

IP 서보 제어 시스템의 Lyapunov 안정도 해석

이정훈

경상대학교 제어계측공학과, 660-701 진주시 가좌동 900

Lyapunov Stability Re-Analysis of IP Servo Systems

Jung Hoon Lee

Dept. of Contr. & Instrum., Gyeongsang Nat. University

Abstract

In this paper, by means of Lyapunov second method, we analyze the stability of IP control servo systems in the time domain for the first time. Based on the results of the stability analysis, the design rule to select the gain of IP control is suggested such that the maximum error of output to the nominal system is guaranteed for all uncertainty and load variations. An example of a speed control of brushless dc motor is given to prove the unusefulness of the gain design rule.

1. 서론

PI/PID 제어는 그의 모든 산업 현장에서 연구 개발된 기존의 알고리즘들 중에서 자동화 등의 제어 문제에 가장 많이 사용하는 유용한, 현장 엔지니어로부터 신뢰성을 얻은 제어 알고리즘이다. 그 이유는 Integral wind-up 문제가 존재하지만 무엇보다 간단하며 응답이 빠르고, 제어기의 이득 Tuning이 어렵지만 한번 이루어지면 강인하게 아주 잘 동작하여 실제적인 검증은 얻었기 때문이다. PI/PID 제어의 이득 조정(Tuning)이 어려운 이유는 이론적으로 시간영역 혹은 주파수 영역에서 이득을 설계하여 실제 시스템에 적용하면, 모델링 오차와 특히 주파수 영역의 페루프 전달함수의 Zero를 고려하지 않았으므로 예상과는 다른 출력이 나타나기 때문이다. 그리고 $t=0$ 시간에 P 동작에 의하여 초기 입력이 결정되어, 큰 기준명령이 주어지면 초기입력이 커져 P 동작의 이득을 증가시키기 어려운 단점이 있다[1,2].

IP제어는 그림 1과 같이 PI 제어의 P제어 입력에서 오차 대신 출력을 사용한 것으로, 제어 응답의 속도는 PI보다 느려지지만, 초기의 제어 입력이 영이 되고 적분 동작에 의하여 출발하므로

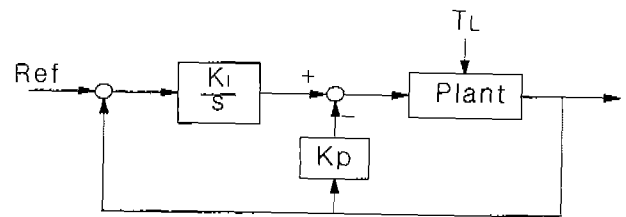


그림 1 IP 제어 시스템의 구조
Fig. 1 Structure of IP Control System

이득을 증가시킬 수 있다. 외란과 매개변수 변동에 대한 강인성은 PI제어와 같은 성능을 가지며, IP 제어 시스템의 전달 함수에 Zero가 생기지 않아 전달함수의 극을 설계한 대로 응답이 나오기 때문에 제어기의 설계가 훨씬 용이해지는 장점이 있다. 그러므로 응답이 빠를 필요가 없는 혹은 응답이 느려야만 되는 강인 제어 서보 문제에 적용이 되고 있다[3-5]. 1986년 Nandam 과 Sen은 직류 전동기 제어 문제에 대하여 IP와 PI제어 실험을 통하여 두 알고리즘의 여러 가지 특징에 관하여 비교 연구를 발표하였다[3-4]. IP 제어뿐만 아니라 제어기의 설계는 일반적으로 제어기의 구조 결정과 이득선정으로 나누어 볼 수 있으므로 제어기의 구조가 결정되었다면 이득의 결정은 상당히 중요한 문제이다. 이득 결정에서 고려해야 할 점은 여러 가지 응용 분야에 따라서 요구 조건이 다를 수 있지만 무엇보다도 기본적으로 안정성을 만족해야 하고 그리고 분야 별로 요구되는 성능요건을 충족시킬 수 있는 이득을 결정해야 한다.

본 연구에서는 [6]의 PI 제어의 안정성해석연구에 이어서 IP 제어로 구동되는 레귤레이션 서보 시스템에 대하여 Lyapunov 의미에서 외란과 불확정성에 대한 안정도를 해석하고 이 해석을 바탕으로 외란과 매개변수 변동에 대하여 IP제어의 이득 결정 규칙을 제안하고자 한다. 그리고 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 브러시 없는

직류 전동기 속도 제어의 예를 들어 제안된 결과에 의하여 IP의 이득을 설계 후 시뮬레이션하여, 그 결과를 검토한다.

2. Lyapunov 안정도 해석

2.1 IP 제어 시스템

가. 대상 플랜트

그림 1은 IP 제어 시스템의 블록다이어그램을 나타낸 것이다. 그림에서처럼 IP제어는 PI 제어의 P동작을 오차 대신 출력을 궤환한 것이고, 그의 장단점은 본 연구의 대상 플랜트는 직류 및 교류 전동기의 속도 제어나 탱크의 수위 제어와 같은 제어문제와 같이 다음 1차 시스템으로 모델링이 가능하다.

$$\dot{X} = -a(t) \cdot X + b(t) \cdot U - F(t) \quad (1)$$

여기서 X 는 제어량인 상태변수, U 는 설계할 제어 입력이며, $F(t)$ 는 외란이고 $a(t)$ 와 $b(t)$ 는 불확실 시스템 매개변수(Uncertain system parameters)로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} a(t) &= a^0 + \Delta a(t) \\ b(t) &= b^0 - \Delta b(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 a^0 와 b^0 는 시스템 매개변수 각 $a(t)$ 와 $b(t)$ 의 모델링 값이며 모델링오차, $\Delta a(t)$ 와 $\Delta b(t)$ 와 외란 $F(t)$ 의 각 최대값은 유계되었으며 (Bounded), 모델링 과정으로부터 알 수 있다고 가정하고 그 값을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \Delta a_M &\equiv \max[|\Delta a(t)|] \\ \Delta b_M &\equiv \max[|\Delta b(t)|] \\ F_M &\equiv \max[|F(t)|] \end{aligned} \quad (3)$$

그리고 일반성의 희생없이 $b(t)$ 는 양이라고 가정하고 그의 최소값과 최대값을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} 0 < b_m < b(t) < b_M \\ b_M &\equiv \max[b(t)] \quad b_m \equiv \min[b(t)] \end{aligned} \quad (4)$$

나. IP 제어

IP 제어는 PI 제어 입력에서 오차 비례항 대신 출력의 비례항으로 수정된 것으로, 상기 플랜트를 기준 명령값, X_R 로 레귤레이션하기 위한 IP 제어기의 입력은 다음과 같으며

$$U = -K_p \cdot X + K_I \cdot \int_0^t (X_R - X) dt \quad (5)$$

만약, 상기 IP의 이득이 안정하게 설계되어 동작한다면, 정상상태의 오차 적분값을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_{I_{ss}} &= \int_0^{t_s} (X_R - X) dt \\ &= \{[a(t_{ss}) + b(t_{ss})K_p]X_R + F(t_{ss})\} / [b(t_{ss})K_I] \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 t_{ss} 는 충분히 흘러간 정상상태의 시간을 의미한다. 상기 정상상태의 오차 적분값은 IP 제

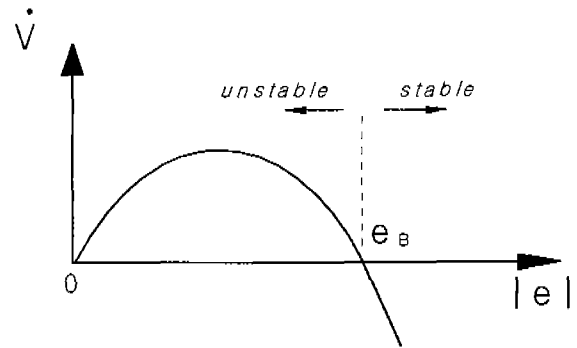


그림 2 Lyapunov 안정영역
Fig. 2 Lyapunov stable region

어 시스템의 안정도 해석을 위한 Lyapunov Candidate Function을 선정할 때에 사용된다.

본 연구에서는 IP제어로 레귤레이션되는 서보 시스템의 안정성에 대하여 Lyapunov Second Method를 적용하여 시간영역에서 처음으로 재해석하여, IP제어의 이득의 함수로 모델링 오차에 의한 과도 상태의 안정 영역에 관한 관계식을 구한다. 이로부터 모델링 오차와 외란의 최대값을 사용하여 공칭 시스템의 설계출력으로부터 모델링 오차와 외란에 의하여 발생하는 최대 오차를 구하여, 모델링 오차와 외란에 대하여 최대오차를 보장할 수 있는 이득의 설계 규칙을 제안하고자 한다.

2.2 Lyapunov 안정도 해석

Lyapunov 의미에서 IP제어 시스템의 안정성을 해석하기 위하여 Lyapunov 후보 함수를 오차와 오차적분 정상상태 값과의 오차적분의 차이를 사용하여 양의 값으로 다음과 같이 선정하자.

$$V = \frac{1}{2} [e^2 + b(t_{ss})K_I \cdot e_0^2], \quad K_I > 0 \quad (7)$$

여기서 오차 e 와 e_0 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$e \equiv X_R - X \quad (8)$$

$$e_0 \equiv E_{I_{ss}} - \int_0^t (X_R - X) dt$$

이 후보함수를 시간에 대하여 미분하여 플랜트 수식 (1), IP 제어 수식 (5) 그리고 정상상태의 오차 적분값 수식 (6)을 대입하여 정리하면 식 (9)와 같이 되고, 상기 (9)의 최종 2차식으로부터 IP 제어 폐루프 시스템에 관한 다음의 안정성 결론을 얻을 수 있다.

$$\dot{V} < 0 \quad \text{for } e > e_B \quad (11)$$

여기서 e_B 는 안정 영역의 경계값으로 다음 식 (12)와 같다. 그림 2은 외란과 불확실성의 모델링 오차에 대한 Lyapunov 안정영역을 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 불확실성과 외란이 존재할 경우, IP 제어 시스템의 Lyapunov 의미에서

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= e \cdot (-\dot{X}) + b(t_{ss})K_I \cdot e_0 \cdot (-e) \\
&= e \cdot [\{a(t) + b(t)K_p\}X(t) + b(t)K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + F] - b(t_{ss})K_I \cdot \left\{ E_{I_{ss}} - \int_0^t e(\tau) d\tau \right\} \cdot e \\
&= e \cdot [\{a(t) + b(t)K_p\} \cdot X(t) + \{b(t_{ss}) - b(t)\}K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + F(t)] \\
&\quad - [(a(t_{ss}) + b(t_{ss})K_p)X_R + F(t_{ss})] \cdot e \\
&= -(a^0 + b^0 K_p)e^2 + [\{\Delta a(t) - \Delta b(t)K_p\} \cdot X + \{a^0 - a(t_{ss}) + (b^0 - b(t_{ss}))K_p\}X_R \\
&\quad + \{b(t_{ss}) - b(t)\}K_I \int_0^t e d\tau + F(t) - F(t_{ss})] \cdot e \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha \cdot e^2 + \beta \cdot e \\
\alpha &= a^0 + b^0 K_p \\
\beta &= [\{\Delta a(t) - \Delta b(t)K_p\} \cdot X + \{a^0 - a(t_{ss}) + (b^0 - b(t_{ss})K_p)\}X_R \\
&\quad + \{b(t_{ss}) - b(t)\}K_I \int_0^t e d\tau + F - F(t_{ss})] \tag{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_B = \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{[\{\Delta a(t) - \Delta b(t)K_p\} \cdot X + \{a^0 - a(t_{ss}) \\
&\quad + \frac{(b^0 - b(t_{ss})K_p)\}X_R}{a^0 + b^0 K_p} \\
&\quad + \frac{\{b(t_{ss}) - b(t)\}K_I \int_0^t e d\tau + F(t) - F(t_{ss})]}{a^0 + b^0 K_p} \tag{12}
\end{aligned}$$

안정성은 유계 안정성(Bounded Stability)을 나타낸다. 그림 2와 식 (12)으로부터 모델링 오차인 불확실성 값과 외란이 안정성 영역에 어떤 함수로 영향을 주는지 잘 알 수 있으며, 매개변수 변동 혹은 외란이 발생하였을 때의 공칭 출력으로부터 최대 오차를 의미한다. 실제 e_B 를 정확하게 구할 수는 없지만 불확실성과 외란의 최대값인 수식 (3)과 (4)로부터 e_B 를 IP제어의 이득 K_P 와 K_I 의 함수로 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{e}_B \leq \frac{[\{\Delta a_M + \Delta b_M K_p\} \cdot |X| + \{\Delta a_M + \Delta b_M K_p\}]|X_R| + \Delta b_M K_I \int_0^t e d\tau + F_M}{a^0 + b^0 K_p} \tag{13}$$

여기서 위첨자 M 은 변수의 최대값을 나타낸다. 상기 (13) 수식을 이용하여, 외란과 불확실성의 존재하에 출력오차 e_a 를 보장하는 IP제어의 이득을 설계할 수 있다. 상기 안정성 해석을 바탕으로 주어진 오차 허용 범위 e_a 에 대하여 세 가지 경우에 대하여 결론적으로 언급하면,

① 외란과 불확실성이 없는 경우

$$\begin{aligned}
(\Delta a(t) = \Delta b(t) = 0, \quad a(t) = a^0, \quad b(t) = b^0 = b_m \\
= b_m, \quad F(t) = F(t_{ss}) = 0)
\end{aligned}$$

안정역역의 경계값 (12) 식과 그의 추정값 (13) 식은 다음과같이 영이되고

$$e_B = \hat{e}_B = 0 \tag{14}$$

최소 안정성을 만족하기 위한 PI의 이득 K_P 와 K_I 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
K_P &> \max\left(\frac{-a^0}{b^0}\right), \\
K_I &> 0 \tag{15}
\end{aligned}$$

② 외란만 존재하는 경우
안정역역의 경계값 (12) 식과 그의 추정값 (13) 식은 다음과 같고

$$e_B = \frac{F(t) - F(t_{ss})}{a^0 + b^0 K_p} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_B &= \frac{\max[F(t) - F(t_{ss})]}{a^0 + b^0 K_p} \\
&\leq \frac{F_M}{a^0 + b^0 K_p} \tag{17}
\end{aligned}$$

(17)식의 관계와 식(7)로부터

$$\begin{aligned}
K_P &> \left(\frac{F_M}{e_a} - a^0\right)/b^0 \\
K_I &> 0 \tag{18}
\end{aligned}$$

을 만족하는 범위에서 이득을 선정하고,

③ 외란과 불확실성의 모델링 오차가 동시에 존재할 때, (13)의 관계로부터 다음 (19)식을 만족하는 범위에서 K_P 와 K_I 를 구한다.

$$\begin{aligned}
e_a \geq \frac{[\{\Delta a_M + \Delta b_M K_p\} \cdot |X| + \{\Delta a_M + \Delta b_M K_p\}]|X_R| \\
+ \Delta b_M K_I \int_0^t e d\tau + F_M}{a^0 + b^0 K_p} \tag{19}
\end{aligned}$$

상기 (15), (18), (19) 수식에 의하여 각 경우에 해당하는 조건에서 공칭 시스템의 출력으로부터 허용한도 오차 범위를 만족하는 출력을 얻을 수 있는 IP 제어의 이득 설계가 가능하다. 따라서 제어 문제에 따라서 만족시켜야할 조건이 다르고 시간영역의 허용오차만 주어지지 않으므로, 시

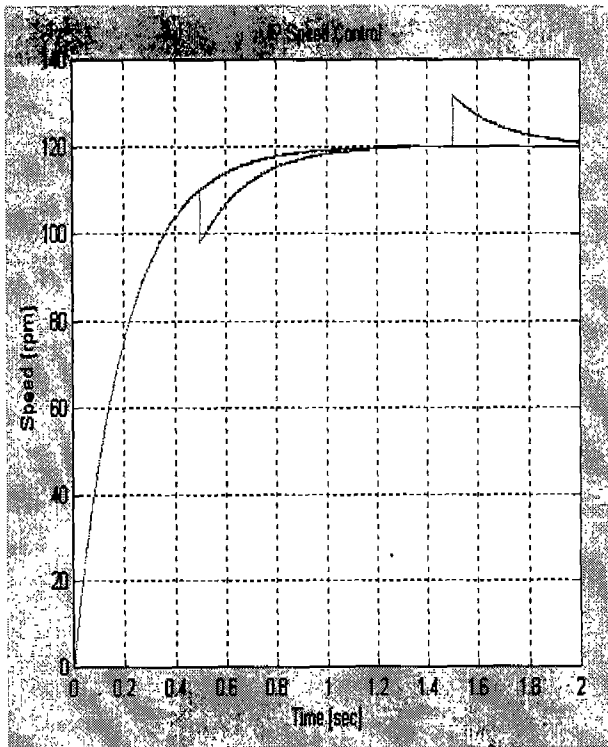


그림 3 IP 제어의 결과
Fig. 3 Results of IP control

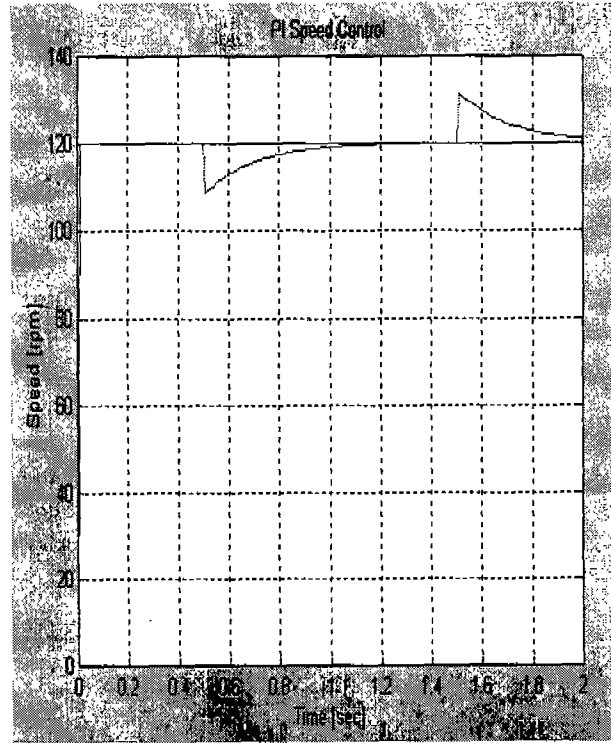


그림 4 PI 제어 결과
Fig. 4 Results of PI control

간영역의 허용오차에 대하여서는 본 연구의 결과를 활용하고 Settling Time, Overshoot 그리고 주파수 영역의 요구조건 Phase와 Gain Margin 등에 대하여서는 기존의 연구결과를 활용하여 주어진 요구조건을 전부 만족하는 이득 집합에서 선정하기를 제안한다.

3. 시뮬레이션 연구

본 시뮬레이션 연구에서 사용한 직접구동 브러쉬없는 직류 전동기의 Specification이 표1에 나타나 있다.

Item	Value	Unit
Rated Power	120	[Watt]
Rated Torque	11.0	[Nm]
Rated Speed	123	[rpm]
Rated Voltage	70.0	[Volt]
Rotor Inertia	0.00156	[Kgm ²]
Current Constant	3.038	[Nm/A]
Number of Pole	16	

Table 1 Characteristics of direct drive motor
표 1 직접구동 전동기의 특성

표 1의 값을 사용하여 모델을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{X} = -54.25 \cdot X + 12446 \cdot U - F \quad (20)$$

그리고 전체 IP 제어 시스템의 전달함수는 다음과 같다.

$$T = \frac{12446K_I}{s^2 + (54.25 + 12446K_p)s + 12446K_I} \quad (21)$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

IP 제어는 위 수식 (20)에서 알수 있듯이 영점이 없으므로 이론적인 분모의 극설계로써 설계대로 응답을 얻을 수 있다. 하지만 불확정성과 외란이 존재하는 경우 그 영향을 받으므로 본 연구의 결과를 활용한 강인한 이득의 설계가 요구된다. 설계 예를 외란만 존재하는 경우에 대하여 들자. 속도 기준명령 X_R 을 정격 120 [rpm]로 주어지고, 최대부하 변동 하에서 10[%] 속도오차가 허용된다면, 식 (17)에 의하여 식 (22)을 얻을 수 있다

$$K_p > 1.98, \quad \text{for } |e_B| < 12 \text{ rpm} \quad (22)$$

식(17)에 의하여 $K_p = 2$ 을 선정한다. 그리고 $K_I = 10$ 를 선정하였다. 외란에 대한 강인성을 보기 위하여 시간 0.5초 순간에 최대 부하를 안가하고 시간이 1.5초인 순간에 부하는 제거하였다. 그림 3은 IP 제어 속도제어 시스템의 무부하와 상기 부하 조건하의 시뮬레이션 결과이고, 그림 4는 비교를 위하여 PI 제어 속도제어 시스템의 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. 같은 이득에서 IP제어의 응답특성은 예상대로 PI제어 보다 느리지만 정상상태가 되면 외란에 대한 응답특성은

PI 제어와 같다. 그리고 공칭출력에서 10%허용 한 설계대로 IP의 결과가 만족함을 알 수 있다. 따라서 부하 변동에도 시간영역의 허용오차를 만족하는 IP제어의 이득의 설계가 가능함을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 불확실성과 외란이 존재하는 플랜트를 레귤레이션 제어하기 위한 IP 서보 시스템에 대하여, Lyapunov 의미에서 안정성을 재해석하였고, 이를 바탕으로 불확실성과 외란이 존재하더라도 허용 오차 범위를 만족할 수 있는 IP의 이득 선정을 위한 유용성 방법을 제안하였으며, 직접구동 브러쉬없는 직류 전동기 속도 제어의 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 연구된 결과의 유용성을 입증하였다.

참고 문헌

- [1] K. J. Astrom and C. C. Hang, P. Persson, and W. K. Ho, "Toward intelligent PID control," *Automatica*, Vol. 28, ni.1 pp.1-9, 1992.
- [2] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum settings for automatic controllers," *Trans. ASME*, Vol.64, pp.759-768, 1942.
- [3] P. K. Nandam and P. C. Sen, "A comparative study of proportional-integral(P-I) and integral-proportional(I-P) controllers for DC motor drives," *INT. J. Control*, Vol. 44, no.1 pp.283-297, pp.1986.
- [4] P. K. Nandam and P. C. Sen, "Analog and digital speed control of DC drives using proportional-integral and integral-proportional control techniques," *IEEE Tran. on Ind. Electronics*, Vol.IE-34, no.2, pp.227-233, 1987.
- [5] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Computer Controlled System: Theory and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. 1984.
- [6] 이정훈, 신희범, "PI형 서보 시스템의 Lyapunov 안정도 해석," 1997년 제어계측 자동화 로보틱스 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp.41-44,1997.