<특강-1>

K-Space의 원리

고려대학교 전자 및 정보공학부
오 창 현

서 론

여기서는 MRI (Magnetic Resonance Imaging, 자기공명영상)의 원리를 이해하는데 중요한 k-Space에 관해 설명을 하고자 한다. MRI에서 k-Space란 공간좌표에 해당하는 3차원 공간 (x, y, z)을 Fourier변환 (Fourier Transform: FT)한 주파수 공간 (k_x, k_y, k_z)을 의미한다.

MRI에서는 공간적 위치정보를 세 방향의 경사자계 (Magnetic Field Gradient)를 이용해서 얻게 된다. Excitation 된 Spin Magnetization은 경사자계를 가하면 경사자계에 비례하는 주파수로 회전하게 되며 그로부터의 시그널 (Nuclear Magnetic Resonance Signal, NMR 시그널)은 공간의 스핀분포를 Fourier 변환한 주파수 영역 (k-space)에서의 값이 된다. NMR 시그널은 가해준 경사자계에 따라 k-Space를 움직인다. 이렇게 얻은 2차원 혹은 3차원 데이터를 Inverse Fourier Transform하여 영상을 얻게 된다. 여기서는 K-space의 주파수 데이터의 의미와 NMR시그널과의 연관성을 살펴 보기로 하겠다.

K-Space 시그널

90° RF (Radio Frequency) 펄스로 Equilibrium Magnetization을 회전시켜 transverse plane (x-y 평면)상에 놓은 후 경사자계를 가하면서 NMR시그널을 받는다고 가정하면 위치에 따른 magnetization (M_{xy} (x, y, z, t))은 아래의 식으로 주어진다.

$$M_{xy}(x, y, z, t) = M_0\ \rho\ (x, y, z)\exp\ \{\ -i\gamma\ (x\int_0^t G_x dt + y\int_0^t G_y dt + z\int_0^t G_z dt)\ \}$$

여기서 ρ는 스핀밀도, G_x, G_y, G_z는 각 방향 경사자계의 크기이고 주자계에 의한 Larmor 주파수 성분 ($e^{iw_0 t}$)은 생략되었다.

여기된 volume내의 M_{xy}를 적분하면 NMR시그널 (S(t))은

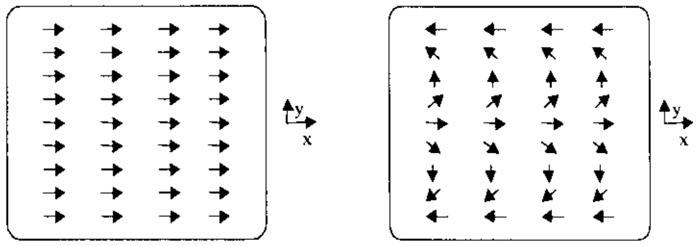
$$S(t) = \int\int\int M_{xy}(x, y, z, , t)dxdydz$$

와 같이 얻어진다.

z=z_0평면내의 spin이 선택된 경우 그 평면 내에서 2차원적으로 분포된 스핀으로부터의 시그널은 아래와 같이 구할 수 있다. 경사자계가 G_x, G_y로 고정되어 있고 그 길이가 각각 t_x, t_y이라면

$$S(t_{x,t_y}) = M_0\int\int\ \rho\ (x, y, z=z_0)e^{i\gamma\,(xG_x t_x + yG_y t_y)}dydx$$

$$= M_0\int\ [\ \int\ \rho\ (x, y, z=z_0)e^{i\gamma\, yG_y t_y}dy\ ]\ e^{i\gamma\, yG_y t_y}dx$$



(a) (b)

그림1. Y-gradient를 가하기 전, (a), 과 G_y을 일정시간 가한 후 magnetization의 위상분포, (b).

가 된다. 예를 들어 위 식의 [ ]내에 해당하는 y 경사자계만 가해지는 경우의 magnetization의 회전을 보이면 다음 그림1과 같이 된다. (a)는 G_y를 가하기 전의 분포이고 (b)는 일정 시간 경사자계를 가한 후 y좌표에 비례하여 magnetization이 회전한 후의 분포이다. 즉, y 좌표에 비례하는 정도로 위상이 변하게 되며 받는 최종NMR 시그널은 이런 위상의 magnetization을 공간적분한 위식의 [ ]속의 값이 된다. 추가로 x 경사자계를 가한 경우에는 x좌표와 경사자계의 길이에 비례하여 추가로 위상이 변하게 된다.

모든 t_x와 t_y의 값의 combination에 해당되는 $S(t_x, t_y)$를 구하면 이 값이 바로 2차원 k-space (k_x, k_y)의 값이 된다. 이를 얻기 위해 보통 t_x, t_y중 하나를 고정한 후 (encoding gradient 방향) 나머지 경사자계를 가하면서 (reading gradient 방향) 데이터를 얻는다.

K-space와 Fourier Series

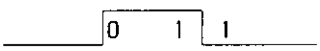
주어진 구간 ($-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$) 내의 임의의 모양을 표시하는 함수 f(t)는 와 의 조합으로 표시된다. 이를 식으로 표시한 것을 Fourier Series 전개라고 하며 이는 다음과 같이 표현된다.

$$f(t) = a_0 + \sum_0^{\infty}(a_n \cos {}_0 t + b_n \sin nw_0 t)$$

단, $w_0 = 2\pi/T$, $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t)\cos nw_0 t dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t)\sin nw_0 t dt$

여기에서 많은 개수의 항으로 표현할수록 원래 모양을 정확히 표시할 수 있다. 이 내용은 exponential 함수를 사용하여 아래와 같이 표현된다.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inw_0 t} \quad 단,\ c_n = c^*_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T}\int_{\frac{-2}{T}}^{\frac{2}{T}} f(t) e^{inw_0 t} dt$$

예를 들어 

과 같은 함수는

$f(t) = \frac{2}{\pi}(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t \ \ldots\ )$와 같이 표현된다. 위의 C_n은 MRI에서 한 방향의 경사자계를 가하면서 sampling한 FID 시그널의 값 (앞 절 참조)과 같은 모양의 식임을 알 수 있다. 이 사실로부터 우리는 위의 C_n으로 이루어진 공간이 Fourier Space 또는 k-space가 되는 것을 알 수 있다. 이 이론을 2-3방향으로 적용하면 2-3차원의 k-space가 형성된다.

그림 2(a)에 2차원적으로 사각형모양으로 분포되어있는 함수 f(x,y)를 보였다. 이를 FT한 함수 즉 k-space 데이터는 그림 2(b)와 같이 된다. 이 k-space는 G_x, G_y를 변화함에 따라 scanning하게 되며 , $k_x = \frac{\gamma t_x G_x}{2\pi}$, $k_y = \frac{\gamma t_y G_y}{2\pi}$의 관계식을 사용하여 경사자계 후의 k-space에서의 위치를 알 수 있다.

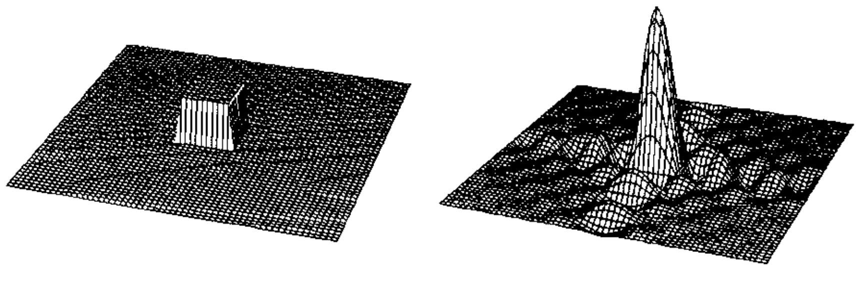


그림 2. 사각형 모양의 Phantom과 그 k-space데이터
(a) Phantom의 모양 (b) (a)의 k-space데이터

K-Space 데이터로부터 Spin 분포의 계산

K-space의 값은 원래의 함수를 FT 한 값이므로 이를 IFT (Inverse Fourier Transform)함으로써 원래 함수를 재구성할 수 있다. 이는 앞 절의 cn으로부터 f(t)를 재구성하는 것과 마찬가지이다. 예를 들어서 위의 그림2의 데이터를 사용한 영상재구성 단계를 설명하면 아래와 같다. 즉, 이 k-space의 데이터 (그림 2(b))에 그림 3에서 보는 바와 같이 좌-우, 상-하 방향의 두 번의 IFT를 수행함으로써 spin 분포를 구할 수 있으며 이를 영상 재구성이라 한다.

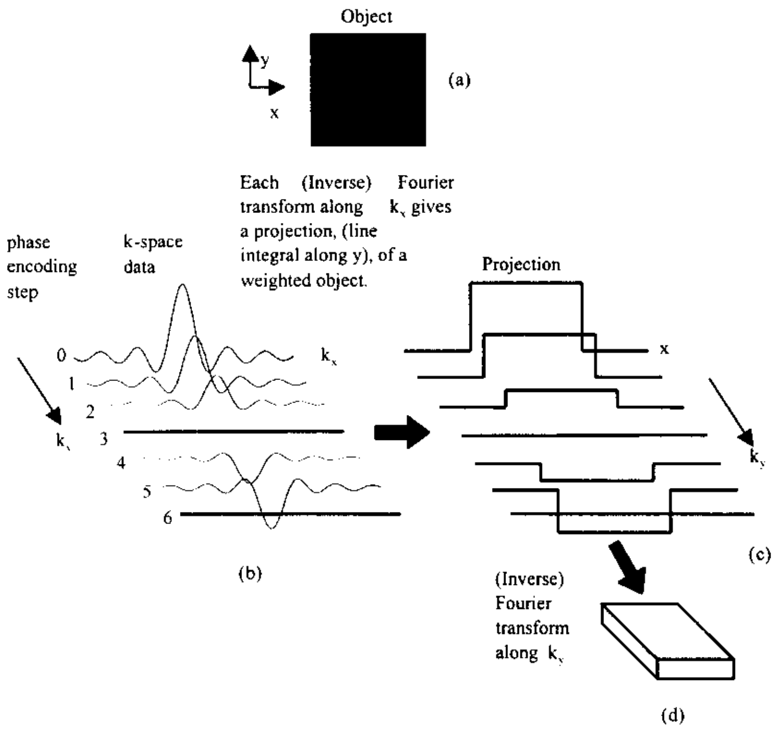


그림 3. 2차원 k-space 데이터로부터 MR영상재구성
(a), 원래의 영상 (그림 2(a)와 같음)
(b), 2차원 k-space데이터. 그림 2(b)의 값을 그래프로 그린 것.
(c), (b)의 데이터를 kx방향으로 1D IFT 한 데이터
(d), (c)의 데이터를 ky방향으로 1D IFT 한 데이터. 재구성된 영상을 나타낸다.

결 론

이 글에서는 MRI에서 k-space데이터의 원리와 이를 이용한 영상재구성에 관해 설명했다. 경사자계 하에서 얻은 NMR 시그널은 Spin의 분포를 Fourier Transform한 k-space의 데이터가 되는 것을 알 수 있었으며 이를 Inverse Fourier Transform함으로써 MR영상이 재구성됨을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Z. H. Cho, Joie P. Jones, Manbir Singh, "Foundations of medical imaging," John Wiley & Sons, Inc., 1993.
2. Marinus T. Varrdingerbroek, Jacques A. den Boer, "Magnetic resonance imaging theory and practice," Springer, 1996.
3. Ronald N. Bracewell, "The Fourier Transform and its applications," 2nd edition," Mc GRAW-HILL, 1986.