2-파라미터 바이블 분포에 대한 MLE와 BLUE의 성능에 관한 연구

°이상권, 고중혁, 김인수, 김태훈, 김양수, 성영권
고려대학교 대학원 전기공학과

A Study on the Performance of MLE and BLUE for the 2 Parameter Weibull Distribution

°S.K. Lee, J.H. Koh, I.S. Kim, T.H. Kim, Y.S Kim, Y.K. Sung
Dept. of Electrical Engineering, Korea Univ.

Abstract - Two estimators for the scale (δ) and shape (β) parameters and perc--entiles of the Weibull distribution were compared. These estimators are maximum likelihood estimator (MLE) and the best linear unbiased estimator (BLUE). The performance of these estimators are compared by mean square error and studied in complete and type II censored samples of size 10 and 25. The overall performance of the MLE was similar to that of the BLUE.

1. 서론

최근 전철 교통의 고속화와 고밀도화 운전이 더욱 요구됨에 따라, 빈번해 가는 열차운행과 점증해 가는 대기 오염등 환경조건의 악화로 인한 전차선로의 각종 사고가 빈발해 문제가 되고 있다. 이들 사고는 주로 전철 구조물중 전선재료의 노후화 및 열화로 인한 것으로, 따라서 전철 구간에서의 사고를 방지하기 위해서는 전차선로 전선시스템의 수명 예측을 통해 적절한 교체주기를 산정해두어야 한다.

이를 위해서는 먼저 샘플을 통해 모집단의 파괴분포를 추적하여 그 평균수명을 추정해야 한다.

이를 위해 본 연구에서는 모집단의 파괴 분포 형상이 바이블 분포함수를 따른다고 가정하여, 2 파라미터 바이블 분포의 척도파라미터(δ), 형상파라미터(β)에 대한 정확한 점추정을 시도하되 여러 추정량(estimator)중 MLE(maximum likeli hood estimator)와 BLUE(best linear unbiased estimator)의 성능을 비교 검토하였다. 이들 두 추정량의 성능은 샘플크기 n이 각각 10과 25인 complete 샘플과 type II censored 샘플을 이용하여 평균자승오차를 통해 비교하였다.

2. 이론적 고찰

2.1 2-파라미터 바이블 분포함수

임의 변수가 시간 t인 경우의 바이블 분포함수 f는 다음과 같다.

$$f(t,\ \delta,\ \beta,\ \gamma)=\left(\frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{t-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] \qquad (1)$$

이 때 t는 시간, δ는 척도파라미터(scale para--meter), β는 형상파라미터(shape parameter), γ는 위치파라미터(location parameter)이다.

만일 $t=0$이전에 고장이 발생하지 않는다면, $\gamma=0$이므로 다음과 같은 2-파라미터 바이블 분포함수를 얻을 수 있다.

$$f(t,\ \delta,\ \beta)=\left(\frac{\beta}{\delta}\right)\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\beta}\right] \qquad (2)$$

위와 같은 2-parameter 바이블 분포를 갖는 임의변수 t의 Sf(Survivor function or Relia--bility function)는 아래와 같다.

$$R(t)=\begin{cases}\exp[-(t/\delta)^{\beta}], & t\geq 0,\\ 0,\ \text{otherwise}\end{cases} \qquad (3)$$

이 함수의 의미는 t시간까지 시료가 고장이 안나고 생존할 확률의 누적확률분포이다.[3]

2.2 2-파라미터 바이블 분포에 대한 점추정량

2.2.1 Maximum likelihood Estimator

2-parameter 바이블 분포의 likelihood 함수 다음과 같다.

$$L(t_1,\ \ldots,\ t_n;\beta,\delta)=\prod_{i=1}^{n}(\beta/\delta)(t_i/\delta)^{\beta-1}\exp[-(t_i/\delta)^{\beta}] \qquad (4)$$

(4)식의 양변에 로그를 취하고, δ와 β에 관해 미분하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}\ln t_i)}{(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta})}-\frac{1}{\beta}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}\ln t_i)}{n}=0, \qquad (5)$$

$$\delta=(\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta})/n. \qquad (6)$$

위 식은 complete 샘플인 경우이나 censored 샘플에 적용한 경우에도 결과식은 같은 형태를 취하고 있어 결국 MLE는 복잡한 censored 샘플에

적용하는데 적합하다.[1] 즉, 어느 경우에나 MLE는 다음 식에 의해 정의된다.

$$(\textstyle\sum^* t_i^{\beta} \ln t_i)/(\sum^* t_i^{\beta}) - (1/\beta) - (\sum_{i=1}^{k} \ln t_i)/k = 0 \qquad (7)$$

$$\delta = (\textstyle\sum^* t_i^{\beta})/k \qquad (8)$$

여기서 $\sum^*$는 전체샘플에 대한 합으로 (n-k)개의 잔존시료에 대해서는 $t_i = t_T$를 할당한다. t_T는 Type Ⅰ인 경우에는 t_0이고, Type Ⅱ인 경우에는 t_k이다.

2.2.2 Best Linear Unbiased Estimator

2-파라미터 바이블 분포를 갖는 모집단으로부터, $x \equiv \ln t$라 하면, x의 Sf는 다음과 같다.

$$R(x) = \exp\{-\exp[(x-\eta)/\xi]\}, \quad \xi > 0 \qquad (9)$$

이 때, $\eta \equiv \ln\delta$는 위치파라미터, $\xi \equiv 1/\beta$는 척도 파라미터이다.

$y_p \equiv \ln[-\ln(1-p)]$이면, $x_p = \eta + y_p \xi$로 1차함수가 주어진다. 이 때 p는 누적고장확률을 나타내는 분위수(quantile)이다.

따라서, 샘플 크기 n인 경우에 정렬된 Y 변수와 정렬된 X 변수의 관계는 다음식과 같다.

$$Y_{(r)} = (X_{(r)} - \eta)/\xi, \quad r = 1, \ldots, n. \qquad (10)$$

이 때 $E\{Y_{(r)}\} = \alpha$, $\mathrm{Cov}\{Y_{(r)}, Y_{(s)}\} = \theta_{rs}$ 라고하면, $E\{X_{(r)}\} = \eta + \xi\alpha_r$, $\mathrm{Cov}\{X_{(r)}, X_{(s)}\} = \xi^2\theta_{rs}$로 되며 이것에 Gauss-Markove least squares theorem을 적용시키면 소위 최소분산을 갖는 η와 ξ의 BLUE를 구할 수 있다.[2],[3]

3. 시뮬레이션 방법

우선 샘플크기를 n, 고장개수를 k라 하고, (0, 1)의 범위를 갖는 n개의 난수를 발생시킨 후, 가장 작은 값부터 가장 큰 값으로 차례로 배열하여 $p_{(1)} \leq \ldots \leq p_{(n)}$의 정렬된 샘플을 만든다.

다음에 δ와 β값이 주어지면 아래식에 의해 바이블 분포함수의 임의변수를 구한다.

$$t_{(i)} = \delta[-\ln(1-p_{(i)})]^{1/\beta} \qquad i = 1, \ldots, k \qquad (11)$$

이를 토대로 샘플크기와 censoring 개수는 각각 $n=10$, $k=10(-1)3$과 $n=25$, $k=25(-5)5$로 하고, $\delta = \beta = 1$로 하여 시뮬레이션을 행하였다.

β에 대한 MLE는 Newton-Raphson 방법을 이용하여 (7)식을 풀되, 수렴기준은 10^{-4}으로 하였다. δ는 (7)식을 이용하여 구한 β를 (8)식에 대입하여 구하였다.

마지막으로 BLUE는 다음과 같은 관계를 이용하여 추정했다.

$$\xi^* = \tilde{\xi}/(1-\tilde{\gamma}), \quad \eta^* = \tilde{\eta} + \tilde{\theta}\xi^*$$

$$\beta^* = 1/\xi^*, \quad \delta^* = \exp(\eta^*) \qquad (12)$$

여기서

$$\tilde{\eta} = \textstyle\sum A_i \ln t_{(i)}, \quad \tilde{\xi} = \sum C_i \ln t_{(i)}$$

$$\tilde{\beta} = 1/\tilde{\xi}, \quad \tilde{\delta} = \exp(\tilde{\eta}) \qquad (13)$$

로 계수 $A_i, C_i (i = 1, \ldots, k)$와 $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$의 평균자승오차의 비례계수 $\tilde{\alpha}$와 $\tilde{\gamma}$ 그리고, 이들의 공분산의 비례계수 $\tilde{\theta}$는 Mann의 논문[4]의 Table Ⅰ에 의해 구할 수 있다.

크기가 n인 샘플 1000개를 추가로 추출하여 이들에 대해 각각의 estimator의 평균(mean) 분산(variance), 바이어스(bias), 평균자승오차(mean square error, MSE)를 구하였다.

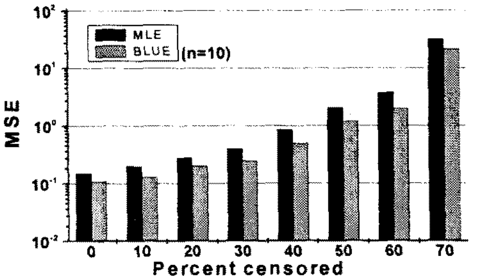
바이어스는 실제 파라미터 값과 샘플 평균의 차이를 이용하였고, 평균자승오차는 샘플의 바이어스의 제곱과 분산의 합으로 구하였다.

4. 시뮬레이션 결과

시뮬레이션에 사용된 샘플은 complete and censored 샘플로서 파라미터값은 $\delta = \beta = 1$이었으며, 이 때 $n=10$, $k=10(-1)3$, $n=25$, $k=25(-5)5$였다.

β, $1/\beta$, α에 대한 각각의 추정량의 성능은 MSE를 기준으로 비교하였다. 횡축은 percent censored(PC=100(n-k)/n), 종축은 MSE로 log scale로 표시하였다.

그림 1은 MLE와 BLUE의 β추정에 대한 성능을 비교한 것으로 전체적으로 샘플크기와 censoring 정도에 비례해 MSE가 크게 증가하였으나, BLUE가 MLE에 비해 약간 우수한 성능임을 알 수 있다.



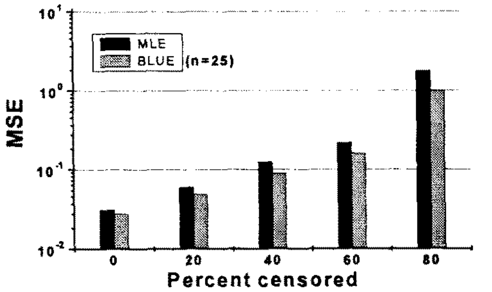


그림 1. β에대한 MLE와 BLUE의 MSE

그림 2는 $1/\beta$ 추정에 대한 성능을 비교한 것으로 그림 1과 마찬가지로 샘플크기와 censoring 정도에 비례해 MSE가 증가하나, MLE가 BLUE에 비해 약간 우수한 성능을 보이고 있다.

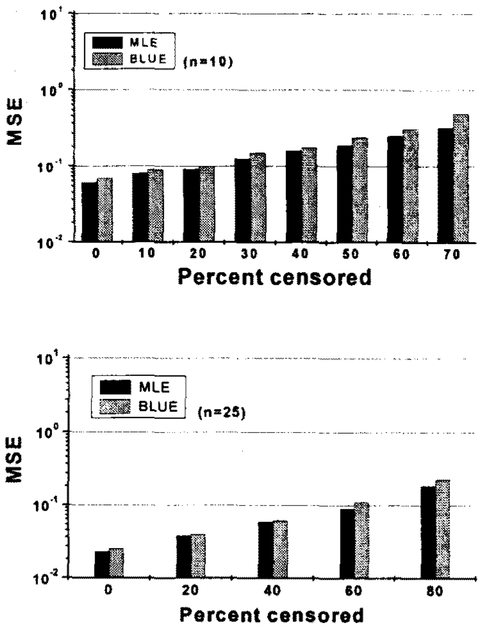
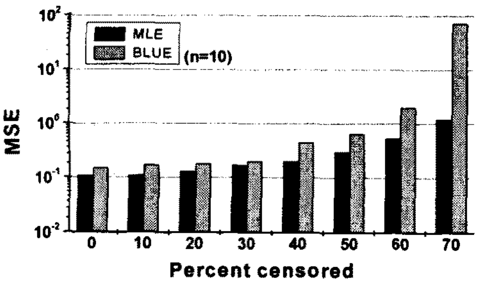


그림 2. $1/\beta$ 에대한 MLE와 BLUE의 MSE

그림 3은 δ 추정에 대한 성능을 비교한 것이다. MLE와 BLUE 모두 β 나 $1/\beta$ 에 비해 우수한 성능을 보여주고 있다. 한편 percent censored가 적을 경우에는 MLE와 BLUE가 비슷한 성능을 보여주고 있으나, censoring 정도가 증가할수록 MLE가 BLUE에 비해 작은 MSE를 갖음을 알 수 있다.



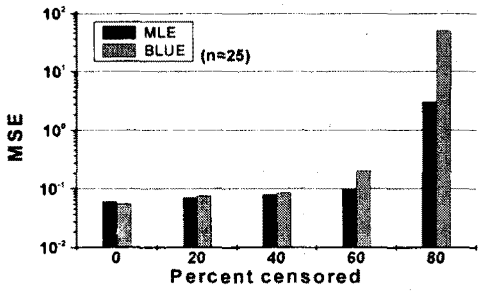


그림 3. δ 에대한 MLE와 BLUE의 MSE

5. 결론

2-파라미터 바이블 분포함수를 따르는 크기가 n인 샘플 1000개를 무작위로 추출하여 β, $1/\beta$, δ 의 추정량으로서 MLE와 BLUE를 선택하여 MSE를 비교함으로써 그 성능을 비교 분석하였다.

그 결과 어느것도 월등하게 우수하다고 할 수 없으나, β 추정에는 BLUE가 우수하였고, $1/\beta$ 과 δ 추정에는 MLE가 우수한 성능을 보여주었다.

[참고문헌]

[1] A. C. Cohen, "Maximum likelihood estimation in the Weibull distribution based on complete and on censored samples," Technometrics, vol 7, pp 579-588, 1965.

[2] J. Lieblein, "On the exact evaluation of the variances and covariances of the order statistics in samples from the extreme-value distribution," Annals Mathematical Statistics, vol 24, pp 282-287, 1953.

[3] E. H. Lloyd, "Least squares estimation of location and scale parameters using order statistics," Biometrica, vol 39, pp 88-95, 1952.

[4] N. R. Mann, "Results on location and scale parameter estimation with application to the extreme-value distribution," Aerospace Research Laboratories Technical Report No. ARL 67-0023, 1967.

[5] Roger D. Leitch, *Reliability analysis for Engineers*, Oxford Univ. Press, 1995.

[6] Elsayed A. Elsayed, *Reliability Engineering*, Addison Wesley Longman, Inc. 1996.

[7] Diane I. Gibbons, "A Simulation Study of Estimations for the 2 Parameter Weibull Distibution" ,IEEE Transcationson Reliability, vol. R-30, No. 1, pp 61-66, April 1981.

[8] Alan J. Gross, "Monte CarloComparisons of Parameter estimators of the 2-parameter Weibull Distribution" , IEEE Transcations on Reliability, vol. R-26, No. 5, pp 61-66, December, 1981.