std-dev.	0.001564

$$I_p = \frac{1}{12} m_p (3R^2 + L^2) \quad (21)$$

이 이론식을 이용하여 질량관성모멘트, I_p^{true}와 회전 반경 r_k^{true}를 구하면 각각 I_p^{true} = 12.4976 kg·m², r_k^{true} = 51.842 cm이다. 따라서, 이론값에 대한 질량관성모멘트와 회전 반경의 측정값 %오차는 각각 7.66%, 3.89%가 된다. 즉,

$$E_I = \frac{I_p - I_p^{true}}{I_p^{true}} = 7.66\% \quad E_{r_k} = \frac{r_k - r_k^{true}}{r_k^{true}} = 3.89\%$$

이다. 또한, 측정 강체와 받침대를 포함한 전체의 질량 중심에서 피벗축까지의 거리는 식 (17)에서 의해 구할 수 있다.

$$h = \frac{46.5 \times 0.176 + 44.5 \times 0.355}{46.5 + 44.5} = 0.26266 \text{ m}$$

따라서, 측정 강체와 받침대를 포함한 질량 중심에서 피벗축까지의 거리에 대한 회전 반경의 비는 아래와 같다.

$$\varepsilon = \frac{r_k}{h} = \frac{51.842 \text{ cm}}{26.266 \text{ cm}} = 1.975$$

이론적인 회전 반경 r_k^{true} = 51.842cm를 이용하여 식 (9)에서 강체의 주기를 구하면 2.045879sec이다. 이 주기는 이론적으로 실제 측정되어야 할 주기이다. 그러나 실제 측정된 주기의 평균치는 표 2에서와 같이 2.086718sec이다. 따라서, 이론적으로 측정되어야 할 주기와 실제 측정된 평균 주기의 %오차 p는 1.996%이다. 식 (7)을 검증하기 위하여 식 (7)로써 계산한 회전 반경의 %오차와 실제 측정된 회전 반경의 %오차를 비교하였다. 식 (7)에서 주기의 %오차가 1.996%일 때, 회전 반경의 %오차 q를 ±4% 이내로 하기 위해서는 ε이 0.9980보다 커야 한다. 측정 장치의 ε은 1.975로서 0.9980보다 충분히 크다. 따라서, 이 측정 장치에서 결정된 회전 반경의 %오차는 4% 이내일 것으로 예상된다. 주기를 측정하여 회전 반경을 결정한 결과, 실제 측정된 회전 반경의 %오차는 3.89%로서 예상된 4%이내인 것으로 확인되었다.

나. z축에 대한 질량관성모멘트

x축에서와 같은 방법으로, 가속도계를 이용하여 z축에 대한 강체의 주기는 측정하였으며, 그 결과는 표 3에서와 같다. 예상된대로 분포가 정밀하였다. z축에 대해서는 받침대 없이 주기를 측정하였다. 측정 주기의 평균 0.978906sec와 강체의 질량 중심에서 피벗축까지의 실측 거리 19.59cm를 이용하여 식 (1)과 (2)에서 z축에 대한 원형축의 질량관성모멘트, I_p와 회전반경, r_k를 구하였다. 즉, I_p = 0.38436 kg·m², r_k = 90.92 mm이다.

z축에 대한 질량관성모멘트의 이론식은 다음과 같이 표현된다.

$$I_p = \frac{1}{2} m_p R^2 \quad (22)$$

이 이론식을 이용하여 구한 질량관성모멘트 I_p^{true} 와 회전 반경 r_k^{true} 는 각각 $I_p^{true} = 0.0245578 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $r_k^{true} = 2,298 \text{ cm}$ 이다. 따라서, 이론값에 대한 질량관성모멘트와 회전 반경의 측정값 %오차는 각각 1465.1%, 295.6%가 된다. 즉,

Table 3 Measured period using accelerometers

No.	Period(sec)
1	0.98242
2	0.98242
3	0.97656
4	0.97266
5	0.98047
Average	0.978906
Std-dev.	0.003786

$$E_I = \frac{I_p - I_p^{true}}{I_p^{true}} = 1465.1\% \quad E_{r_k} = \frac{r_k - r_k^{true}}{r_k^{true}} = 295.6\%$$

이다. 또한, 측정 강체의 질량 중심에서 피벗축까지의 거리에 대한 이론적인 회전 반경의 비는

$$\varepsilon = \frac{r_k}{h} = \frac{2.298 \text{ cm}}{19.5925 \text{ cm}} = 0.117289$$

이다. 이론적인 회전 반경 $r_k^{true} = 2.298\text{cm}$ 를 이용하여 식 (2)에서 강체의 주기를 구하면 0.8941sec이다. 이 주기는 이론적으로 실제 측정되어

야 할 주기이다. 그러나 실제 측정된 주기의 평균치는 표 3에서와 같이 0.978906sec이다. 따라서, 이론적으로 측정되어야 할 주기와 실제 측정된 평균 주기의 %오차 p 는 9.49%이다. 식 (7)에서 측정 주기의 %오차가 9.49%일 때, 회전 반경의 %오차가 $\pm 10\%$ 이내로 되기 위해서는 ε 이 4.3137보다 커야 한다. 그러나 실제 ε 은 0.117289이므로 4.3137보다 훨씬 작다. 따라서 측정된 회전 반경의 %오차는 10%보다 훨씬 높을 것으로 예상된다. 실제 측정된 회전 반경의 %오차는 295.6%로서 식 (7)에 의한 예측과 일치함을 알 수 있다.

5. 요약 및 결론

본 연구는 정확하고 정밀한 강체의 질량관성모멘트를 결정하기 위하여 현수 측정법을 이용한 측정 시스템이 갖추어야 할 조건을 이론적으로 구명하고 이를 실험으로 검증한 것이다. 주기의 측정 오차, 측정 강체의 질량 중심에서 피벗축까지의 길이, 측정 강체의 자세, 초기 각변위, 받침대 등이 질량관성모멘트와 회전 반경에 미치는 영향을 구명하고, 그 영향을 최소화하기 위한 방안을 제시하였다. 또한, 질량관성모멘트의 정밀도에 가장 큰 영향을 미치는 변수는 주기의 측정이며, 정확도에 가장 큰 영향을 미치는 변수는 측정 강체의 질량 중심에서 피벗축까지의 길이인 것으로 구명되었다. 본 연구에서 제시된 질량관성모멘트 측정 장치의 조건은 다음과 같으며, 이는 모든 강체를 대상으로 한 장치에 적용될 수 있다.

- 1) 피벗축에서 강체의 질량 중심까지의 거리는 최소화되어야 한다.
- 2) 강체의 초기 각변위는 10° 이하이어야 한다.
- 3) 강체의 관성축과 피벗축의 평행 오차는 10° 이하이어야 한다.
- 4) 받침대는 측정 강체보다 가볍고, 측정 강체와 질량 중심간 거리가 짧고, 회전 반경이 큰 형태이어야 한다.

6. 참고 문헌

1. 이장무. 1994. 기계진동학. 문운당.
2. Dixon, J. C. 1996. Tires, suspension and handling. SAE.
3. Martin, G. H. 1982. Kinematics and dynamics of machines. McGraw-Hill, Inc.
4. Serridge, M. and R. L. Torben. 1987. Piezo-electric accelerometer and vibration preamplifier handbook. Brüel & Kjør Publication.
5. William, F. R. and D. S. Leroy. 1996. Dynamics. John Wiley & Sons, Inc.