

## Multigrid 기법을 이용한 원심압축기 임펠러 3차원 난류유동 해석

문영준, 장규호, 박편구 (고려대학교 기계공학과)

### 1. 서론

일반적으로 고속회전 원심압축기 임펠러내의 3차원 난류유동을 해석할 경우 유동의 복잡성 및 난류유동 계산으로 인하여 많은 계산 시간 및 해석기법의 안정성을 요구하게 된다.

본 연구에서는 원심압축기 임펠러 3차원 난류유동을 해석을 보다 효율적으로 하기 위한 수렴가속화 방법으로 회전좌표계를 이용한 3차원 난류유동 해석기법에 multigrid 기법을 적용하여 이 기법의 효율성 및 안정성을 검증하는 동시에, 한편으로 Mizuki B-type 및 Niigata Ms. 350 원심압축기 임펠러 유동 실험 결과들과 비교하여 본 연구에서 사용하는 전산해석기법의 정확성도 검증하는 것을 목적으로 한다. 또한 표준  $k-\epsilon$  난류 방정식을 사용할 경우 multigrid 기법 적용 시 수치해석적으로 고려해야 할 사항들을 검토하고자 한다.

### 2. 지배방정식 및 수치해석기법

#### 지배방정식

무차원화된 압축성 Navier-Stokes 지배방정식을 각속도  $\Omega$ 의 회전좌표계[1,2]로 전환시키면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{G}}{\partial \zeta} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial \widehat{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \widehat{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \widehat{G}_v}{\partial \zeta} \right) = H + H_t \quad (1)$$

여기서,

$$\widehat{Q} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \\ \rho k \\ \rho \epsilon \end{bmatrix}, \quad H = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \Omega w \\ \rho \Omega v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_t = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P - \rho \epsilon \\ C_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_2 \frac{\rho \epsilon^2}{k} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho U' \\ \rho u U' + \xi_x p \\ \rho v U' + \xi_y p \\ \rho w U' + \xi_z p \\ e U' + p U \\ \rho k U' \\ \rho \epsilon U' \end{bmatrix}, \quad \widehat{F} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho V' \\ \rho u V' + \eta_x p \\ \rho v V' + \eta_y p \\ \rho w V' + \eta_z p \\ e V' + p V \\ \rho k V' \\ \rho \epsilon V' \end{bmatrix}, \quad \widehat{G} = J^{-1} \begin{bmatrix} \rho W' \\ \rho u W' + \zeta_x p \\ \rho v W' + \zeta_y p \\ \rho w W' + \zeta_z p \\ e W' + p W \\ \rho k W' \\ \rho \epsilon W' \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{yx} + \xi_z \tau_{zx} \\ \xi_x \tau_{xy} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{zy} \\ \xi_x \tau_{xz} + \xi_y \tau_{yz} + \xi_z \tau_{zz} \\ h_1 \\ N_k \left( a_{11} \frac{\partial k}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial k}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) \\ N_\epsilon \left( a_{11} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} \right) \end{bmatrix}, \quad \widehat{F}_v = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{yx} + \eta_z \tau_{zx} \\ \eta_x \tau_{xy} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{zy} \\ \eta_x \tau_{xz} + \eta_y \tau_{yz} + \eta_z \tau_{zz} \\ h_2 \\ N_k \left( a_{21} \frac{\partial k}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial k}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) \\ N_\epsilon \left( a_{21} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} \right) \end{bmatrix}$$

$$\widehat{G}_v = J^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{yx} + \zeta_z \tau_{zx} \\ \zeta_x \tau_{xy} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{zy} \\ \zeta_x \tau_{xz} + \zeta_y \tau_{yz} + \zeta_z \tau_{zz} \\ h_3 \\ N_k \left( \alpha_{31} \frac{\partial k}{\partial \xi} + \alpha_{32} \frac{\partial k}{\partial \eta} + \alpha_{33} \frac{\partial k}{\partial \zeta} \right) \\ N_\epsilon \left( \alpha_{31} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + \alpha_{32} \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta} + \alpha_{33} \frac{\partial \epsilon}{\partial \zeta} \right) \end{pmatrix} \quad (2)$$

이고,  $J$ 는 좌표변환에 따른 Jacobian을 나타내고,  $(u, v, w)$ 는 절대속도  $(u', v', w')$ 는 상대속도를 각기 나타내며 그 관계는 다음 식과 같다.

$$u' = u, \quad v' = v - \Omega z, \quad w' = w + \Omega y \quad (3)$$

한편 난류유동 계산을 위하여 표준  $k-\epsilon$  방정식[3]을 사용하였으며 식 (2)에서  $N_k$ ,  $N_\epsilon$  그리고  $\alpha_{ij}$ 는 다음과 같고

$$N_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}, \quad N_\epsilon = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \\ \alpha_{ij} = \vec{\nabla} \xi_i \cdot \vec{\nabla} \xi_j \quad (\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta, \quad \xi_3 = \zeta) \quad (4)$$

난류 운동에너지 생성률  $P$ 는 식 (5)와 같고

$$P = Re^{-1} \left[ \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (5)$$

난류점성계수는 다음과 같이 정의 되었다.

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} Re \quad (6)$$

### 공간이산화 및 경계조건

격자셀 중심에 기초한 유한체적법을 이용하였고, 대류항을 중앙차분법과 인공점성항을 이용하여 이산화하면 다음 식 (7)과 같이 표현된다.

$$\frac{\Delta Q_i}{\Delta t} = -J_i \sum_{j=(k,i)} [(\widehat{E} - Re^{-1} \widehat{E}_v) A_x + (\widehat{F} - Re^{-1} \widehat{F}_v) A_y + (\widehat{G} - Re^{-1} \widehat{G}_v) A_z - D]_j \\ + (H + H_i)_i = R(Q_i) \quad (7)$$

여기서  $Q$ 는  $J \widehat{Q}$  이고,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ 는 격자셀의 면적 방향벡터를 나타내며 식 (7)의 우변항은 잉여항에 해당된다.

본 연구에서 계산되는 두 가지의 원심압축기가 전부 비압축성의 유동이기 때문에 일반적으로 압축성 유동에서 입출구에 적용되는 방식과는 약간 다른 형태의 경계조건을 사용하였다. 즉 입펠러 입구에서는 정체 온도 및 정체 압력을 고정하였고 또한 유량에 따른 입구 유속을 또한 고정시켜 주었고, 출구에서는 밀도와 압력을 외삽하였고 유속은 유량보정을 시켜 주었다. 따라서 주어진 회전수와 유량에 따라 출구 압력이 자동적으로 결정되도록 하였으며 입펠러의 출구 압력을 실험치와 비교하여 정확성을 검증토록 하였다.

### 시간적분 및 Multigrid 수렴가속화 기법

시간에 대한 적분으로는 외재적 4-단계 Runge-Kutta 기법[4]을 사용하였으며, local time stepping 기법과 implicit residual smoothing 기법을 사용하여 CFL 수를 5정도까지 확장하여 사용 하였다. 한편 입펠러 내의 3차원 난류유동을 계산하기 위해서는 상당한 계산시간이요

구되기 때문에 본 연구에서는 수렴가속화를 극대화 할 수 있는 방법으로 multigrid 기법을 적용하였다.

Multigrid 기법이란 조밀한 격자에서 수렴이 느려지는 주 원인 인자인 장과장의 잉여오차를 성긴 격자로 옮겨 단과장의 잉여오차로 인식시킨 후 이 오차를 빨리 제거함으로써 수렴을 가속화 시키고 또한 성긴 격자에서 시간 진행을 빨리 시킴으로써 정상 상태에 빨리 도달하게 하여 수렴을 가속시키는 방법이다. Multigrid 기법[4,5]에는 FAS(Full Approximation Storage) 기법과 FMG(Full Multigrid) 기법이 있는데 본 연구에서는 FMG 기법까지 사용하여 임펠러 내부 3차원 난류유동을 해석하여 보았다.

Multigrid 기법을 간략히 설명하면 다음과 같다. 우선 이산화된 지배방정식 (7)을 간단한 형태로 나타내면 다음과 같고

$$-\frac{dq}{dt} = R(q) \quad (8)$$

조밀격자의 종속변수를 다음 식과 같이 보간하여 성긴격자로 옮기는데

$$q_{2h}^{(0)} = I_h^{2h} q_h = \sum \frac{V_h q_h}{V_{2h}} \quad (9)$$

여기서  $I_h^{2h}$  는 restriction operator라 하고  $V$ 는 격자 체적을 의미한다.

이와 같은 방법으로 변수들을 성긴격자로 옮기게 되고, 또한 조밀격자의 잉여오차도 다음 식 (10)과 같은 원천항을 사용하여 성긴격자로 전달되게 된다.

$$f_{2h} = - \sum R_h(q_h) + R_{2h}(q_{2h}^{(0)}) \quad (10)$$

따라서 성긴 격자에서는 다음과 같이 원천항이 새로이 삽입된 새로운 잉여항을 가지고 다시 Runge-Kutta 기법을 이용하여 시간 적분하게 된다.

$$q_{2h}^{(1)} = q_{2h}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t (R_{2h}(q_{2h}^{(0)}) - f_{2h})$$

...

$$(11)$$

$$q_{2h}^{(k)} = q_{2h}^{(0)} - \alpha_k \Delta t (R_{2h}(q_{2h}^{(k-1)}) - f_{2h})$$

한편 restriction 과정이 가장 성긴 격자 레벨에 까지 도달하게 되면 다시 prolongation 과정을 통하여 조밀 격자로 옮겨지게 된다. 만약 3-레벨 multigrid 기법이 사용된다고 하면  $q_{4h}^{(+)}$  는 가장 성긴 4h-레벨의 격자에서 계산 된 값이 되고 따라서 다음 식과 같이 prolongation 과정을 통하여 한 단계 조밀한 격자로 옮겨지게 된다.

$$q_{2h}^{(+)} = q_{2h}^{(m)} + I_{4h}^{2h}(q_{4h}^{(+)} - q_{4h}^{(0)}) \quad (12)$$

여기서  $I_{4h}^{2h}$  는 prolongation operator이고 본 연구에서는 0차의 보간법을 사용하였다. 이와 같은 방법으로 가장 조밀한 격자까지 보간되어 올라오게 된다.

한편 multigrid 기법 적용시 난류방정식에 대한 처리는 또 하나의 중요한 문제가 된다. 본 연구에서는 벽법칙을 사용하였고 이 방법을 사용할 경우에는 성긴 격자 레벨에서 벽법칙 적용시  $y^+$ 가 500을 넘게되고 또한 수치적으로 여러가지 불안정성을 유발하였다. 따라서  $k-\epsilon$  방정식은 가장 조밀한 격자 레벨에서만 풀도록 하였고 성긴 격자 레벨에서는 단지 난류 점성계수만 연속적으로 보간하여 전달해 주도록 하였고, 평균유동 방정식에서만 multigrid 기법을 적용하였다.

### 3. 결과 및 고찰

본 연구에서는 먼저 Mizuki[6-8] B-type 원심압축기 임펠러내의 3차원 난류유동을 해석하여 보았다. 그림 1은 자오면에서의 임펠러 형상 및 치수를 보여주고 있고 그림 2는 12개의 날개가 부착된 Mizuki 임펠러의 전체 형상을 나타내고 있다. 이 임펠러는 0.7mm의 간극과 포물선형의 inducer를 가지고 있으며, 6000 rpm로 회전하고, 본 연구에서 계산된 경우의 유량 계수는  $\phi = 0.4$ 와 0.5이다. 그림 3은 본 계산에서 사용된 임펠러 한 유로의 격자를 보여주고 있으며 사용된 격자수는 73x25x25이다. 그림 4는  $\phi = 0.4$  경우의 계산된 정압 분포를 압력면과 허브면에서 보여주고 있으며 계산된 압력비는 1.04이다.

한편 본 연구에서 수렴가속화를 시키기 위하여 적용한 multigrid 기법의 결과를 검토해

보면, 그림 5는 유량계수  $\phi = 0.4$ 의 경우로 단일격자 사용시와 비교하여 FMG 4-레벨 격자를 사용할 경우에 대하여 평균유동의 수렴성을 보여 주고 있다. Table 1에서는 반복 횟수 및 계산시간을 비교 하였는데 multigrid 기법을 사용함으로써 대략 60% 정도의 계산 노력을 절감할 수 있는 결과를 얻을 수 있었다. 유량계수는  $\phi = 0.5$ 의 경우에 대해서도 대략 동일한 결과를 얻을 수 있었으며 2000 cycle내에 3 오더의 잉여오차가 감소된 결과를 얻을 수 있었다.

또한 본 계산 결과의 정확성을 비교하기 위하여 그림 6과 7에서는 유량계수  $\phi = 0.4$ 와 0.5의 각 경우에 대해서 압력면과 흡입면에서의 정압 분포를 각기 1/8, 4/8, 7/8 blade stream surfaces에서와 shroud면에서 실험치와 비교한 결과를 보여 주고 있는데 비교적 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었으며, 또한 앞서 입출구의 경계조건 처리에서 언급된 바와 같이 해당 유량에 대하여 임펠러 출구 압력이 계산에 의해서 잘 예측된 것을 보여주고 있다.

두 번째 계산 결과는 KIST[9]에서 실험한 Niigata MS. 350 원심압축기 임펠러로 17개의 날개를 가지고 있으며 회전수 3000 rpm에 대하여 유량계수  $\phi = 0.253$ 인 경우로서 유입속도는 10.9 m/s이다. 그림 8은 본 임펠러의 형상 및 치수를 보여주고 있으며 그림 9는 본 계산에서 사용된 격자로서 105\*45\*21개의 격자를 사용하였고 FMG 3-레벨을 사용하여 계산하였다. 그림 10은 계산된 압력 분포를 압력면과 허브면에서 보여주고 있으며 압력비는 대략 1.02배이다. 한편 그림 11은 디퓨저 내에서의 압력계수 분포를 실험치와 비교한 결과를 보여 주고 있으며, 그림 12에서는 유량계수  $\phi = 0.253$ 에서의 정압상승계수를 본 원심압축기의 성능 곡선과 비교하여 보았는데, 비교적 실험치와 잘 일치하는 결과들을 보여주고 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 multigrid 기법 (FMG 4-레벨 기법)을 원심압축기 임펠러 3차원 난류유동 계산에 적용하여 대략 60%의 계산시간 절감을 얻을 수 있는 빠른 수렴효과를 보여 주었으며 한편 난류 계산에서도  $k$ 나  $\epsilon$  값들도 평균유동 값과 거의 비슷한 수렴성 및 안정성을 보여주는 결과를 얻을 수 있었다. 한편 두 가지 경우의 원심압축기 실험 결과와 계산결과를 비교하여 봄으로써 본 계산결과와 정확성도 검증할 수 있었다.

#### 5. 참고문헌

- [1] Chima, R.V., 1991, "Viscous Three-Dimensional Calculations of Transonic Fan Performance," NASA TM-103800.
- [2] Arnone, A., 1994, "Viscous Analysis of Three Dimensional Rotor Flow Using a Multigrid Method," Journal of Turbomachinery, Vol. 114.
- [3] Sondak, D.L., and Pletcher, R.H., 1995, "Application of Wall Functions to Generalized Nonorthogonal Curvilinear Coordinate Systems," AIAA Journal, Vol. 33, No. 1.
- [4] Chima, R.V. and Turkel, E., 1987, "Comparison of Three Explicit Multigrid Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations," NASA Technical Memorandum 88878, ICOMP-86-3.
- [5] Farmer, J., Martinelli, L., and Jameson, A., 1994, "Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface," AIAA Journal, Vol. 32, No. 6.
- [6] Mizuki, S., Ariga, I., and Watanabe, I., 1974, "Investigation Concerning the Blade Loading of Centrifugal Impellers," ASME Paper 74-GT-143.
- [7] Mizuki, S., Ariga, I., and Watanabe, I., 1975, "A Study on the Flow Mechanism within Centrifugal Impeller Channels," ASME Paper 75-GT-14.
- [8] S. Mizuki, I. Ariga and I. Watanabe, 1980, "Description of Compressor Geometries," ASME 25th Gas Turbine Conference, March 9-13.
- [9] 한태수, 1997, "원심압축기의 깃 없는 디퓨저에서 폭 변화에 따른 성능과 유동특성에 관한 실험적 연구," 고려대학교 기계공학과 석사학위논문.

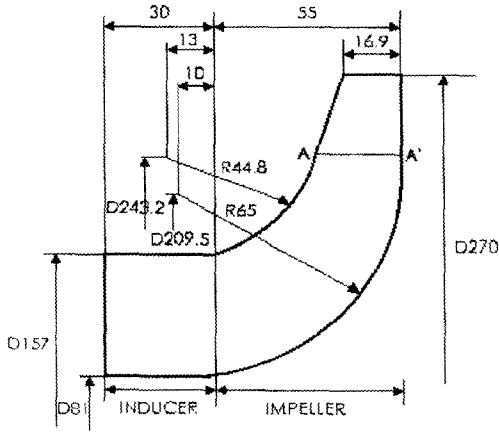


Fig. 1 Meridional Configuration of Mizuki Impeller

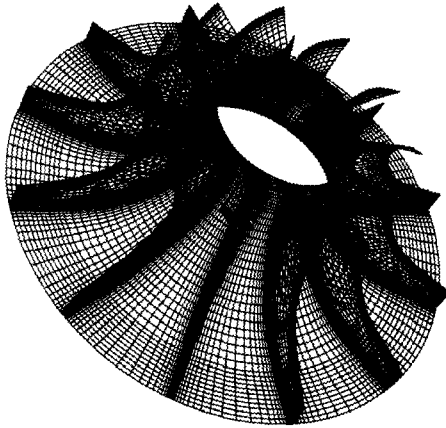


Fig. 2 Mizuki Impeller

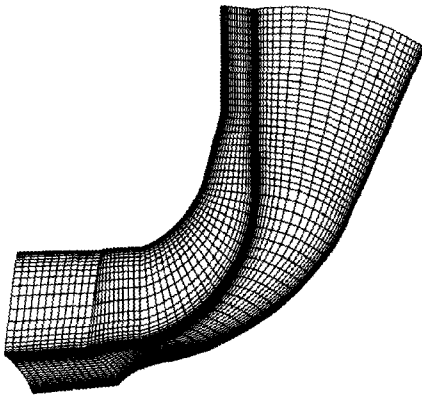


Fig. 3 3-D Mesh(73x25x25)

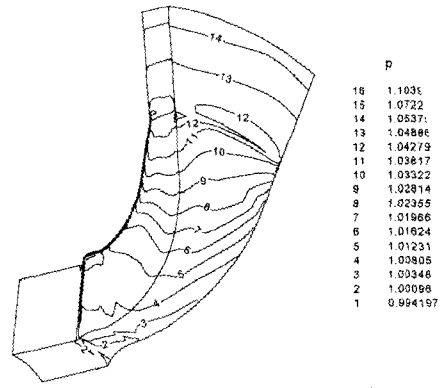


Fig. 4 Static Pressure contours at Hub & pressure side

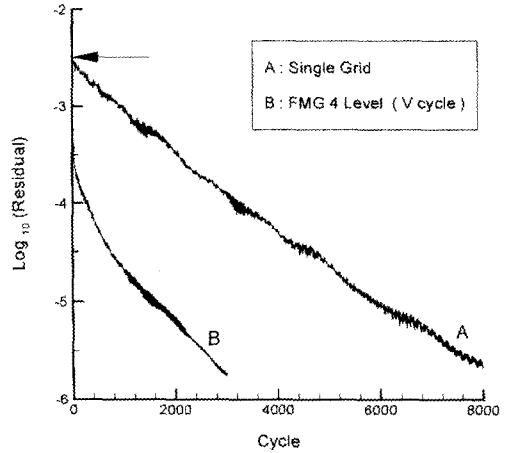
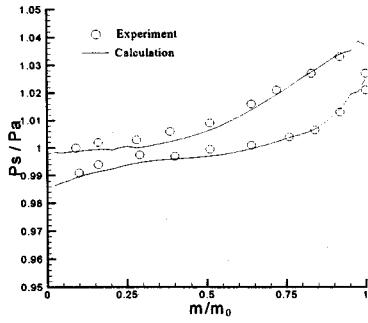


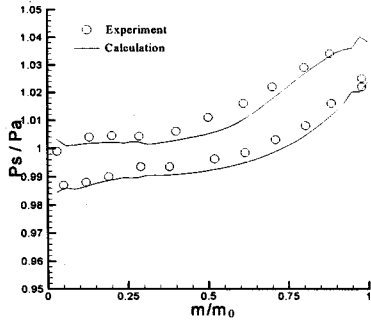
Fig. 5 Comparison of convergence histories of mean flow

Table 1. Comparison of the convergence speed of multigrid method (Pentium-pro)

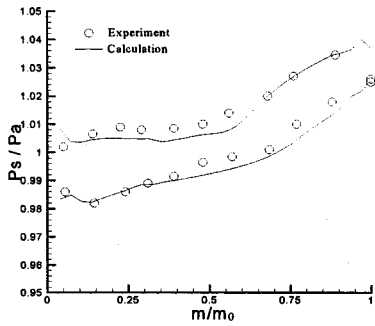
| Multi-grid scheme | Cycle | CPU time (hr) | saved time(%) |
|-------------------|-------|---------------|---------------|
| Single-grid       | 8000  | 73.35         | 0.00          |
| FMG 4 Level Grid  | 3000  | 31.79         | 56.66         |



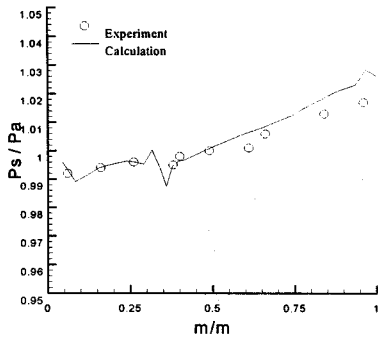
(a) 1/8 Blade stream surface



(b) 4/8 Blade stream surface

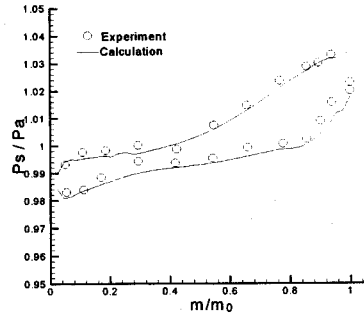


(c) 7/8 Blade stream surface

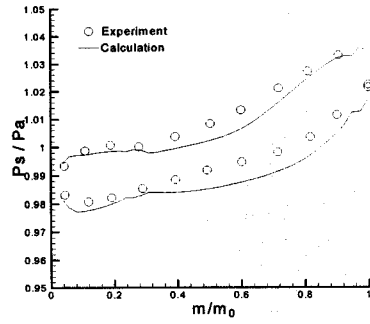


(d) Shroud

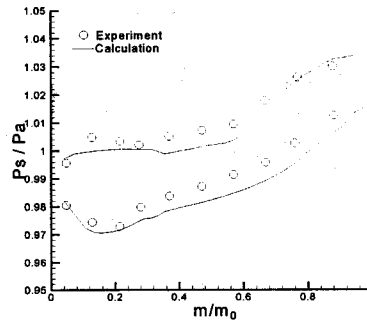
Fig. 6 Pressure distributions ( $\Phi=0.4$ )



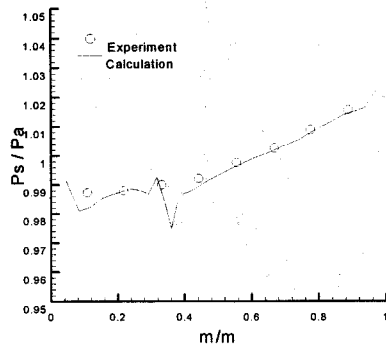
(a) 1/8 Blade stream surface



(b) 4/8 Blade stream surface



(c) 7/8 Blade stream surface



(d) Shroud

Fig. 7 Pressure distributions ( $\Phi=0.5$ )

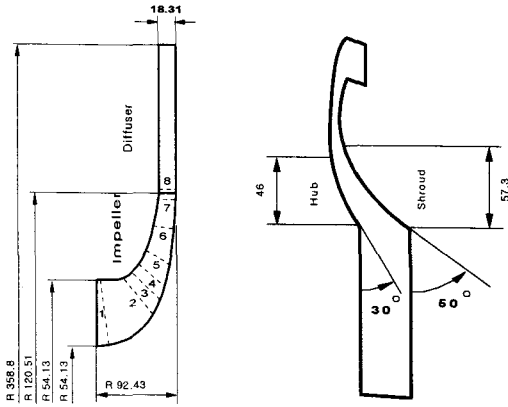


Fig. 8 Meridional configuration of Niigata Ms. 350 impeller

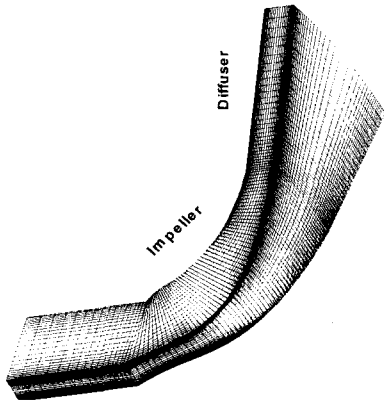


Fig. 9 3-D Mesh of Niigata MS. 350 impeller (105 × 45 × 21)

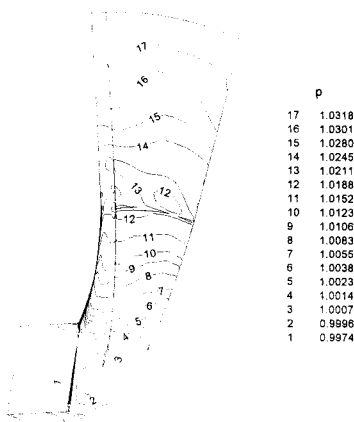


Fig. 10 Static pressure contours at hub & pressure side

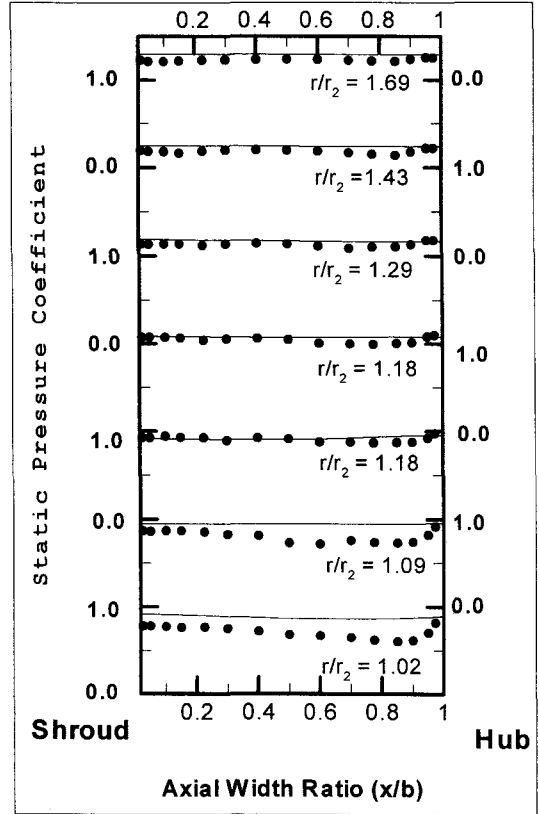


Fig. 11 Static pressure coefficient (— Calculation, ○ Exp.)

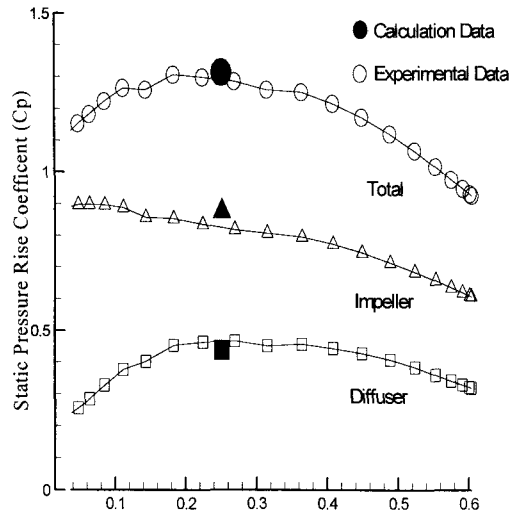


Fig. 12 Comparison of performance data